# 6. Differenciálegyenletek

## 6.1. A differenciálegyenlet fogalma

Meghatározni az $f$ függvény $F$ primitív függvényét annyit jelent, mint találni egy olyan $F$ függvényt, amely differenciálható az adott intervallumon és amelyre érvényes, hogy

$$F'(x) = f(x). \tag{6.1}$$

A probléma másik megfogalmazása: megkeresni az $f$ függvény határozatlan integrálját az adott intervallumon annyit jelent, mint megadni a (6.1) függvényegyenlet minden megoldását az adott intervallumon.

A természetben bizonyos fizikai problémák megoldása matematikai szempontból egy-egy ismeretlen függvény meghatározását teszi szükségessé. Ez csak akkor lehetséges, ha az adott problémára fel tudunk írni egy matematikai modellt, azaz az ismeretlen függvényre egy olyan egyenletet, amelyet annak ki kell elégítenie. Ezekben az egyenletekben, mint például a (6.1)-ben is, az ismeretlen függvényen kívül szerepelhetnek annak deriváltjai is. Az ilyen egyenleteket nevezzük differenciálegyenleteknek. A differenciálegyenletek elmélete igen fontos és szerteágazó matematikai tudományterület, amelynek számos különböző alkalmazása van.

**6.1. Példa.** Keressük meg az $xOy$ síkban azokat a görbéket, amelyek bármely pontjában az érintő iránytényezője fordítottan arányos az érintési pont abszcisszájával.

**Megoldás.** Ha $y = y(x)$ a keresett görbe egyenlete, akkor

$$y' = \frac{k}{x}$$

kell, hogy teljesüljön, ahol $k$ az arányossági tényező. Ekkor

$$y = \int \frac{k}{x} dx = k \int \frac{dx}{x} = k \ln |x| + C,$$

ahol $C$ tetszőleges valós állandó. Ebből a görbeseregből egy meghatározott görbét úgy tudunk kiválasztani, ha megadunk még valamilyen feltételt. Keressük a görbeseregből azt a görbét, amely áthalad az $M(1, 0)$ ponton. Ekkor a keresett görbe teljesíti az

$$y(1) = 0, \quad \text{azaz} \quad k \ln 1 + C = 0$$

feltételt, ahonnan $C = 0$ adódik, azaz a kiválasztott görbe az $y = k \ln |x|$.

**6.2. Példa.** Adjuk meg az $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ görbeseregnek megfelelő differenciálegyenletet, ahol $C_1$ és $C_2$ valós paraméterek.

**Megoldás.** Ha kétszer differenciáljuk a függvényt, akkor

$$y' = C_1e^x - C_2e^{-x}, \quad y'' = C_1e^x + C_2e^{-x}$$

adódik, ahonnan a keresett differenciálegyenlet $y'' = y$.

**6.1. Definíció.** *Azt a függvényegyenletet, amely a független változót, az ismeretlen függvényt, valamint az ismeretlen függvény deriváltjait tartalmazza, differenciálegyenletnek nevezzük. A differenciálegyenlet rendje az ismeretlen függvény differenciálegyenletben szereplő legmagasabb deriváltjának a rendje.*

Az algebrai egyenletekhez hasonlóan a differenciálegyenletekben is van ismeretlen, de az most nem szám, hanem függvény. Az egyenlet megoldásakor olyan $y = y(x)$ függvényeket keresünk, amelyeket deriváltjaikkal együtt a differenciálegyenletbe helyettesítve az $x$ változóban egy azonosságot kapunk. Az egyszerűbb felírás kedvéért, az $x$ független változójú $y(x)$ függvény helyett a differenciálegyenletekben csak $y$-t írunk.
A fenti definíció alapján, $y' = x^2$ elsőrendű differenciálegyenlet, $y'' - y = 0$ pedig másodrendű differenciálegyenlet.
A modellezett fizikai problémától függően az $x$ változó helyett sokszor más betűt használunk, legtöbbször $t$-t, amely az időre utal; ekkor $y$ helyett $x$-et vagy $s$-t, $y'$ helyett $x'$-t, $\dot{x}$-ot vagy $s'$-t, $\dot{s}$-ot írunk.
Adott $F : (a, b) \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ és $f : (a, b) \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényekre az elsőrendű differenciálegyenlet implicit alakja

$$F(x, y, y') = 0, \tag{6.2}$$

explicit alakja pedig

$$y' = f(x, y).$$

Adott $G : (a, b) \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ és $g : (a, b) \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ függvényekre a másodrendű differenciálegyenlet implicit alakja

$$G(x, y, y', y'') = 0, \tag{6.3}$$

explicit alakja pedig

$$y'' = g(x, y, y').$$

**6.2. Definíció.** *Az $y = y(x)$ függvény a (6.2), illetve (6.3) differenciálegyenlet megoldása az $(a, b)$ intervallumon, ha $y = y(x)$ egyszer, illetve kétszer differenciálható az $(a, b)$ intervallumon, és deriváltjaival együtt kielégíti a megfelelő differenciálegyenletet. Ha az $y = y(x)$ függvény megoldása a differenciálegyenletnek, akkor az $y = y(x)$ függvény grafikonját megoldásgörbének nevezzük.*

Megoldani egy differenciálegyenletet annyit jelent, mint megkeresni minden megoldását. A differenciálegyenletek elméletében a differenciálegyenleteknek különböző megoldásai léteznek.

**6.3. Definíció.** *Az $y = y(x, C)$ függvénycsaládot, ahol $C$ tetszőleges valós állandó, az $y' = f(x, y)$ elsőrendű differenciálegyenlet általános megoldásának nevezzük, ha az*

$$y = y(x, C)$$

*függvények mindegyike megoldása az adott egyenletnek.*

Az általános jelző egy kicsit félrevezető. Előfordulhat ugyanis olyan eset, hogy az általános megoldás nem szolgáltatja az egyenlet összes megoldását. Ez azt jelenti, hogy van az egyenletnek olyan megoldása, amely nem kapható meg a $C$ paraméter alkalmas megválasztásával. Az ilyen megoldást *szinguláris megoldásnak* nevezzük.

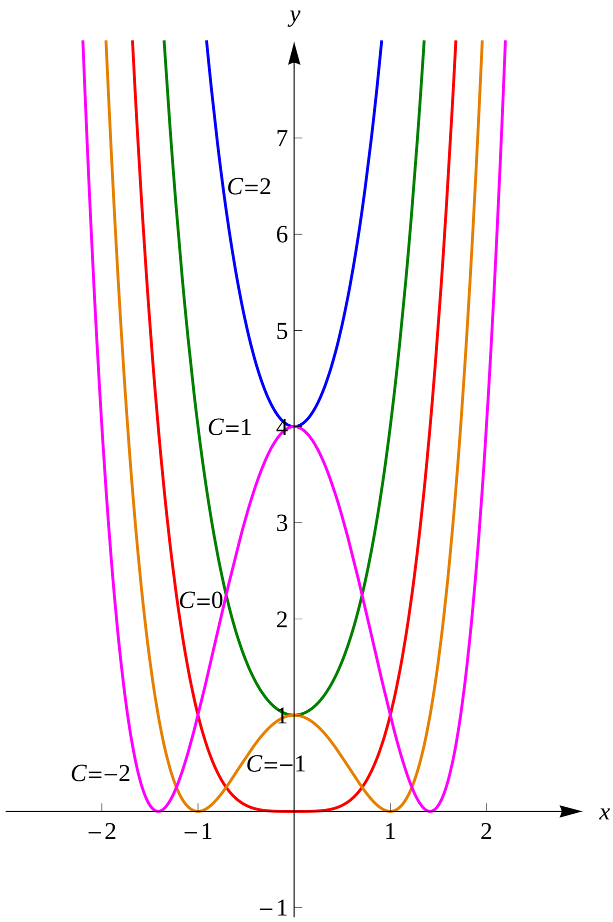
**6.4. Definíció.** *Az $y' = f(x, y)$ elsőrendű differenciálegyenlet minden olyan megoldását, amelyet az egyenlet általános megoldásából kapunk a $C$ paraméter egy konkrét (megengedett) $C = C_0$ értékére, partikuláris megoldásnak nevezzük.*

Az elsőrendű differenciálegyenlet általános megoldása egy egyparaméteres görbesereget határoz meg. Ennek a görbeseregnek egy görbéje egy partikuláris megoldás grafikonját ábrázolja.

**6.3. Példa.** Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy az $y = (x^2 + C)^2$ az

$$y' = 4x\sqrt{y}$$

egyenlet általános megoldása. Az egyenlet partikuláris megoldása például $C = 1$ esetén az $y = (x^2+1)^2$, $C = -1$ esetén az $y = (x^2-1)^2$ vagy $C = 0$ esetén az $y = x^4$. Az egyenletnek megoldása az $y \equiv 0$ is. A $C$ paramétert nem tudjuk úgy választani, hogy $(x^2 + C) \equiv 0$ egy intervallumon teljesüljön. Ezért az egyenletnek $y \equiv 0$ szinguláris megoldása.




Általában az $y' = f(x, y)$ elsőrendű differenciálegyenlet olyan partikuláris megoldását keressük, amely áthalad egy megadott $(x_0, y_0)$ ponton, azaz eleget tesz az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltételnek. Az $y' = f(x, y)$ elsőrendű differenciálegyenlet az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltétellel együtt kezdetiérték-problémát alkot.

**6.4. Példa.** Tekintsük az $y = xy'$ differenciálegyenletet. Határozzuk meg az adott differenciálegyenlet általános megoldását, majd azt a partikuláris megoldást, amely eleget tesz az $y(-3) = \frac{1}{3}$ kezdeti feltételnek.

**Megoldás.** Írjuk fel az egyenletet

$$y = x\frac{dy}{dx}$$

alakban. Ekkor

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

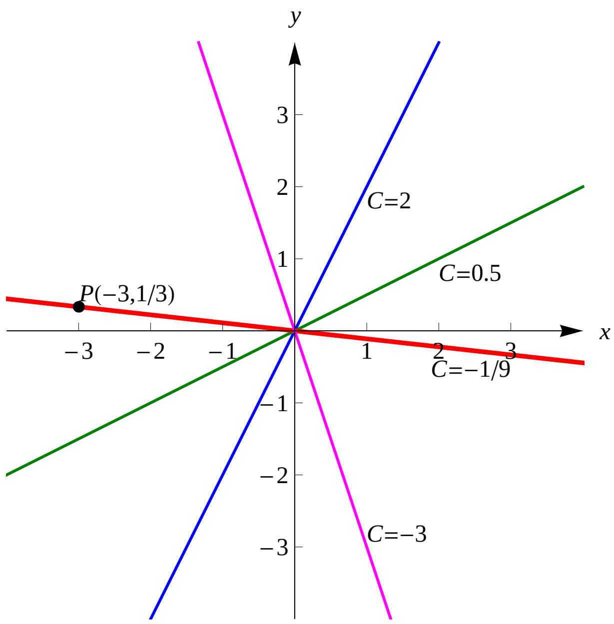
($xy \neq 0$; $y = 0$ egy megoldása a differenciálegyenletnek), ahonnan a két oldal integrálásával kapjuk, hogy

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C_1, \quad C_1 > 0,$$

azaz $|y| = C_1|x|$. Innen $y = C_1x$ vagy $y = -C_1x$, vagyis

$$y = Cx, \quad C \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

az általános megoldás.
Minden $(x_0, y_0)$, $x_0 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ pont esetén létezik az $y = Cx$ görbeseregnek egy olyan egyértelmű megoldása, amely tartalmazza a megadott pontot. Eszerint a megadott $\left(-3, \frac{1}{3}\right)$ pontra az $\frac{1}{3} = -3C$ egyenletnek $C = -\frac{1}{9}$ egyértelmű megoldása, tehát a keresett partikuláris megoldás $y = -\frac{x}{9}$.




**6.5. Definíció.** *Az $y = y(x, C_1, C_2)$ függvénycsaládot, ahol $C_1$ és $C_2$ tetszőleges egymástól független valós állandók, az $y'' = g(x, y, y')$ másodrendű differenciálegyenlet általános megoldásának nevezzük, ha az $y = y(x, C_1, C_2)$ függvények mindegyike megoldása az adott egyenletnek.*

A másodrendű differenciálegyenlet általános megoldása egy kétparaméteres görbesereget határoz meg.

**6.6. Definíció.** *Az $y'' = g(x, y, y')$ másodrendű differenciálegyenlet minden olyan megoldását, amelyet az egyenlet általános megoldásából kapunk vagy csak a $C_1$, vagy csak a $C_2$, vagy mindkét paraméter konkrét $C_1 = C_0^1$ vagy $C_2 = C_0^2$ értékére, partikuláris megoldásnak nevezzük.*

**6.5. Példa.** Az $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ függvény az $y'' + y = 0$ másodrendű differenciálegyenlet általános megoldása, $y = C_1 \cos x$, $y = C_2 \sin x$, $y = \cos x - \sin x$ pedig partikuláris megoldások.

Általában az $y'' = g(x, y, y')$ másodrendű differenciálegyenlet olyan partikuláris megoldását keressük, amely áthalad egy megadott $(x_0, y_0)$ ponton és $x_0$ pontban $y_1$ a meredeksége, azaz eleget tesz az $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ kezdeti feltételnek. Az $y'' = g(x, y, y')$ másodrendű differenciálegyenlet az $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ kezdeti feltétellel együtt kezdetiérték-problémát alkot.

## 6.2. Elsőrendű differenciálegyenletek

### 6.2.1. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

**6.7. Definíció.** *Az $y' = f(x)g(y)$ alakban felírható elsőrendű differenciálegyenletet szétválasztható változójú differenciálegyenletnek nevezzük.*

Ha a deriváltra a Leibniz-féle jelölést használjuk, $y' = \frac{dy}{dx}$, akkor az $y' = f(x)g(y)$ egyenlet

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

alakban írható fel. A megoldás létezésének biztosítása érdekében tegyük fel, hogy $f$ és $g$ folytonosak a megfelelő intervallumokban. Ha $g(y) \neq 0$, akkor az $y' = f(x)g(y)$ egyenlet ekvivalens a

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

egyenlettel, és az egyenlet általános megoldása ekkor

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx,$$

amiből $\frac{1}{g(y)}$ és $f(x)$ primitív függvényeinek, mondjuk $G(y)$ és $F(x)$ függvények meghatározása után azt kapjuk, hogy

$$G(y) = F(x) + C,$$

ahol $C$ tetszőleges valós állandó.
Ha a $g(y) = 0$ egyenletnek $b_1$, $b_2$, ..., $b_k$ valós megoldásai, akkor a fenti megoldások mellett az $y = b_1$, $y = b_2$, ...,$y = b_k$ függvények is megoldásai az $y' = f(x)g(y)$ egyenletnek.

**FELADATOK.**

**1.** Határozzuk meg az $y' = -\frac{x}{y}$ differenciálegyenlet általános megoldását, majd azt a partikuláris megoldást, amely áthalad a $P(1,1)$ ponton.

**Megoldás.** Alkalmazzuk az $y' = \frac{dy}{dx}$ jelölést. Ha $y \neq 0$, akkor a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

szétválasztható változójú differenciálegyenletet kapjuk, amiből

$$ydy = xdx.$$

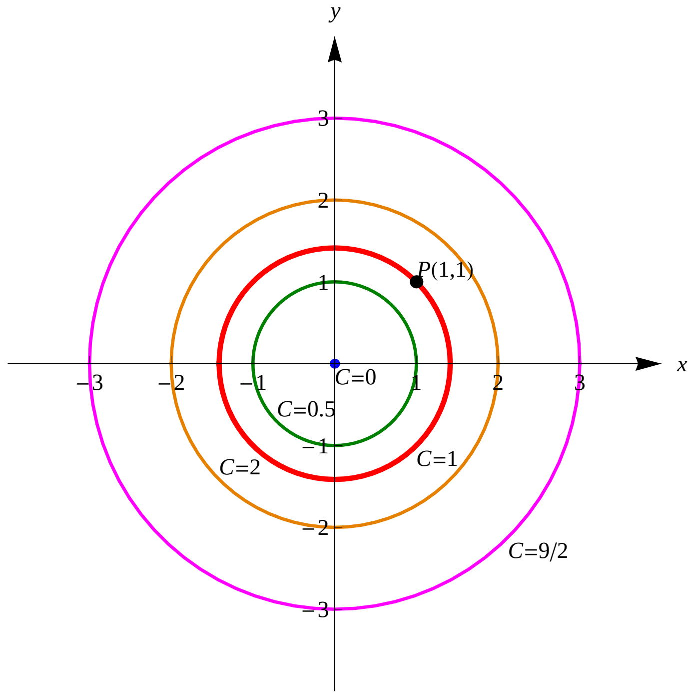
Integráljuk az egyenlet mindkét oldalát, ekkor az

$$\int ydy = \int xdx$$

egyenlőséget kapjuk, innen pedig integrálás után

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C, \quad \text{azaz} \quad x^2 + y^2 = 2C.$$

Ha $2C = r^2$, akkor az $x^2 + y^2 = r^2$ egyenletű görbesereg, azaz koncentrikus középponti körvonalak képezik az általános megoldást. Ha a $P(1,1)$ ponton áthaladó partikuláris megoldást keressük, akkor a $P(1,1)$ ponton áthaladó körvonal egyenletét keressük. Ha belyettesítjük a $P$ pont megfelelő koordinátáit az általános megoldásba, akkor $1^2 + 1^2 = r^2$ azaz $r^2 = 2$. A keresett partikuláris megoldás tehát $x^2 + y^2 = 2$.



**2.** Határozzuk meg az $y' - \dfrac{2xy}{x^2-1} = 0$ differenciálegyenlet $y(\sqrt{2}) = 1$ feltételt kielégítő megoldását.

**Megoldás.** Az egyenlet felírható

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2xy}{x^2-1} = 0$$

alakban is, amelyből megállapítható, hogy szétválasztható változójú differenciálegyenletről van szó. A folytonosság biztosítása miatt $x \neq 1$ és $x \neq -1$. Ha $y \neq 0$, akkor a fenti egyenlet

$$\frac{dy}{y} = \frac{2xdx}{x^2-1}$$

alakban is felírható. Integrálva az egyenlet mindkét oldaát adódik, hogy

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2xdx}{x^2-1}.$$

A jobboldali integrálban vezessük be az $x^2 - 1 = t$ helyettesítést, amiből $2xdx = dt$. Integrálás után

$$\ln|y| = \ln|x^2-1| + \ln C, \quad C \in \mathbf{R}^+,$$

innen pedig

$$\ln|y| = \ln C|x^2-1|.$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt kapjuk, hogy

$$|y| = C|x^2-1|,$$

ahonnan $y = C(x^2-1)$ vagy $y = -C(x^2-1)$, $C \in \mathbf{R}^+$. Ha $C_1 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ konstanst választunk, akkor a két egyenlet közös alakja

$$y = C_1(x^2-1), \quad C_1 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Vegyük észre, hogy $y = 0$ is megoldása az egyenletnek, mely $C_1 = 0$ esetén az általános megoldásból is megkapható, tehát az

$$y = C_1(x^2-1), \quad C_1 \in \mathbf{R},$$

függvénycsalád alkotja az általános megoldást, s ezen függvények grafikonjai egy parabolasereget alkotnak. Ha az általános megoldás függvényeiből azt a partikuláris megoldást keressük, amely kielégíti az $y(\sqrt{2}) = 1$ feltételt, akkor azt a megoldást keressük, amely $x = \sqrt{2}$ esetén $y = 1$ értéket ad, azaz teljesül az

$$1 = C_1(1^2 - 1)$$

egyenlőség, ahonnan $C_1 = 1$. A keresett partikuláris megoldás tehát $y = x^2 - 1$.

**3.** Határozzuk meg a $\sin xdx + \cos ydy = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását, majd azt a partikuláris megoldást, amely eleget tesz az $y(0) = \pi$ feltételnek.

**Megoldás.** Mivel a megadott differenciálegyenlet ekvivalens a

$$\sin xdx = -\cos ydy$$

egyenlettel, megállapíthatjuk, hogy egy szétválasztható változójú differenciálegyenletről van szó. Integrálás után adódik:

$$\int \sin x dx = -\int \cos y dy$$

$$-\cos x + C = -\sin y,$$

tehát az általános megoldás

$$\sin y - \cos x + C = 0.$$

A partikuláris megoldás meghatározásához meg kell határozni a $C$ állandó értékét, amelyre teljesül az $y(0) = \pi$ feltétel. Tehát keressük azt a megoldást, amely áthalad a $(0, \pi)$ ponton. A

$$\sin \pi - \cos 0 + C = 0$$

feltételből adódik, hogy $C = 1$, vagyis a keresett partikuláris megoldás

$$\sin y - \cos x + 1 = 0.$$

**4.** Oldjuk meg az $y' + y^2 = 1$ differenciálegyenletet.

**Megoldás.** A változók szétválasztásához használjuk fel az $y' = \dfrac{dy}{dx}$ jelölést. Ekkor

$$\frac{dy}{dx} = 1 - y^2 \quad \text{és} \quad \frac{dy}{1 - y^2} = dx, \quad \text{ha} \quad y \neq \pm 1.$$

Mindkét oldal integrálásával kapjuk, hogy

$$\int \frac{dy}{1 - y^2} = \int dx.$$

A baloldali integrál racionális törtfüggvény integrálja. Elemi törtekre való bontás után kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{1 - y} + \frac{1}{1 + y} \right) dy = x + C,$$

ahol $C$ tetszőleges valós szám, innen pedig integrálás után

$$\frac{1}{2} \left( -\ln |1 - y| + \ln |1 + y| \right) = x + C$$

adódik. Az egyenlet bal oldalának rendezése után az egyenlet

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + y}{1 - y} \right| = x + C$$

alakú lesz, általános megoldása pedig

$$y = \frac{e^{2(x+C)} - 1}{e^{2(x+C)} + 1}, \quad C \in \mathbf{R}.$$

**5.** Határozzuk meg az $y' = \dfrac{-x - xy}{y + xy}$, $y(-2) = -2$ kezdetiérték-probléma megoldását.

**Megoldás.** Alkalmazzuk az $y' = \dfrac{dy}{dx}$ jelölést és bontsuk tényezőire az egyenlet jobb oldalát. Ha $y \neq 0$ és $x \neq -1$, akkor

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x(1+y)}{y(1+x)}.$$

Ha $y \neq -1$, akkor a változók szétválasztása után kapjuk, hogy

$$\frac{ydy}{1+y} = -\frac{xdx}{1+x},$$

mindkét oldal integrálása után pedig a következő adódik:

$$\int \frac{ydy}{1+y} = -\int \frac{xdx}{1+x}$$

$$\int \frac{y+1-1}{1+y} dy = -\int \frac{x+1-1}{1+x} dx$$

$$\int \left(1 - \frac{1}{1+y}\right) dy = -\int \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx$$

$$\int dy - \int \frac{1}{1+y} dy = -\int dx + \int \frac{1}{1+x} dx.$$

A megfelelő primitív függvények meghatározása után kapjuk a differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y - \ln|1+y| = -x + \ln|1+x| + C,$$

illetve más elrendezésben:

$$y + x - C = \ln|1+x| + \ln|1+y|.$$

Mivel az $y(-2) = -2$ kezdeti feltételnek kell teljesülnie, ezért

$$-2 - 2 - C = \ln|1-2| + \ln|1-2|,$$

$$-4 - C = 2\ln 1, \quad \text{ahonnan} \quad C = -4.$$

A kezdetiérték-probléma megoldása tehát

$$y + x + 4 = \ln|(1+x)(1+y)|, \quad \text{azaz} \quad e^{y+x+4} = |(1+x)(1+y)|.$$

### 6.2.2. Változóiban homogén differenciálegyenlet

**6.8. Definíció.** *Az $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ alakú differenciálegyenletet változóiban homogén (vagy röviden homogén) differenciálegyenletnek nevezzük.*

Ezt az egyenlet az $y = tx$ helyettesítéssel, ahol $t = t(x)$ az új ismeretlen függvény, szétválasztható változójú differenciálegyenletre hozhatjuk. Ekkor $y' = t'x + t$, majd a homogén egyenletbe való behelyettesítés után $t'x + t = f(t)$ adódik, azaz

$$\frac{dt}{dx}x + t = f(t), \quad \text{vagyis, hogy} \quad \frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x},$$

az $f(t) \neq t$ feltétel mellett. A jobb és bal oldal integrálása után adódik, hogy

$$\int \frac{dt}{f(t) - t} = \ln|x| + C\ .$$

Ha az $f(t) = t$ egyenletnek $t_1$, $t_2$, ..., $t_k$ megoldásai, akkor a

$$t = t_1,\ t = t_2,\ \ldots,\ t = t_k$$

konstans függvények megoldásai az átalakított egyenletnek, az

$$y = t_1 x,\ y = t_2 x,\ \ldots,\ y = t_k x$$

lineáris függvények pedig az eredeti homogén egyenletnek megoldásai.

**FELADATOK.**

**1.** Határozzuk meg az $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$, $x \neq 0$, differenciálegyenlet általános megoldását.

**Megoldás.** Vegyük észre, hogy az adott egyenlet $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ alakú, tehát változóiban homogén differenciálegyenlet. Alkalmazzuk az $y = tx$, illetve $\frac{y}{x} = t$ helyettesítést, ahonnan $y' = t'x + t$, mert $t = t(x)$ az új ismeretlen függvény. Ekkor

$$t'x + t = e^t + t,$$

ebből pedig

$$x\frac{dt}{dx} = e^t.$$

A változók szétválasztása után kapjuk, hogy

$$\frac{dt}{e^t} = \frac{dx}{x},$$

majd mindkét oldal integrálásával az

$$\int e^{-t} dt = \int \frac{dx}{x},$$

illetve

$$-e^{-t} = \ln|x| + \ln C, \quad C > 0$$

egyenlőséget, ahonnan

$$e^{-t} = \ln\frac{1}{C|x|}, \quad \text{azaz} \quad t = -\ln\left(\ln\frac{1}{C|x|}\right).$$

Visszahelyettesítés után adódik az

$$\frac{y}{x} = -\ln\left(\ln\frac{1}{C|x|}\right), \quad \text{azaz} \quad y = -x\ln\left(\ln\frac{1}{C|x|}\right)$$

általános megoldás.

**2.** Határozzuk meg az $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$ differenciálegyenlet általános megoldását, majd azt a partikuláris megoldást, amely áthalad a $(0, 1)$ ponton.

**Megoldás.** Ha $y \neq \pm x$, $x \neq 0$ és az egyenlet jobb oldalán levő racionális törtfüggvényt $x^2$-tel egyszerűsítjük, akkor

$$y' = \frac{\frac{2xy}{x^2}}{\frac{x^2-y^2}{x^2}}, \quad \text{azaz} \quad y' = \frac{2 \cdot \frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

adódik, amiből látszik, hogy az egyenletünk $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ alakú, tehát változóiban homogén differenciálegyenlet. Alkalmazzuk az $y = tx$, illetve $\dfrac{y}{x} = t$ helyettesítést, ahonnan $y' = t'x + t$, mert $t = t(x)$ az új ismeretlen függvény. Ekkor

$$t'x + t = \frac{2t}{1 - t^2},$$

ahonnan rendezéssel az

$$xt' = \frac{2t}{1 - t^2}, \quad \text{azaz} \quad x\frac{dt}{dx} = \frac{t^3 + t}{1 - t^2}$$

alakú szétválasztható változójó differenciálegyenletet kapjuk. A változók szétválasztása után kapjuk, hogy

$$\frac{1 - t^2}{t^3 + t}dt = \frac{dx}{x},$$

a két oldal integrálásával pedig, hogy

$$\int \frac{1 - t^2}{t^3 + t}dt = \int \frac{dx}{x}.$$

Mivel a baloldali integrandus egy racionális törtfüggvény, amely elemi törtek összegére bontható, azaz

$$\frac{1 - t^2}{t(t^2 + 1)} = \frac{1}{t} - \frac{2t}{t^2 + 1}$$

érvényes, ezért a továbbiakban

$$\int \left( \frac{1}{t} - \frac{2t}{t^2+1} \right) dt = \ln|x| + \ln C, \quad C > 0.$$

A baloldali második integrálban bevezetjük a $t^2 + 1 = z$, $2tdt = dz$ helyettesítést, így

$$\ln|t| - \ln|z| = \ln C|x|, \quad \text{illetve} \quad \left| \frac{t}{t^2+1} \right| = C|x|.$$

Ebből visszahelyettesítés és rendezés után

$$\frac{y}{x^2+y^2} = C_1, \quad C_1 \in \mathbf{R},$$

az általános megoldás.
A keresett partikuláris megoldásra teljesül, hogy ha $x = 0$, akkor $y = 1$. Ekkor

$$\frac{1}{0^2+1^2} = C_1,$$

azaz $C_1 = 1$, s ebből a keresett partikuláris megoldás

$$y = x^2 + y^2.$$

**3.** Oldjuk meg az $xy' - y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x}$ differenciálegyenletet, ha $x \neq 0$.

**Megoldás.** Fejezzük ki az adott egyenletből az ismeretlen függvény deriváltját. Ekkor

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x+y}{x} \ln \frac{x+y}{x},$$

innen pedig

$$y' = \frac{y}{x} + \left(1 + \frac{y}{x}\right) \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right).$$

Megállapíthatjuk, hogy a differenciálegyenlet változóiban homogén, tehát bevezetjük a $t = \frac{y}{x}$ helyettesítést, ahonnan $y' = t + xt'$. Az egyenlet most

$$t + xt' = t + (1+t)\ln(1+t)$$

szétválasztható változójú differenciálegyenletté alakul át, amely a változók szétválasztása után

$$\frac{dt}{(1+t)\ln(1+t)} = \frac{dx}{x}$$

alakra hozható. Integráljuk a fenti egyenlet mindkét oldalát. Ekkor

$$\int \frac{dt}{(1+t)\ln(1+t)} = \int \frac{dx}{x}.$$

Ha a bal oldalon alkalmazzuk az $\ln(1+t) = z$ helyettesítést, akkor $\frac{dt}{1+t} = dz$, és így

$$\int \frac{dz}{z} = \ln|x| + \ln C, \quad C > 0$$

adódik, ahonnan

$$\ln|z| = \ln C|x|, \quad \text{illetve} \quad z = C_1 x, \quad C_1 \in \mathbf{R}.$$

Visszatérve az eredeti változókra kapjuk, hogy

$$\ln(1+t) = C_1 x, \quad \text{illetve} \quad e^{C_1 x} = 1 + \frac{y}{x}, \quad C_1 \in \mathbf{R}.$$

Ebből az általános megoldás

$$\frac{y}{x} = e^{C_1 x} - 1, \quad \text{amiből} \quad y = x\left(e^{C_1 x} - 1\right), \quad C_1 \in \mathbf{R}.$$

**4.** Határozzuk meg az $(x^3 + y^3)dx - 3xy^2dy = 0$ differenciálegyenlet $y(1) = 1$ kezdeti feltételt teljesítő megoldását.

**Megoldás.** Az egyenlet rendezése után adódik, hogy

$$(x^3 + y^3)dx = 3xy^2dy, \quad \text{illetve} \quad \frac{x^3 + y^3}{3xy^2} = \frac{dy}{dx}, \quad \text{ha} \quad xy \neq 0.$$

Alkalmazzuk a $\dfrac{dy}{dx} = y'$ helyettesítést és egyszerűsítsük a racionális törtfüggvényt $x^3$-nal. Ekkor a differenciálegyenlet felírható mint

$$y' = \frac{\frac{x^3+y^3}{x^3}}{\frac{3xy^2}{x^3}}, \quad \text{illetve} \quad y' = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3}{3 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Megállapíthatjuk, hogy a kapott egyenlet elsőrendű változóiban homogén differenciálegyenlet, ezért bevezetjük a $t = \dfrac{y}{x}$ helyettesítést ahonnan $y' = t + xt'$. Behelyettesítés után a

$$t + xt' = \frac{1 + t^3}{3t^2}$$

szétválasztható változójú differenciálegyenletet kapjuk, amely a változók szétválasztása után az

$$\frac{1}{x}dx = \frac{3t^2}{1 - 2t^3}dt$$

alakra hozható. Integrálva a fenti egyenlet mindkét oldalát kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{3t^2}{1 - 2t^3}dt.$$

Vezessük be az $s = 1 - 2t^3$ helyettesítést a jobb oldalon. Ekkor $ds = -6t^2dt$ és

$$\ln|x| + \ln C = -\frac{1}{2}\int \frac{ds}{s}, \quad C > 0.$$

Integrálás és rendezés után adódik, hogy

$$\ln C|x| = -\frac{1}{2}\ln|1 - 2t^3| \quad \text{és} \quad C^2x^2 = \frac{1}{|1 - 2t^3|}.$$

Visszatérve az eredeti változóra, elhagyva az abszolút értéket, a $+C^2$, illetve $-C^2$ állandókat $C_1$-gyel jelölve ($C_1 \in \mathbf{R}$) és rendezve az egyenletet kapjuk a

$$C_1(x^3 - 2y^3) = x, \quad C_1 \in \mathbf{R}$$

általános megoldást. Az $y(1) = 1$ kezdeti feltételt teljesítő megoldásra igaz, hogy $x = 1$ esetén $y = 1$ is teljesül. Ekkor

$$C_1(1^3 - 2 \cdot 1^3) = 1,$$

ahonnan $C_1 = -1$ és a keresett partikuláris megoldás

$$2y^3 - x^3 = x.$$

**5.** Oldjuk meg az $(xy' - y)\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = x$, $y(1) = 0$ kezdetiérték-problémát, ha $x \neq 0$.

**Megoldás.** Fejezzük ki az adott egyenletből az ismeretlen függvény deriváltját. Ha $y \neq 0$, akkor

$$xy' - y = \frac{x}{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}, \quad \text{azaz} \quad y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}.$$

Megállapíthatjuk, hogy a kapott egyenlet elsőrendű változóiban homogén differenciálegyenlet, ezért bevezetjük a $t = \dfrac{y}{x}$ helyettesítést ahonnan $y' = t + xt'$. Behelyettesítés után a

$$t + xt' = t + \frac{1}{\operatorname{arctg} t}$$

szétválasztható változójú differenciálegyenletet kapjuk, amely a változók szétválasztása után az

$$\operatorname{arctg} t dt = \frac{1}{x}dx$$

alakra hozható. Integrálva a fenti egyenlet mindkét oldalát kapjuk, hogy

$$\int \operatorname{arctg} t dt = \int \frac{1}{x}dx.$$

A bal oldali integrál parciális integrálással oldható meg. Legyen $u = \operatorname{arctg} t$ és $dv = dt$, ahonnan $du = \dfrac{dt}{1+t^2}$ és $v = t$. Ebből következik, hogy

$$t\operatorname{arctg} t - \int \frac{t}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{x}dx.$$

Vezessük be a baloldali integrálban az $1 + t^2 = z$ helyettesítést, amiből $2tdt = dz$, illetve $tdt = \dfrac{dt}{2}$. Ebből

$$t\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = \ln|x| + \ln C, \quad C > 0,$$

$$t\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln|z| = \ln|x| + \ln C, \quad C > 0,$$

illetve

$$t\operatorname{arctg} t = \ln C|x|\sqrt{1+t^2}, \quad C > 0.$$

Visszatérve az eredeti változókra kapjuk az

$$\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln C|x|\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}, \quad C > 0$$

illetve más alakban az

$$y\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = x\ln C\sqrt{x^2+y^2}, \quad C > 0$$

alakú általános megoldást. Egy megoldás teljesíti az $y(1) = 0$ feltételt, ha igaz, hogy

$$0 \cdot \operatorname{arctg}\frac{0}{1} = 1 \cdot \ln C\sqrt{1^2+0^2},$$

ahonnan $\ln C = 0$ és $C = 1$. A keresett megoldás tehát

$$y\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = x\ln\sqrt{x^2+y^2}.$$

### 6.2.3. Elsőrendű lineáris differenciálegyenlet

**6.9. Definíció.** *Az*

$$y' + p(x)y = q(x)$$

*alakú differenciálegyenletet, ahol $p$ és $q$ az $x$ független változótól függő adott folytonos függvények, elsőrendű lineáris differenciálegyenletnek nevezzük.*

Az egyenlet megoldását $y = uv$ szorzatalakban keressük, ahol $u = u(x)$ és $v = v(x)$ ismeretlen függvények. Ekkor az $y' = u'v + uv'$ kifejezést behelyettesítve a lineáris differenciálegyenletbe adódik, hogy

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x),$$

illetve

$$u'v + u(p(x)v + v') = q(x). \tag{6.4}$$

Határozzuk meg a $v$ függvényt úgy, hogy igaz legyen a $p(x)v + v' = 0$ egyenlőség, vagyis $\frac{dv}{v} = -p(x)dx$. A jobb és bal oldal integrálásával adódik, hogy

$$\ln v = -\int p(x)dx, \quad \text{azaz} \quad v = e^{-\int p(x)dx}.$$

Ha a $v$-t visszahelyettesítjük (6.4)-be, akkor az

$$u'e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

egyenletet kapjuk, amiből integrálás után

$$u = C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

adódik, ahol $C$ tetszőleges állandó. Ennek alapján az $y' + p(x)y = q(x)$ elsőrendű lineáris differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right).$$

**FELADATOK.**

**1.** Mutassuk meg, hogy az $(y\sin x - 1)dx + \cos x dy = 0$ egyenlet lineáris elsőrendű differenciálegyenlet, majd a képlet alapján határozzuk meg azt a partikuláris megoldást, amely kielégíti az $y(0) = 0$ kezdeti feltételt.

**Megoldás.** Rendezzük az egyenletet a következő módon:

$$\cos x dy = (1 - y\sin x)dx,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}y, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$$

$$y' + \operatorname{tg} x y = \frac{1}{\cos x}.$$

A fenti alakból már valóban egyértelmű, hogy lineáris elsőrendű differenciálegyenletről van szó, amelyben $p(x) = \operatorname{tg} x$ és $q(x) = \dfrac{1}{\cos x}$. Ha az általános megoldást

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)$$

képlettel keressük, akkor két integrált kell kiszámítanunk. Ezek közül az egyik:

$$\int p(x)dx = \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \left|\begin{array}{c}\cos x = t\\ -\sin x dx = dt\end{array}\right| = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|\cos x|.$$

A másik integrált a kapott primitív függvény segítségével számoljuk ki. Eszerint:

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx = \int \frac{1}{\cos x}e^{\ln\left|\frac{1}{\cos x}\right|}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C.$$

Az általános megoldás tehát

$$y = e^{\ln|\cos x|}\,(C + \operatorname{tg} x) = \cos x\,(C + \operatorname{tg} x) = C\cos x + \sin x.$$

Az $y(0) = 0$ kezdeti feltételt teljesítő megoldásra teljesül, hogy ha $x = 0$ teljesül, akkor $y = 0$-nak is teljesülnie kell, azaz

$$0 = C\cos 0 + \sin 0, \quad \text{ahonnan} \quad C = 0,$$

vagyis a keresett partikuláris megoldás az $y = \sin x$ függvény.

**2.** Oldjuk meg az $x^2y' + xy + 1 = 0$ lineáris elsőrendű differenciálegyenletet.

**Megoldás.** Osszuk el az adott egyenletet $x^2$-tel és rendezzük a következő alakra:

$$y' + \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0.$$

Keressük a megoldást $y = uv$ szorzat alakban, ahol $u = u(x)$, $v = v(x)$ és ahonnan $y' = u'v + uv'$. Ekkor

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = -\frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0.$$

Emeljünk ki $u$-t a bal oldal második és harmadik tagjából, így

$$u'v + u\left(v' + \frac{1}{x}v\right) = -\frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0.$$

Válasszuk meg a $v$ tényezőt úgy, hogy a bal oldalon a zárójelben levő kifejezés nulla legyen, azaz teljesüljön a

$$v' + \frac{1}{x}v = 0$$

egyenlőség. Innen a változók szétválasztása után

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$$

adódik, ahonnan a két oldal integrálásával kapjuk, hogy $\ln|v| = -\ln|x|$, illetve $v = \frac{1}{x}$. Visszahelyettesítés után az

$$u'v + u \cdot 0 = -\frac{1}{x^2}$$

egyenletet kapjuk, ahonnan

$$u' = -\frac{1}{x}, \quad \text{illetve} \quad du = -\frac{dx}{x}.$$

Mindkét oldal integrálásával az

$$u = -\ln|x| + C$$

megoldás adódik. Az általános megoldás

$$y = uv = \frac{1}{x}\left(C - \ln|x|\right), \quad \text{azaz} \quad y = \frac{C}{x} - \frac{\ln|x|}{x}.$$

**3.** Határozzuk meg az $xy' + y = \ln x + 1$, $y(1) = 0$ kezdetiérték-probléma megoldását.

**Megoldás.** Elosztva az egyenlet mindkét oldalát $x$-szel egyértelművé válik, hogy lineáris elsőrendű differenciálegyenletet kell megoldani, amelynek alakja

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1 + \ln x}{x}, \quad x > 0.$$

Keressük a megoldást $y = uv$ szorzat alakban, ahol $u = u(x)$, $v = v(x)$ és ahonnan $y' = u'v + uv'$. Ekkor

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = \frac{1 + \ln x}{x}.$$

Emeljünk ki $u$-t a bal oldal második és harmadik tagjából, így

$$u'v + u\left(v' + \frac{1}{x}\right)v = \frac{1 + \ln x}{x}.$$

Válasszuk meg a $v$ tényezőt úgy, hogy a $v' + \frac{1}{x}$ kifejezés nulla legyen. Ha $v' + \frac{1}{x} = 0$, akkor $\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$ és $v = \frac{1}{x}$. Az eredeti egyenlet tehát

$$u'\frac{1}{x} = \frac{1 + \ln x}{x}$$

alakú, ahonnan $du = (1 + \ln x)dx$. Mindkét oldal integrálásával kapjuk a

$$\int du = \int (1 + \ln x)dx$$

egyenletet, ahonnan

$$u = x + \int \ln x dx.$$

Mivel $\int \ln x dx$ parciális integrálással oldható meg oly módon, hogy bevezetjük az $U = \ln x$, $dV = dx$ helyettesítést, ahonnan $dU = \frac{1}{x}dx$ és $V = x$, és ebből

$$u = x + \left(x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx\right),$$

$$u = x + x \ln x - x + C, \quad \text{azaz} \quad u = x \ln x + C.$$

Így az általános megoldás

$$y = uv = \frac{1}{x}(x \ln x + C), \quad \text{azaz} \quad y = \frac{C}{x} + \ln x.$$

A keresett partikuláris megoldáshoz tartozó $C$ állandó pedig az $y(1) = 0$ kezdeti feltétel segítségével a

$$0 = \frac{C}{1} + \ln 1$$

egyenletből határozható meg. Innen $C = 0$, vagyis a kezdetiérték-probléma megoldása

$$y = \ln x.$$

**4.** Határozzuk meg az $y' + y \operatorname{ctg} x = 5e^{\cos x}$ differenciálegyenlet $\left(\frac{\pi}{2}, -4\right)$ ponton áthaladó partikuláris megoldását, ha $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

**Megoldás.** Először az általános megoldást kell meghatározni. Mivel az adott egyenlet elsőrendű lineáris differenciálegyenlet, ezért keressük a megoldást $y = uv$ szorzat alakban, ahol $u = u(x)$, $v = v(x)$ és ahonnan $y' = u'v + uv'$, rendezés után az egyenlet alakja

$$u'v + u(v' + v\operatorname{ctg} x) = 5e^{\cos x}.$$

Egyenlítsük ki a zárójelben levő kifejezést nullával. Ekkor

$$v' + v\operatorname{ctg} x = 0 \quad \text{és} \quad u'v = 5e^{\cos x}.$$

Az első egyenletből meghatározzuk $v$-t, majd felhasználásával a második egyenletből határozzuk meg az $u$ függvényt, s ezzel az $y$ függvény is adott lesz. Az első egyenlet egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet, amely rendezés után

$$\frac{dv}{v} = -\operatorname{ctg} x dx$$

alakra hozható. Integráljuk az egyenlet mindkét oldalát. Ekkor

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \operatorname{ctg} x dx$$

innen pedig

$$\ln|v| = -\ln|\sin x| \quad \text{illetve} \quad |v| = |\sin x|^{-1}.$$

Ekkor

$$v = \frac{1}{\sin x}.$$

A második egyenlet most az

$$\frac{u'}{\sin x} = 5e^{\cos x}$$

alakot veszi fel, amely szintén egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet. Rendezés után kapjuk, hogy

$$du = 5e^{\cos x} \sin x dx,$$

ahonnan mindkét oldal integrálásával adódik, hogy

$$\int du = 5\int e^{\cos x} \sin x dx.$$

A jobboldalon alkalmazzuk a $\cos x = t$ helyettesítést, ahonnan $-\sin x dx = dt$. Ekkor

$$u = -5e^{\cos x} + C.$$

Az általános megoldást az $y = uv$ képletbe való visszahelyettesítés után kapjuk, és eszerint

$$y = \frac{C - 5e^{\cos x}}{\sin x}.$$

Hogy a megoldás áthaladjon a $\left(\frac{\pi}{2}, -4\right)$ ponton, teljesülnie kell a

$$-4 = \frac{c - 5e^{\cos\frac{\pi}{2}}}{\sin\frac{\pi}{2}}, \quad \text{illetve} \quad -4 = \frac{C - 5\cdot e^0}{1}$$

egyenlőségnek, ahonnan $C = 1$, a keresett partikuláris megoldás pedig

$$y = \frac{1 - 5e^{\cos x}}{\sin x}.$$

**5.** Határozzuk meg az $(1-x^2)y' + xy - 1 = 0$ differenciálegyenlet olyan partikuláris megoldását, amely áthalad a $(0,1)$ ponton.

**Megoldás.** Ha $x \neq 1$ és $x \neq -1$ akkor osszuk az adott egyenletet $(1-x^2)$-tel. Ekkor az

$$y' + \frac{x}{1-x^2}y = \frac{1}{1-x^2}$$

lineáris elsőfokú differenciálegyenletet kapjuk. Keressük a megoldást $y = uv$ szorzat alakban, ahol $u = u(x)$, $v = v(x)$ és ahonnan $y' = u'v + uv'$. Ekkor

$$u'v + uv' + \frac{x}{1-x^2}uv = \frac{1}{1-x^2}.$$

Emeljünk ki $u$-t a bal oldal második és harmadik tagjából, így

$$u'v + u\left(v' + \frac{x}{1-x^2}v\right) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Válasszuk meg a $v$ tényezőt úgy, hogy a $v' + \dfrac{x}{1-x^2}v$ kifejezés nulla legyen. Ha $v' + \dfrac{x}{1-x^2}v = 0$, akkor a változók szétválasztása után

$$\frac{dv}{v} = -\frac{xdx}{1-x^2}.$$

Integrájuk a fenti egyenlet mindkét oldalát. Ekkor

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{xdx}{1-x^2}.$$

A jobb oldalon alkalmazzuk az $1-x^2 = t$ helyettesítést, ahonnan $-2xdx = dt$ és $-xdx = \dfrac{dt}{2}$. Ekkor

$$\ln|v| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t},$$

amiből

$$\ln|v| = \frac{1}{2}\ln|t|, \quad \text{azaz} \quad v = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in (-1,1).$$

Ha visszahelyettesítünk a megfelelő egyenletbe, akkor az

$$u'\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

egyenletet kapunk, amelyből

$$\int du = \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

A jobb oldalon egy irracionális függvény integrálját kell meghatározni, melyet az $x = \sin t$, $dx = \cos x dx$ helyettesítéssel tudunk megoldani. Ekkor

$$u = \int \frac{\cos t dt}{(1-\sin^2 t)\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int \frac{\cos t dt}{\cos^2 t \cdot \cos t} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C.$$

Mivel $\operatorname{tg} t = \dfrac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}$ az $x$ változóra való visszatéréssel adódik, hogy

$$u = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Az adott differenciálegyenlet általános megoldása tehát

$$y = uv = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C\right)\sqrt{1-x^2},$$

illetve

$$y = x + C\sqrt{1-x^2}.$$

A keresett partikuláris megoldásra teljesül, hogy $x = 0$ esetés $y = 1$, vagyis

$$1 = 0 + C\sqrt{1-0^2},$$

ahonnan $C = 1$. A keresett partikuláris megoldás tehát az

$$y = x + \sqrt{1-x^2}$$

függvény.

### 6.2.4. Bernoulli-féle differenciálegyenlet

**6.10. Definíció.** *Legyen $k$ olyan valós szám, hogy $k \neq 0$ és $k \neq 1$. Az*

$$y' + p(x)y = q(x)y^k$$

*alakú differenciálegyenletet, ahol $p$ és $q$ az $x$ független változótól függő adott folytonos függvények, Bernoulli-féle vagy Bernoulli-típusú differenciálegyenletnek nevezzük.*

A Bernoulli-féle differenciálegyenletet lineáris differenciálegyenletre való visszavezetéssel szokás megoldani. Szorozzuk be e célból a Bernoulli-típusú differenciálegyenlet mindkét oldalát $y^{-k}$-val. Beszorzás után az

$$y^{-k}y' + p(x)y^{1-k} = q(x)$$

alakú differenciálegyenletet kapjuk. Vezessük be a $z = z(x) = y^{1-k}(x)$ helyettesítést, ahonnan $z' = (1-k)y^{-k}y'$. Szorozzuk be a fenti egyenlet mindkét oldalát $(1-k)$-val. A behelyettesítés után a Bernoulli-típusú differenciálegyenlet átalkul

$$z' + (1-k)p(x)z = (1-k)q(x),$$

illetve $P(x) = (1-k)p(x)$ és $Q(x) = (1-k)q(x)$ jelöléssel

$$z' + P(x)z = Q(x)$$

alakú lineáris differenciálegyenletté, ahol $z = z(x)$ az új ismeretlen függvény.
A lineáris differenciálegyenletekhez hasonlóan a Bernoulli-típusú differenciálegyenlet megoldását is kereshetjük $y = uv$ szorzat alakban, ahol $u = u(x)$ és $v = v(x)$.

**FELADATOK.**

**1.** Határozzuk meg az $y' - y = xy^5$ differenciálegyenlet általános megoldását.

**I.Megoldás.** Az egyenlet egy Bernoulli-típusú differenciálegyenlet, amelyet egy elsőrendű lineáris differenciálegyenletre szeretnénk visszavezetni, ezért mindkét oldalát megszorozzuk $y^{-5}$-nel. Ekkor az

$$y'y^{-5} - y^{1-5} = xy^{5-5}, \quad \text{illetve} \quad y'y^{-5} - y \cdot y^{-4} = x$$

egyenletet kapjuk. Bevezetve a $z = y^{-4}$ helyettesítést, ahonnan $z' = -4y'y^{-5}$, és beszorozva az egyenlet mindkét oldalát $-4$-gyel a

$$z' + 4z = -4x$$

lineáris differenciálegyenletet kapjuk, ahol $z = z(x)$ az új ismeretlen függvény. Most a megoldást $z = uv$ szorzat alakban keresve, ahonnan $z' = u'v + uv'$, a fenti egyenlet átalakul és a továbbiakban az

$$u'v + uv' + 4uv = -4x,$$

illetve

$$u'v + u(v' + 4v) = -4x$$

differenciálegyenletet tekintjük. A $v$ függvényt a

$$v' + 4v = 0$$

egyenletből, az $u$ függvényt pedig az

$$u'v = -4x$$

egyenletből határozzuk meg.

Mindkét differenciálegyenlet szétválasztható változójú és a szokásos módon oldjuk meg őket. A változók szétválasztása után az első egyenletből

$$\frac{dv}{v} = -4dx$$

adódik, amely a két oldal integrálása után az

$$\int \frac{dv}{v} = -4 \int dx,$$

illetve

$$\ln|v| = -4x, \quad \text{azaz} \quad v = e^{-4x}$$

megoldáshoz vezet. Az $u'v = -4x$ egyenlet a $v$ behelyettesítése után az

$$u'e^{-4x} = -4x$$

differenciálegyenlethez vezet. A változók szétválasztása után

$$du = -4xe^{4x}dx,$$

a jobboldalt parciálisan integrálva az

$$u = C - xe^{4x} + \frac{1}{4}e^{4x}dx$$

megoldást adja. A lineáris differenciálegyenlet általános megoldása

$$z = Ce^{-4x} - x + \frac{1}{4},$$

a Bernoulli-egyenlet általános megoldása pedig a visszahelyettesítés után

$$y^{-4} = Ce^{-4x} - x + \frac{1}{4},$$

azaz

$$y = \pm\sqrt[4]{\frac{4}{4Ce^{-4x} - 4x + 1}}.$$

**II.Megoldás.** Keressük most az ismeretlen függvényt $y = uv$ szorzat alakban, ahol $u = u(x)$ és $v = v(x)$. Ekkor $y = u'v + uv'$ és a differenciálegyenletbe való helyettesítés után az

$$u'v + uv' - uv = xu^5v^5, \quad \text{illetve} \quad u'v + u(v' - v) = xu^5v^5$$

egyenlet adódik. Határozzuk meg a $v$ függvényt a

$$v' - v = 0$$

szétválasztható változójú differenciálegyenlet megoldásával. Ekkor

$$\int \frac{dv}{v} = \int dx, \quad \text{ahonnan} \quad \ln|v| = x, \quad \text{azaz} \quad v = e^x.$$

Ekkor

$$u' \cdot e^x = x \cdot e^{5x} \cdot u^5,$$

szintén szétválasztható változójú differenciálegyenlet, amely a változók szétválasztása után

$$\frac{du}{u^5} = xe^{4x}dx$$

alakú, mindkét integrálása után pedig

$$\int u^{-5}du = \int xe^{4x}dx,$$

ahonnan a jobboldali integrált parciálisan megoldva az

$$\frac{u^{-4}}{-4} = \frac{1}{4}xe^{4x} - \frac{1}{4}e^{4x} - \frac{C}{4},$$

illetve rendezés után az

$$\frac{1}{u^4} = -xe^{4x} + \frac{1}{4}e^{4x} + C$$

megoldásfüggvény adódik. Explicit alakban kifejezve

$$u = \pm \sqrt[4]{\frac{4}{e^{4x}\left(1 - 4x + 4Ce^{-4x}\right)}}.$$

Így $y = uv$ miatt

$$y = \pm e^x \cdot \frac{1}{e^x} \cdot \sqrt[4]{\frac{4}{1 - 4x + 4Ce^{-4x}}}, \quad \text{azaz} \quad y = \pm \sqrt[4]{\frac{4}{1 - 4x + 4Ce^{-4x}}}.$$

**2.** Határozzuk meg az $2xyy' = y^2 - 2x^3$ differenciálegyenlet $y(1) = 2$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldását.

**Megoldás.** Mutassuk meg, hogy az egyenlet Bernoulli-típusú. Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát $2xy$-nal ($xy \neq 0$). Ekkor

$$y' = \frac{1}{2x}y - \frac{x^2}{y},$$

rendezés után pedig

$$y' - \frac{1}{2x}y = -x^2y^{-1},$$

tehát a differenciálegyenlet $k = -1$ értékkel Bernoulli-féle. Szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát $y$-nal. Most

$$yy' - \frac{1}{2x}y^2 = -x^2.$$

Vezessük be az $y^2 = z$, $2yy' = z'$ helyettesítést. Az egyenlet mindkét oldalának 2-vel való beszorzása és a behelyettesítés után a

$$2yy' - \frac{1}{x}y^2 = -2x^2,$$

illetve

$$z' - \frac{1}{x}z = -2x^2$$

lineáris differenciálegyenletet kapjuk. A képlet alapján két integrált kell kiszámítanunk. Az első:

$$\int p(x)dx = \int \frac{dx}{x} = -\ln|x|.$$

A másik az előző felhasználásával

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx = -2\int x^2e^{-\ln|x|}dx = -2\int x^2 \cdot \frac{1}{x}dx = -2\int xdx = -x^2 + C.$$

Ekkor a lineáris differenciálegyenlet általános megoldása

$$z = x(C - x^2),$$

a Bernoulli-féle differenciálegyenlet általános megoldása pedig

$$y^2 = x(C - x^2), \quad \text{ahonnan} \quad y = \pm\sqrt{x(C - x^2)}.$$

A $C$ állandó értékét a kezdeti feltételből számítjuk ki, ahonnan

$$2 = +\sqrt{1 \cdot (C - 1^2)}, \quad \text{illetve} \quad C = 5.$$

A keresett partikuláris megoldás eszerint

$$y = \sqrt{x(5 - x^2)}.$$

**3.** Határozzuk meg az $(x^2 - 1)dy - y(2x - 3y)dx = 0$ differenciálegyenlet olyan partikuláris megoldását, amelyre $y(2) = 1$ teljesül.

**Megoldás.** Rendezzük a differenciálegyenletet. Ekkor

$$(x^2 - 1)dy = y(2x - 3y)dx,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy - 3y^2}{x^2 - 1}, \quad x \neq \pm 1,$$

$$y' - \frac{2x}{x^2 - 1}y = -\frac{3y^2}{x^2 - 1}.$$

Innen megállapítható, hogy az egyenlet Bernoulli-típusú. Keressük a megoldást $y = uv$ szorzat alakban, ahol $u = u(x)$ és $v = v(x)$. Ekkor $y = u'v + uv'$ és a differenciálegyenletbe való helyettesítés után az

$$u'v + uv' - \frac{2x}{x^2 - 1}uv = -\frac{3u^2v^2}{x^2 - 1},$$

illetve

$$u'v + u\left(v' - \frac{2x}{x^2 - 1}v\right) = -\frac{3u^2v^2}{x^2 - 1}.$$

Határozzuk meg a $v$ függvényt a

$$v' - \frac{2x}{x^2 - 1}v = 0$$

egyenletből. A változók szétválasztása és mindkét oldal integrálásával kapjuk, hogy

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{2xdx}{x^2 - 1}.$$

A jobb oldali integrálban vezessük be az $x^2 - 1 = t$, $2xdx = dt$ helyettesítést. Ekkor

$$\ln |v| = \int \frac{dt}{t}, \quad \text{azaz} \quad \ln |v| = \ln |t|.$$

Ebből $v = t$, azaz $v = x^2 - 1$. Visszahelyettesítve adódik az

$$u'(x^2 - 1) = -\frac{3u^2(x^2 - 1)^2}{x^2 - 1}, \quad \text{azaz} \quad u' = -3u^2$$

szétválasztható változójú differenciálegyenlet, amelynek megoldása a változók szétválasztása és integrálás után

$$\int \frac{du}{u^2} = -3\int dx,$$

illetve

$$-\frac{1}{u} = C - 3x, \quad \text{vagyis} \quad u = \frac{1}{3x - C}.$$

A Bernoulli-féle egyenlet általános megoldása $y = uv$ alapján

$$y = \frac{1}{3x - C} \cdot (x^2 - 1) = \frac{x^2 - 1}{3x - C}.$$

A keresett partikuláris megoldásra igaz, hogy $x = 2$ esetén $y = 1$, ezért

$$1 = \frac{4 - 1}{6 - C},$$

vagyis $C = 3$, ezért

$$y = \frac{x^2 - 1}{3x - 3}, \quad \text{ahonnan} \quad y = \frac{x + 1}{3}, \quad x \neq 1.$$

**4.** Oldjuk meg az $xy' + y = \dfrac{\ln x}{y^3}$ differenciálegyenletet, ha $x > 0$ és $y \neq 0$.

**Megoldás.** Az egyenlet

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln x}{xy^3}$$

alakra hozható, tehát Bernoulli-típusú. Keressük a megoldást $y = uv$ szorzat alakban, ahol $u = u(x)$ és $v = v(x)$. Ekkor $y = u'v + uv'$ és a differenciálegyenletbe való helyettesítés után az

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = \frac{\ln x}{xu^3v^3},$$

illetve

$$u'v + u\left(v' - \frac{1}{x}v\right) = \frac{\ln x}{xu^3v^3}.$$

Határozzuk meg a $v$ függvényt a

$$v' - \frac{1}{x}v = 0$$

egyenletből. A változók szétválasztása és mindkét oldal integrálásával kapjuk, hogy

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \quad \text{ahonnan} \quad v = \frac{1}{x}.$$

Visszahelyettesítés után adódik az

$$u' \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x \cdot u^3 \cdot \frac{1}{x^3}}, \quad \text{azaz} \quad u' = \frac{x^3 \ln x}{u^3}$$

szétválasztható változójú differenciálegyenlet. A változók szétválasztásával és mindkét oldal integrálásával adódik, hogy

$$\int u^3 du = \int x^3 \ln x dx,$$

illetve

$$\frac{u^4}{4} = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{C}{4}.$$

A jobboldali integrált a parciális integrálás módszerével oldottuk meg. Rendezés után kapjuk, hogy

$$u^4 = x^4\left(\ln x - \frac{1}{4} + \frac{C}{x^4}\right), \quad \text{azaz} \quad u = \pm x\sqrt[4]{\ln x - \frac{1}{4} + \frac{C}{x^4}}.$$

A Bernoulli-féle egyenlet általános megoldása

$$y = \pm\sqrt[4]{\ln x - \frac{1}{4} + \frac{C}{x^4}}.$$

**5.** Határozzuk meg az $3y' + y\text{ctg}\,x = \dfrac{1+\text{ctg}\,x}{y^2\cos x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 0$ kezdetiérték-probléma megoldását, ha $y \neq 0$ és $x \neq k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

**Megoldás.** Mivel a differenciálegyenlet Bernoulli-típusú, ezért szorozzuk be mindkét oldalát $y^2$-tel. Ekkor

$$y^2y' + y^3\text{ctg}\,x = \frac{1+\text{ctg}\,x}{\cos x}.$$

Bevezetve a $z = y^3$ helyettesítést, ahonnan $z' = 3y'y^2$, a

$$3y^2y' + y^3\text{ctg}\,x = \frac{1+\text{ctg}\,x}{\cos x},$$

illetve

$$z' + z\text{ctg}\,x = \frac{1+\text{ctg}\,x}{\cos x}$$

lineáris differenciálegyenletet kapjuk, ahol $z = z(x)$ az új ismeretlen függvény. Most a megoldást $z = uv$ szorzat alakban keresve, ahonnan $z' = u'v + uv'$, a fenti egyenlet átalakul, és a továbbiakban az

$$u'v + uv' + uv\text{ctg}\,x = \frac{1+\text{ctg}\,x}{\cos x},$$

illetve

$$u'v + u\left(v' + v\text{ctg}\,x\right) = \frac{1+\text{ctg}\,x}{\cos x}$$

egyenlettel foglalkozunk. Határozzuk meg a $v$ függvényt a

$$v' + v\text{ctg}\,x = 0$$

szétválasztható változójú differenciálegyenlet megoldásával. Ekkor

$$\int\frac{dv}{v} = -\int\frac{\cos x}{\sin x}dx, \quad \text{ahonnan} \quad \ln|v| = -\ln|\sin x|, \quad \text{azaz} \quad v = \frac{1}{\sin x}.$$

Ekkor

$$u'\cdot\frac{1}{\sin x} = \frac{1+\text{ctg}\,x}{\cos x}$$

szintén szétválasztható változójú differenciálegyenlet, amely a változók szétválasztása után

$$du = (1 + \operatorname{tg} x)dx$$

alakú, mindkét oldal integrálásával pedig megkapjuk az

$$u = x - \ln|\cos x| + C$$

megoldást. $z = uv$ alapján

$$z = \frac{1}{\sin x}\left(x - \ln|\cos x| + C\right).$$

Visszahelyettesítve, az eredeti ismeretlen függvény

$$y = \sqrt[3]{z}, \quad \text{vagyis} \quad y = \sqrt[3]{\frac{x - \ln|\cos x| + C}{\sin x}}.$$

## 6.3. Másodrendű differenciálegyenlet

### 6.3.1. Másodrendű lineáris differenciálegyenlet

**6.11. Definíció.** *Legyenek $P$, $Q$ és $f$ az $x$ változótól függő folytonos függvények az $[a, b]$ intervallumon. Ekkor az*

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

*alakú differenciálegyenletet másodrendű lineáris differenciálegyenletnek nevezzük.*

Speciálisan, ha a fenti egyenletben $f(x) \equiv 0$, az így kapott

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

egyenletet homogén másodrendű lineáris differenciálegyenletnek nevezzük.
A homogén másodrendű lineáris differenciálegyenlet megoldásának meghatározásában fontos szerepet játszik a függvények lineáris függetlenségének fogalma.

**6.12. Definíció.** *Az $f_1$, $f_2$, ..., $f_n$ $x$ változójú valós függvények, amelyek a valós számok halmazának egy $[a, b]$ intervallumán értelmezettek, lineárisan függetlenek a valós számok halmaza felett, ha az*

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + ... + \alpha_n f_n(x) = 0, \quad x \in [a, b]\ ,$$

*egyenletnek ($\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbf{R}$) $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ az egyetlen megoldása. Azokat a függvényeket, amelyek nem lineárisan függetlenek, lineárisan összefüggőeknek nevezzük.*

Két lineárisan összefüggő $f_1$ és $f_2$ függvény esetén

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = 0$$

úgy, hogy $\alpha_1 \neq 0$ vagy $\alpha_2 \neq 0$. Ekkor felírható, hogy

$$f_1(x) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} f_2(x) \quad \text{vagy} \quad f_2(x) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} f_1(x),$$

ami azt jelenti, hogy két függvény akkor és csakis akkor lineárisan összefüggő, ha az egyik felírható a másik függvény konstansszorosaként.

A homogén másodrendű lineáris differenciálegyenlethez tartozó $y_1(x)$ és $y_2(x)$ megoldásfüggvények lineáris függetlenségének meghatározásához a Wronski-féle determinánst használjuk:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Érvényesek a következő állítások.

**6.1. Tétel.** *Legyen $[a,b]$ a valós számok halmazának egy intervalluma. A következő állítások egymással ekvivalensek:*

**a)** *Minden $x \in [a,b]$ esetén érvényes, hogy $W(x) \neq 0$;*

**b)** *Az $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ egyenlet $y_1(x)$, $y_2(x)$, $x \in [a,b]$ megoldásai lineárisan függetlenek.*

**6.2. Tétel.** *Legyenek $y_1$ és $y_2$ az $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ egyenlet lineárisan független megoldásai az $[a,b]$ intervallumon. Ekkor az egyenlet általános megoldása az adott intervallumon*

$$y = C_1y_1 + C_2y_2,$$

*ahol $C_1$ és $C_2$ tetszőleges állandók.*

### 6.3.2. Állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet

**6.13. Definíció.** *Az*

$$y'' + py' + qy = 0, \quad p, q \in \mathbf{R}$$

*alakú differenciálegyenletet állandó együtthatós homogén másodrendű lineáris differenciálegyenletnek nevezzük.*

Az állandó együtthatós homogén másodrendű lineáris differenciálegyenlet megoldását most $y = e^{kx}$ exponenciális alakban keressük, ahol $k$ állandó. Mivel $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$, a differenciálegyenletbe való behelyettesítéssel adódik, hogy $e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$. Ebből az egyenletből kapjuk a

$$k^2 + pk + q = 0$$

egyenletet, melyet az $y'' + py' + qy = 0$ állandó együtthatós homogén másodrendű lineáris differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének nevezünk, és megoldásainak természetéből adódóan három esetet különböztetünk meg.

**a)** Legyen $p^2 - 4q > 0$. Ekkor a karakterisztikus egyenlet $k_1$ és $k_2$ megoldásai valósak és különbözőek, tehát az $y_1 = e^{k_1x}$ és $y_2 = e^{k_2x}$ függvények az $y'' + py' + qy = 0$ differenciálegyenlet megoldásai. Mivel a Wronski-féle determináns

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} \end{vmatrix} = e^{(k_1+k_2)x}(k_2 - k_1) \neq 0 \ ,$$

a kapott megoldások lineárisan függetlenek, így az $y''+py'+qy = 0$ differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$$

alakú, ahol $C_1$ és $C_2$ tetszőleges állandók.

**b)** Legyen $p^2 - 4q = 0$. Ekkor a karakterisztikus egyenlet $k_1$ és $k_2$ megoldásai valósak és egyenlőek. $y_1 = e^{k_1 x}$ az egyik megoldás és közvetlen behelyettesítéssel ellenőrizzük, hogy $y_2 = xe^{k_1 x}$ is megoldása az $y'' + py' + qy = 0$ differenciálegyenletnek. Ekkor az $y_1$ és $y_2$ lineárisan független partikuláris megoldások, az általános megoldás pedig

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}, \quad \text{illetve} \quad y = (C_1 + C_2 x)e^{k_1 x},$$

ahol $C_1$ i $C_2$ tetszőleges állandók.

**c)** Legyen $p^2 - 4q < 0$. Ekkor a karakterisztikus egyenlet $k_1$ és $k_2$ megoldásai konjugált komplex számok, tehát felírhatók $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$ alakban, ahol $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Az Euler-formula alapján

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x,$$

ami azt sugallja, hogy $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ és $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ az $y'' + py' + qy = 0$ differenciálegyenlet megoldásai. Könnyen belátható, hogy ez valóban így van, mint ahogy az is, hogy ezek a megoldások lineárisan függetlenek. Az általános megoldás

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x),$$

ahol $C_1$ i $C_2$ tetszőleges állandók.

## FELADATOK.

**1.** Határozzuk meg az $y'' - 5y' + 6y = 0$ másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenlet általános megoldását.

**Megoldás.** Keressük a megoldást $y = e^{kx}$ exponenciális alakban, ahol $k$ állandó. Mivel $y' = ke^{kx}$ és $y'' = k^2 e^{kx}$, a differenciálegyenletbe való behelyettesítéssel adódik, hogy

$$k^2 e^{kx} - 5ke^{kx} + 6e^{kx} = 0, \quad \text{illetve} \quad e^{kx}(k^2 - 5k + 6) = 0.$$

Mivel $e^{kx} \neq 0$, ezért a fenti szorzat másik tényezője kell nulla legyen, így kapjuk a

$$k^2 - 5k + 6 = 0$$

karakterisztikus egyenletet, amelynek megoldásai $k_1 = 2$ és $k_2 = 3$. Ezért $y_1 = e^{2x}$ és $y_2 = e^{3x}$ az $y'' - 5y' + 6y = 0$ egyenlet lineárisan független partikuláris megoldásai. A 6.2. Tétel alapján a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x},$$

ahol $C_1$ és $C_2$ tetszőleges állandók.

**2.** Határozzuk meg az $y'' - 6y' + 9y = 0$ differenciálegyenlet olyan megoldását, amely kielégíti az $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ kezdeti feltételeket.

**Megoldás.** Keressük a megoldást $y = e^{kx}$ exponenciális alakban, ahol $k$ állandó. Ekkor $y' = ke^{kx}$ és $y'' = k^2 e^{kx}$. A differenciálegyenletbe való behelyettesítás után

$$k^2 e^{kx} - 6ke^{kx} + 9e^{kx} = 0, \quad \text{illetve} \quad e^{kx}(k^2 - 6k + 9) = 0$$

adódik, s mivel $e^{kx} \neq 0$, ezért a fenti szorzat másik tényezője kell nulla legyen, így kapjuk a

$$k^2 - 6k + 9 = 0$$

karakterisztikus egyenletet, amelynek megoldásai $k_1 = k_2 = 3$. A keresett lineárisan független partikuláris megoldások most $y_1 = e^{3x}$ és $y_2 = xe^{3x}$, az általános megoldás pedig

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}, \quad \text{azaz} \quad y = (C_1 + C_2 x)\, e^{3x},$$

ahol $C_1$ és $C_2$ tetszőleges állandók.
A keresett partikuláris megoldás ki kell elégítse az $y(0) = 1$ és $y'(0) = 2$ feltételeket. Mivel

$$y' = (C_2 + 3C_1 + 3C_2 x)\, e^{3x},$$

$C_1$ és $C_2$ meghatározásához a

$$C_1 e^{3\cdot 0} + C_2 \cdot 0 \cdot e^{3\cdot 0} = 1, \quad (C_2 + 3C_1 + 3C_2 \cdot 0)\, e^{3\cdot 0} = 2$$

két egyenletből álló kétismeretlenes lineáris egyenletrendszert kell megoldani. Ebből

$$C_1 = 1 \quad \text{és} \quad C_2 + 3C_1 = 2,$$

vagyis a megoldás $C_1 = 1$ és $C_2 = -1$, a keresett partikuláris megoldás pedig

$$y = (1 - x)e^{3x}.$$

**3.** Határozzuk meg az $y'' - 4y' + 13y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását, majd azt a partikuláris megoldást, amely áthalad az origón és amelynek iránytényezője az origóban 1.

**Megoldás.** Keressük a megoldást $y = e^{kx}$ exponenciális alakban, ahol $k$ állandó. Ekkor $y' = ke^{kx}$ és $y'' = k^2 e^{kx}$. A behelyettesítés után

$$k^2 e^{kx} - 4ke^{kx} + 13e^{kx} = 0,, \quad \text{illetve} \quad e^{kx}(k^2 - 4k + 13) = 0$$

adódik, s mivel $e^{kx} \neq 0$, így kapjuk a

$$k^2 - 4k + 13 = 0$$

karakterisztikus egyenletet, amelynek megoldásai $k_1 = 2 + 3i$ és $k_2 = 2 - 3i$. A keresett lineárisan független partikuláris megoldások most az $y_1 = e^{2x} \cos 3x$ és az $y_2 = e^{2x} \sin 3x$ függvények, az általános megoldás pedig

$$y = C_1 e^{2x} \cos 3x + C_2 e^{2x} \sin 3x, \quad \text{azaz} \quad y = e^{2x} \left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right),$$

ahol $C_1$ és $C_2$ tetszőleges állandók.
A keresett partikuláris megoldás ki kell elégítse az $y(0) = 0$ és $y'(0) = 1$ kezdeti feltételeket. Mivel

$$y' = e^{2x} \left(2C_1 \cos 3x + 2C_2 \sin 3x - 3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x\right),$$

$C_1$ és $C_2$ meghatározásához a

$$e^0 \left(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0\right) = 0,$$

$$e^0 (2C_1 \cos 0 + 2C_2 \sin 0 - 3C_1 \sin 0 + 3C_2 \cos 0) = 1$$

két egyenletből álló kétismeretlenes lineáris egyenletrendszert kell megoldani. Ebből

$$C_1 = 0 \quad \text{és} \quad 3C_2 = 1,$$

vagyis a megoldás $C_1 = 0$ és $C_2 = \frac{1}{3}$, a keresett partikuláris megoldás pedig

$$y = \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x.$$

**4.** Határozzuk meg az $y'' - 2y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$ kezdetiérték-probléma megoldását.

**Megoldás.** Keressük a megoldást $y = e^{kx}$ exponenciális alakban, ahol $k$ állandó. Ekkor $y' = ke^{kx}$ és $y'' = k^2 e^{kx}$. A differenciálegyenletbe való behelyettesítás után

$$k^2 e^{kx} - 2e^{kx} = 0, \quad \text{illetve} \quad e^{kx}(k^2 - 2) = 0$$

adódik. Mivel $e^{kx} \neq 0$, ezért

$$k^2 - 2 = 0$$

a karakterisztikus egyenlet, amelynek megoldásai $k_1 = -\sqrt{2}$ és $k_2 = \sqrt{2}$. A keresett lineárisan független partikuláris megoldások most $y_1 = e^{-\sqrt{2}x}$ és $y_2 = e^{\sqrt{2}x}$, az általános megoldás pedig

$$y = C_1 e^{-\sqrt{2}x} + C_2 e^{\sqrt{2}x},$$

ahol $C_1$ és $C_2$ tetszőleges állandók.
A keresett partikuláris megoldás ki kell elégítse az $y(0) = 2$ és $y'(0) = 0$ kezdeti feltételeket. Mivel

$$y' = -C_1 \sqrt{2} e^{-\sqrt{2}x} + C_2 \sqrt{2} e^{\sqrt{2}x},$$

$C_1$ és $C_2$ meghatározásához a

$$C_1 e^0 + C_2 e^0 = 2, \quad -C_1 \sqrt{2} e^0 + C_2 \sqrt{2} e^0 = 0$$

két egyenletből álló kétismeretlenes lineáris egyenletrendszert kell megoldani. Ebből

$$C_1 + C_2 = 2 \quad \text{és} \quad -C_1 + C_2 = 0,$$

vagyis a megoldás $C_1 = 1$ és $C_2 = 1$, a keresett kezdetérték-probléma megoldása pedig

$$y = e^{-\sqrt{2}x} + e^{\sqrt{2}x}.$$

**5.** Oldjuk meg az $2y'' - 2y' + 3y = 0$ differenciálegyenletet.

**Megoldás.** Keressük a megoldást $y = e^{kx}$ exponenciális alakban, ahol $k$ állandó. Ekkor $y' = ke^{kx}$ és $y'' = k^2 e^{kx}$. A behelyettesítés után

$$2k^2 e^{kx} - 2ke^{kx} + 3e^{kx} = 0,, \quad \text{illetve} \quad e^{kx}(2k^2 - 2k + 3) = 0$$

adódik, s mivel $e^{kx} \neq 0$, így kapjuk a

$$2k^2 - 2k + 3 = 0$$

karakterisztikus egyenletet, amelynek konjugált komplex megoldásai $k_1 = \dfrac{1-i\sqrt{5}}{2}$ és $k_2 = \dfrac{1+i\sqrt{5}}{2}$. Mivel a konjugált komplex megoldások valós része $\alpha = \dfrac{1}{2}$, képzetes része pedig $\beta = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, a keresett lineárisan független partikuláris megoldások most $y_1 = e^{\frac{1}{2}x} \cos \dfrac{\sqrt{5}}{2} x$ és $y_2 = e^{\frac{1}{2}x} \sin \dfrac{\sqrt{5}}{2} x$, az általános megoldás pedig

$$y = e^{\frac{x}{2}} \left( C_1 \cos \frac{\sqrt{5}x}{2} + C_2 \sin \frac{\sqrt{5}x}{2} \right),$$

ahol $C_1$ és $C_2$ tetszőleges állandók.

### 6.3.3. Állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenlet

**6.14. Definíció.** *Az*

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad p, q \in \mathbf{R},$$

*alakú differenciálegyenletet, ahol $f$ folytonos, nem identikusan nulla valós függvény, állandó együtthatós inhomogén másodrendű lineáris differenciálegyenletnek nevezzük.*

Az inhomogén differenciálegyenlet megoldásában fontos szerepet játszik a következő tétel.

**6.3. Tétel.** *Legyen $y = y_h(x)$, $x \in [a,b]$ az $y'' + py' + qy = 0$ homogén differenciálegyenlet általános megoldása és $y = y_p(x)$, $x \in [a,b]$ az $y'' + py' + qy = f(x)$ inhomogén differenciálegyenlet egy tetszőleges partikuláris megoldása. Ekkor az $y'' + py' + qy = f(x)$ inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása $y = y_h(x) + y_p(x)$, $x \in [a,b]$.*

Az $y'' + py' + qy = f(x)$ inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldását a következő speciális esetekben tudjuk meghatározni.

**a)** $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$, $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbf{R}$, $a_n \neq 0$.

Ha $f(x)$ $n$-edrendű polinom, a partikuláris megoldást

$$y_p(x) = x^s (b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n)$$

alakban keressük, ahol $s$ a 0 számnak mint a $k^2 + pk + q = 0$ karakterisztikus egyenlet megoldásának multiplicitása, azaz $s = 0$ ha a 0 szám nem gyöke az egyenletnek, $s = 1$ ha a 0 egyszeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek, illetve $s = 2$ ha a 0 kétszeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek.

**b)** $f(x) = ae^{\alpha x}$, $a, \alpha \in \mathbf{R}$.

A partikuláris megoldást

$$y_p(x) = \lambda e^{\alpha x}, \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

alakban keressük. Ekkor $y_p'(x) = \lambda \alpha e^{\alpha x}$, $y_p''(x) = \lambda \alpha^2 e^{\alpha x}$, és az egyenletbe való behelyettesítés után adódik, hogy

$$\lambda \alpha^2 e^{\alpha x} + \lambda p \alpha e^{\alpha x} + \lambda q e^{\alpha x} = ae^{\alpha x},$$

ahonnan $\lambda(\alpha^2 + p\alpha + q) = a$ következik. Ha $\alpha$ nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor, $\lambda = \dfrac{a}{\alpha^2 + p\alpha + q}$.

Ha $\alpha$ a karakterisztikus egyenlet gyöke, akkor a partikuláris megoldást

$$y_p(x) = \lambda x^s e^{\alpha x}$$

alakban keressük, ahol $s$ az $\alpha$ gyök multiplicitása.

**c)** $f(x) = (a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n)e^{\alpha x}$, $\alpha, a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbf{R}$, $a_n \neq 0$.

A partikuláris megoldást

$$y_p(x) = x^s(b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n)e^{\alpha x}$$

alakban keressük, ahol $s$ a $k^2 + pk + q = 0$ karakterisztikus egyenlet $\alpha$ gyökének multiplicitása, azaz $s = 0$ ha $\alpha$ nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek, $s = 1$, ha $\alpha$ a karakterisztikus egyenlet egyszeres gyöke, illetve $s = 2$, ha $\alpha$ a karakterisztikus egyenlet kétszeres gyöke.

**d)** $f(x) = e^{\alpha x}(a \sin \beta x + b \cos \beta x)$, $a, b, \beta \in \mathbf{R}$.

A partikuláris megoldást

$$y_p(x) = x^s e^{\alpha x}(A \sin \beta x + B \cos \beta x), \quad A, B \in \mathbf{R}$$

alakban keressük, ahol $s$ a karakterisztikus egyenlet $\alpha + i\beta$ gyökének multiplicitása. Tehát, ha $\alpha + i\beta$ gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor $s = 1$, ha $\alpha + i\beta$ nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor $s = 0$.

Ha az inhomogén differenciálegyenletben az $f$ függvény

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_k(x)$$

alakú, ahol az $f_i$, $i = 1, 2, ..., k$, függvények a fentiekben felsorolt függvények valamelyikével egyeznek meg, akkor a következő módon járunk el. Meghatározzuk az

$$y'' + py' + qy = f_i(x), \quad i = 1, 2, ..., k$$

differenciálegyenletek megfelelő $y_{p_i}$ partikuláris megoldásait. Ekkor az inhomogén differenciálegyenlet $y_p$ partikuláris megoldása

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + ... + y_{p_k}$$

alakban írható fel.

**FELADATOK.**

**1.** Oldjuk meg az $y'' + y' - 6y = x$ differenciálegyenletet.

**Megoldás.** Először meghatározzuk az

$$y'' + y' - 6y = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenlet $y_h$ általános megoldását, amelyet $y = e^{kx}$ exponenciális alakban keresünk. Az egyenletbe való behelyettesítéssel adódik, hogy

$$k^2 e^{kx} + k e^{kx} - 6e^{kx} = 0,$$

ami ekvivalens az

$$e^{kx}(k^2 + k - 6) = 0$$

egyenlettel. Mivel az exponenciális kifejezés nem lehet nulla, ezért a $k$ ismeretlenű másodfokú polinom kell nulla legyen. A kapott egyenlet,

$$k^2 + k - 6 = 0,$$

az eredeti homogén differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete. A $k_1 = -3$ és $k_2 = 2$ gyökök valósak és egyenlőek, tehát a megfelelő homogén differenciálegyenlet megoldása

$$y_h = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

Mivel a lineáris inhomohén differenciálegyenlet $x$ változójú függvénye egy lineáris polinom, az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$y_p = x^s(Ax + B)$$

alakban keressük, ahol $s$ a karakterisztikus egyenlet $k = 0$ megoldásának multiplicitása. Mivel ebben az esetben $s = 0$, ezért

$$y_p = Ax + B, \quad y_p' = A, \quad y_p'' = 0.$$

Minden partikuláris megoldás kielégíti az egyenletet, ezért behelyettesítve az inhomogén egyenletbe adódik, hogy

$$0 + A - 6(Ax + B) = x,$$

ahonnan kapjuk a

$$-6A = 0, \quad A - 6B = 0$$

két egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszert, amelynek megoldása

$$A = -\frac{1}{6}, \quad B = -\frac{1}{36}.$$

A megfelelő partikuláris megoldás tehát

$$y_p = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{36},$$

az eredeti inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása pedig

$$y = y_h + y_p,$$

vagyis

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{2x} - \frac{1}{6}x - \frac{1}{36}, \quad C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

**2.** Határozzuk meg az $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdetiérték-probléma megoldását.

**Megoldás.** Határozzuk meg először az

$$y'' - 8y' + 16y = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenlet $y_h$ általános megoldását, amelyet $y = e^{kx}$ exponenciális alakban keresünk. Az egyenletbe való behelyettesítéssel adódik, hogy

$$k^2 e^{kx} - 8ke^{kx} + 16e^{kx} = 0,$$

ami ekvivalens az

$$e^{kx}(k^2 - 8k + 16) = 0$$

egyenlettel. A homogén differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$k^2 - 8k + 16 = 0,$$

amelynek gyökei $k_1 = k_2 = 4$ valósak és egyenlőek, tehát a megfelelő homogén differenciálegyenlet megoldása

$$y_h = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

Az inhomogén egyenletben szereplő $x$ változójú függvény $f(x) = e^{4x}$ exponenciális függvény, ezért az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$y_p = Ax^s e^{4x}$$

alakban keressük, ahol $s$ a karakterisztikus egyenlet $k = 4$ megoldásának multiplicitása. Most $s = 2$, mivel a 4 a karakterisztikus egyenlet kettős gyöke, ezért

$$y_p = Ax^2 e^{4x}, \quad y_p' = A(2x + 4x^2)e^{4x}, \quad y_p'' = A(2 + 16x + 16x^2)e^{4x}.$$

Behelyettesítve az inhomogén egyenletbe adódik, hogy

$$A(2 + 16x + 16x^2)e^{4x} - 8A(2x + 4x^2)e^{4x} + 16Ax^2 e^{4x} = e^{4x}.$$

Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát $e^{4x}$-nel ($e^{4x} \neq 0$), ekkor

$$16Ax^2 + 16Ax + 2A - 16Ax - 32Ax^2 + 16Ax^2 = 1,$$

ahonnan $2A = 1$, illetve

$$A = \frac{1}{2}.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása tehát

$$y_p = \frac{1}{2} x^2 e^{4x},$$

az inhomogén egyenlet általános megoldása pedig

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x} + \frac{1}{2} x^2 e^{4x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbf{R},$$

illetve
$$y = e^{4x}\left(C_1 + C_2x + \frac{1}{2}x^2\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$
Vegyük figyelembe most a kezdeti feltételeket. Ehhez szükséges a megoldás első deriváltja. Mivel
$$y' = e^{4x}\left(4C_1 + 4C_2x + 2x^2 + C_2 + x\right),$$
behelyettesítve az $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdeti feltételeket az
$$e^0\left(C_1 + C_2 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0^2\right) = 0, \quad e^0\left(4C_1 + 4C_2 \cdot 0 + 2 \cdot 0^2 + C_2 + 0\right) = 1$$
két egyenletből álló kétismeretlenes lineáris egyenletrendszert kapjuk, amelynek megoldása
$$C_1 = 0, \quad C_2 = 1,$$
ahonnan következik, hogy a kezdetiérték-probléma megoldása
$$y = e^{4x}\left(x + \frac{1}{2}x^2\right).$$

**3.** Határozzuk meg az $y''+4y'+4y = 3-x^2-4e^{2x}$ inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldását.

**Megoldás.** Először meghatározzuk az
$$y'' + 4y' + 4y = 0$$
homogén lineáris differenciálegyenlet $y_h$ általános megoldását, amelyet $y = e^{kx}$ exponenciális alakban keresünk. Az egyenletbe való behelyettesítéssel adódik, hogy
$$k^2e^{kx} + 4ke^{kx} + 4e^{kx} = 0,$$
ami ekvivalens az
$$e^{kx}(k^2 + 4k + 4) = 0$$
egyenlettel.

Mivel az exponenciális kifejezés nem lehet nulla, ezért a $k$ ismeretlenű másodfokú polinom kell nulla legyen. A kapott egyenlet,
$$k^2 + 4k + 4 = 0,$$
az eredeti homogén differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete. A $k_1 = -2$ és $k_2 = -2$ gyökök valósak és egyenlőek, tehát a megfelelő homogén differenciálegyenlet megoldása
$$y_h = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}.$$

Mivel a lineáris inhomohén differenciálegyenlet $x$ változójú függvénye egy polinom és egy exponenciális függvény összege, két partikuláris megoldást keresünk. Ezek
$$y_{p_1} = Ax^2 + Bx + C \quad \text{és} \quad y_{p_2} = De^{2x}.$$

$y_{p_1}$ és deriváltjainak az $y'' + 4y' + 4y = 3 - x^2$ egyenletbe való behelyettesítése után adódik, hogy

$$2A + 4(2Ax + B) + 4(Ax^2 + Bx + C) = 3 - x^2.$$

Az egyenletet kielégítik az $A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$ és $C = \frac{3}{8}$ paraméterértékek, ezért az egyik partikuláris megoldás

$$y_{p_1} = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}.$$

$y_{p_2}$ és deriváltjainak $y'' + 4y' + 4y = -4e^{2x}$ egyenletbe való behelyettesítése után kapjuk, hogy

$$4De^{2x} + 4 \cdot 2De^{2x} + 4De^{2x} = -4e^{2x}.$$

Az egyenletet kielégíti a $D = -\frac{1}{4}$ paraméterérték, tehát a másik partikuláris megoldás

$$y_{p_2} = -\frac{1}{4}e^{2x}.$$

Az adott inhomohén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása tehát

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2},$$

azaz

$$y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8} - \frac{1}{4}e^{2x}.$$

**4.** Határozzuk meg az $y''-y'+y = (x+1)e^{2x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

**Megoldás.** A

$$y'' - y' + y = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenlet megoldását $y = e^{kx}$ exponenciális alakban keressük. Az

$$k^2e^{kx} - ke^{kx} + e^{kx} = 0$$

egyenletbe való behelyettesítés után adódik, hogy

$$e^{kx}(k^2 - k + 1) = 0.$$

Mivel az exponenciális kifejezés nem lehet nulla, ezért a $k$ ismeretlenű másodfokú polinom kell nulla legyen. A karakterisztikus egyenlet most

$$k^2 - k + 1 = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet megoldásai konjugált komplex számok:

$$k_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{és} \quad k_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

így a homogén differenciálegyenlet megoldása

$$y_h = C_1e^{\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2e^{\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Mivel az $(x+1)e^{2x}$ függvény szerepel a jobb oldalon, ezért az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását lineáris polinom és exponenciális függvény szorzataként keressük:

$$y_p = (Ax + B)e^{2x}.$$

$y_p$ és deriváltjainak az adott egyenletbe való behelyettesítése után adódik, hogy

$$4Ae^{2x} + 4(Ax + B)e^{2x} - (Ae^{2x} + 2(Ax + B)e^{2x}) + (Ax + B)e^{2x} = (x + 1)e^{2x}.$$

Az egyenletet kielégítik az $A = \dfrac{1}{3}$ és $B = 0$ paraméterértékek, tehát a partikuláris megoldás

$$y_p = \frac{1}{3}xe^{2x}.$$

Az adott lineáris inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása tehát

$$y = y_h + y_p,$$

azaz

$$y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 e^{\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{3}xe^{2x}.$$

**5.** Oldjuk meg az $y'' - y' - 6y = 3e^{-2x} + \cos 3x$ differenciálegyenletet.

**Megoldás.** Először az

$$y'' - y' - 6y = 0$$

homogén differenciálegyenlet általános megoldását keressük $y = e^{kx}$ exponenciális alakban. Az egyenletbe való visszahelyettesítés után adódik, hogy

$$k^2e^{kx} - ke^{kx} - 6e^{kx} = 0,$$

ami ekvivalens az

$$e^{kx}(k^2 - k - 6) = 0$$

egyenlettel. Mivel az exponenciális kifejezés nem lehet nulla, ezért az $r$ ismeretlenű másodfokú polinom kell nulla legyen. A karakterisztikus egyenlet most

$$k^2 - k - 6 = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet megoldásai, $k_1 = -2$ és $k_2 = 3$, különböző valós számok, ezért a homogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$y_h = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x}.$$

Két partikuláris megoldást keresünk, az egyiket exponenciális, a másikat pedig trigonometrikus alakban.

Mivel a $-2$ a karakterisztikus egyenlet egyszeres gyöke, ezért az exponenciális függvénynek megfelelő partikuláris megoldást

$$y_{p_1} = Axe^{-2x}$$

alakban keressük. $y_{p_1}$ és deriváltjainak $y'' - y' - 6y = 3e^{-2x}$ egyenletbe való behelyettesítése után adódik, hogy

$$-4Ae^{-2x} + 4Axe^{-2x} - (Ae^{-2x} - 2Axe^{-2x}) - 6 \cdot Axe^{-2x} = 3e^{-2x}.$$

Az egyenletet kielégíti az $A = -\dfrac{3}{5}$ paraméterérték, ezért az első partikuláris megoldás

$$y_{p_1} = -\frac{3}{5}xe^{-2x}.$$

A trigonometrikus függvénynek megfelelő partikuláris megoldást

$$y_{p_2} = B\cos 3x + C\sin 3x$$

alakban keressük. $y_{p_2}$ és deriváltjainak az $y'' - y' - 6y = \cos 3x$ egyenletbe való behelyettesítése után adódik, hogy

$$-9B\cos 3x - 9C\sin 3x - (-3B\sin 3x + 3C\cos 3x) - 6(B\cos 3x + C\sin 3x) = \cos 3x,$$

illetve

$$(3B - 15C)\sin 3x - (15B + 3C + 1)\cos 3x = 0.$$

Az egyenlőség $3B - 15C = 0$ és $15B + 3C + 1 = 0$ esetén igaz, tehát $B = -\dfrac{5}{78}$ és $C = -\dfrac{1}{78}$. A keresett partikuláris megoldás most

$$y_{p_2} = -\frac{5}{78}\cos 3x - \frac{1}{78}\sin 3x.$$

Az adott lineáris inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2},$$

illetve

$$y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{3x} - \frac{3}{5}xe^{-2x} - \frac{5}{78}\cos 3x - \frac{1}{78}\sin 3x.$$