5. Egyváltozós valós függvények integrálszámítása

5.1. A határozatlan integrál fogalma

Az eddigiekben megismertük a differenciálás műveletét, melynek alapfeladata: adott f függvényhez megkeresni az f' derivált függvényt. Természetesnek tűnik a fordított probléma tanulmányozása is: keressük azt az F függvényt, melynek ismert az F' derivált függvénye.

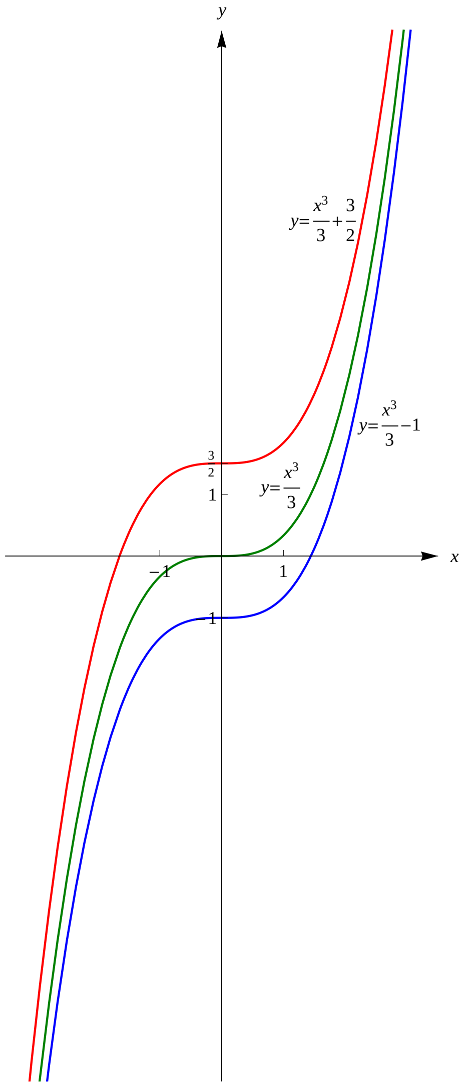
5.1. Példa. Ha tudjuk, hogy $F'(x) = x^2$ érvényes, akkor $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ a keresett függvény, azaz amelyre teljesül, hogy $\left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = x^2$. Viszont F nem az egyetlen ilyen függvény. Például, az

$$F_1(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2} \quad \text{és} \quad F_2(x) = \frac{x^3}{3} - 1$$

függvények ugyanúgy teljesítik a kívánt tulajdonságot, vagyis

$$\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}\right)' = x^2 \quad \text{és} \quad \left(\frac{x^3}{3} - 1\right)' = x^2.$$

A következő ábrán néhány olyan függvény grafikonja látható, amelyeknek $f(x) = x^2$ a deriváltfüggvénye. Figyeljük meg az adott függvénygörbék kölcsönös helyzetét.



5.1. Definíció. *Ha az F függvény differenciálható az $[a, b]$ intervallumon és minden $x \in [a, b]$ esetén $F'(x) = f(x)$, akkor az F függvényt az f függvény primitív függvényének nevezzük az $[a, b]$ intervallumon.*

A fenti példából látható, hogy adott intervallum felett az f függvény primitív függvénye, ha létezik, nem egyértelműen meghatározott.

A következő állítás választ ad arra a kérdésre, hogy egy függvénynek hány primitív függvénye lehet és hogy a adott függvény primitív függvényeinek grafikonjai milyen kölcsönös helyzetben vannak egymással.

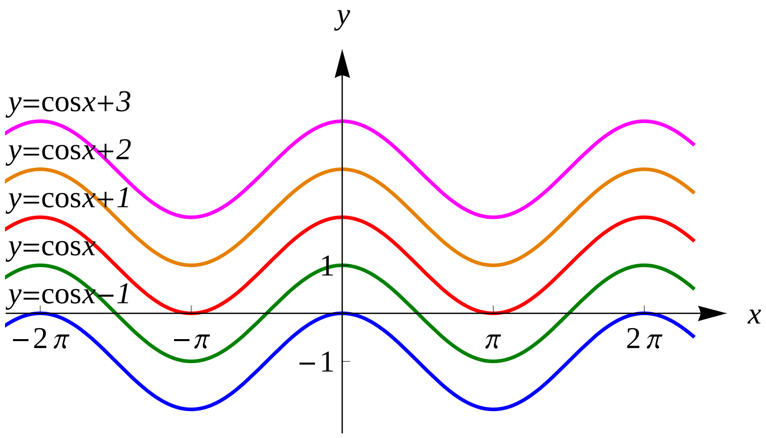
5.1. Tétel. *Ha az F_1 és F_2 függvények az f függvény primitív függvényei az $[a, b]$ intervallumon, akkor van olyan C valós állandó, hogy minden $x \in [a, b]$ esetén $F_1(x) - F_2(x) = C$.*

Bizonyítás. Mivel az F_1 és F_2 függvények az f függvény primitív függvényei az $[a, b]$ intervallumon, ezért évényes, hogy $F_1'(x) = f(x)$ és $F_2'(x) = f(x)$ minden $x \in [a, b]$ esetén. Kivonva a második egyenlőséget az elsőből adódik, hogy

$$F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

azaz, hogy $(F_1(x) - F_2(x))' = 0$ minden $x \in [a, b]$ esetén. Ebből az következik, hogy $F_1(x) - F_2(x) = C$ minden $x \in [a, b]$ esetén, ami azt jelenti, hogy adott f függvény primitív függvényei legfeljebb egy állandóban különböznek egymástól. $\diamond$

5.2. Példa. Az $f(x) = -\sin x$ függvény minden primitív függvénye $F(x) = \cos x + C$ alakban írható fel, ahol C tetszőleges konstans. Az ábrán a $C = -1$, $C = 0$, $C = 1$, $C = 2$ és $C = 3$ eset látható.



A fentiekben említett tulajdonságok geometriai jelentése a következő:

1. Ha síkbeli koordinátarendszerben felrajzoljuk az f függvény egy primitív függvényének grafikonját az $[a, b]$ intervallumon, akkor a sík minden olyan görbéje, amely ebből a görbéből y-tengely menti párhuzamos eltolással átvihető, szintén az f függvény egy primitív függvényének grafikonját képezi az $[a, b]$ intervallumon.

2. Az f függvény összes primitív függvényének grafikonjai az $[a, b]$ intervallumon a fent leírt módon állíthatóak elő.

5.2. Definíció. *Legyen f olyan függvény, amelynek van primitív függvénye az $[a, b]$ intervallumon. Az f függvény $[a, b]$ intervallumhoz tartozó primitív függvényeinek halmazát az f függvény határozatlan integráljának nevezzük és*

$$\int f(x)dx$$

szimbólummal jelöljük.

Ha F az f függvény egy primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon, akkor az $[a,b]$ felett

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C | C \in \mathbf{R}\}.$$

Az egyszerűség kedvéért, ezt úgy szokás írni mint

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

de figyelembe kell venni, hogy ilyen jelölési mód esetén ugyanolyan szimbólumot használunk a halmaz és a halmaz egy eleme esetén is. Az $\int$ szimbólum az integrál jele, $f(x)$ az integrálandó függvény vagy integrandus, az $f(x)dx$ kifejezés pedig az integrál alatti kifejezés.

Figyelembe véve, hogy F az f függvény primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon, ami azt jelenti, hogy minden $x \in [a,b]$ esetén $F'(x) = f(x)$, láthatjuk, hogy az $f(x)dx$ integrál alatti kifejezés az F függvény differenciálját jelenti, és érvényes, hogy

$$\int f(x)dx = \int dF(x) = F(x) + C. \tag{5.1}$$

Mivel

$$d(F(x) + C) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx,$$

adódik, hogy

$$d\int f(x) = f(x)dx. \tag{5.2}$$

A (5.1) és (5.2) egyenlőségek azt mutatják, hogy a differenciálás művelete (a differenciál keresése) és az integrálás művelete (a határozatlan integrál keresése) egymás inverzei, egy tetszőleges konstans pontosságáig.

5.2. A határozatlan integrál alaptulajdonságai

5.2. Tétel. *Ha az f és g függvényeknek van primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon, akkor az $f+g$ függvénynek is van primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon, mégpedig*

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Bizonyítás. Legyen F az f, G pedig a g függvény primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon. Ekkor $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$, amiből adódik, hogy

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

Ezt azt jelenti, hogy $F(x) + G(x)$ az $f(x) + g(x)$ függvény primitív függvénye. Ezért

$$\int (f(x) + g(x))dx = F(x) + G(x) + C,$$

ahol C tetszőleges valós állandó. Másfelől

$$\int f(x)dx = F(x) + C_1, \quad \int g(x)dx = G(x) + C_2,$$

ahol C_1 és C_2 tetszőleges valós állandók, vagyis

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x) + C_1 + C_2.$$

Mivel C, C_1 és C_2 tetszőleges valós állandók, az

$$\{F(x) + G(x) + C | C \in \mathbf{R}\} \quad \text{és} \quad \{F(x) + G(x) + C_1 + C_2 | C_1, C_2 \in \mathbf{R}\}$$

függvényhalmazok egyenlőek. Az állítást ezzel beláttuk. $\diamond$

5.3. Tétel. *Ha az f függvénynek van primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon és $\alpha \in \mathbf{R}$, akkor az αf függvénynek is van primitív függvénye az adott intervallumon, mégpedig*

$$\int (\alpha f(x))dx = \alpha \int f(x)dx.$$

Bizonyítás. Legyen F az f függvény primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon. Ekkor minden $x \in [a,b]$ esetén teljesül, hogy $F'(x) = f(x)$, vagyis $(\alpha F(x))' = \alpha F'(x) = \alpha f(x)$. Ezért

$$\int (\alpha f(x))dx = \alpha F(x) + C_1,$$

ahol C_1 tetszőleges valós állandó. Másfelől

$$\int f(x)dx = F(x) + C_2,$$

ahol C_2 tetszőleges valós állandó, azaz

$$\alpha \int f(x)dx = \alpha(F(x) + C_2) = \alpha F(x) + \alpha C_2.$$

Az

$$\{\alpha F(x) + C_1 | C_1 \in \mathbf{R}\} \quad \text{és} \quad \{\alpha F(x) + \alpha C_2 | C_2 \in \mathbf{R}\}$$

függvényhalmazok egyenlőek. Az állítást ezzel beláttuk. $\diamond$

5.1. Következmény. *Ha az f és g függvényeknek van primitív függvényük az $[a,b]$ intervallumon, α és β pedig nullától különböző valós számok, akkor az $\alpha f + \beta g$ függvénynek is van primitív függvénye $[a,b]$ intervallumon, mégpedig*

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$

Alapintegrálok táblázata

1. $\int dx = x + C$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x \neq 0$

4. $\int e^x dx = e^x + C$

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$

8. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$

9. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$

10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad x \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

12. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C$

13. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C, \quad x \neq 0$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad |x| < 1$

15. $\int \frac{dx}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C = \operatorname{arsh} x + C$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} dx = \begin{cases} \operatorname{arch} x + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C, & x > 1; \\ \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C, & x < -1. \end{cases}$

18. $\int \frac{dx}{1-x^2} dx = \begin{cases} \operatorname{arth} x + C = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C, & |x| < 1; \\ \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C, & |x| > 1. \end{cases}$

A határozatlan integrálok megoldása során minden esetben feltételezzük, hogy az integrálás folyamatában megjelenő függvények értelmezési tartományán keressük a primitív függvényt.

FELADATOK.

Határozzuk meg a következő integrálok megoldását.

1. $\int 2x^5 dx$

   Megoldás.

$$\int 2x^5 dx = 2\int x^5 dx = 2 \cdot \frac{x^6}{6} + C = 3x^6 + C.$$

2. $\int \frac{3dx}{x}$

   Megoldás.

$$\int \frac{3dx}{x} = 3\int \frac{dx}{x} = 3\ln|x| + C.$$

3. $\int \frac{-2dx}{x^5}$

   Megoldás.

$$\int \frac{-2dx}{x^5} = -2\int x^{-5} dx = -2 \cdot \frac{x^{-4}}{-4} + C = \frac{1}{2x^4} + C.$$

4. $\int \sqrt[3]{x^2} dx$

   Megoldás.

$$\int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + C.$$

5. $\int \frac{4dx}{\sqrt[7]{x^3}}$

   Megoldás.

$$\int \frac{4dx}{\sqrt[7]{x^3}} = 4 \cdot \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}} + C = 4 \cdot \frac{7}{4}\sqrt[7]{x^4} + C = 7\sqrt[7]{x^4} + C.$$

6. $\int \frac{x^2\sqrt{x^3\sqrt[3]{x}}}{\sqrt{x}} dx$

   Megoldás.

$$\int \frac{x^2\sqrt{x^3\sqrt[3]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int x^2\sqrt{x^2\sqrt[3]{x}} dx = \int x^3\sqrt[6]{x} dx =$$

$$= \int x^{\frac{19}{6}} dx = \frac{x^{\frac{25}{6}}}{\frac{25}{6}} + C = \frac{6}{25}\sqrt[6]{x^{25}} + C = \frac{6}{25}x^4\sqrt[6]{x} + C.$$

7. $\int (2\sin x - 3\cos x)\, dx$

Megoldás.

$$\int (2\sin x - 3\cos x)\, dx = 2\int \sin x dx - 3\int \cos x dx =$$

$$= 2(-\cos x) - 2\sin x + C = -2\cos x - 3\sin x + C.$$

8. $\int \left(e^x - 2^{x+1} + 3^{x-2}\right) dx$

Megoldás.

$$\int \left(e^x - 2^{x+1} + 3^{x-2}\right) dx = \int e^x dx - 2\int 2^x dx + \frac{1}{9}\int 3^x dx =$$

$$= e^x - 2\cdot\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{1}{9}\cdot\frac{3^x}{\ln 3} + C = e^x - \frac{2^{x+1}}{\ln 2} + \frac{3^{x-2}}{\ln 3} + C.$$

9. $\int \frac{x^3 + x^2 - 3x - 3}{3x^2} dx$

Megoldás.

$$\int \frac{x^3 + x^2 - 3x - 3}{3x^2} dx = \frac{1}{3}\int \left(x + 1 - \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\cdot x - \ln|x| - \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x - \ln|x| + \frac{1}{x} + C.$$

10. $\int \frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}} dx$

Megoldás.

$$\int \frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{x + x\sqrt{x} - \sqrt{x} - x}{\sqrt[3]{x}} dx = \int \left(\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\right) dx =$$

$$= \int \left(x^{\frac{7}{6}} - x^{\frac{1}{6}}\right) dx = \frac{6x^{\frac{13}{6}}}{13} - \frac{6x^{\frac{7}{6}}}{7} + C = \frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x} - \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} + C.$$

11. $\int \frac{3\cdot 5^x - 4\cdot 3^x}{5^x} dx$

Megoldás.

$$\int \frac{3\cdot 5^x - 4\cdot 3^x}{5^x} dx = \int \left(3 - 4\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^x\right) dx = 3\int dx - 4\int \left(\frac{3}{5}\right)^x dx =$$

$$= 3x - 4\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x}{\ln\frac{3}{5}} + C = 3x - \frac{4\cdot 3^x}{(\ln 3 - \ln 5)\cdot 5^x} + C.$$

12. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - \operatorname{arctg} x + C.$$

13. $\displaystyle\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right) dx =$$

$$= \int x^{-2}dx + \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^{-1}}{-1} + \operatorname{arctg} x + C = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x} + C.$$

14. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x dx$

Megoldás.

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx =$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

16. $\displaystyle\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x + \frac{1}{2}x + C = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg} x + x\right) + C.$$

17. $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x}dx = \int \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{\cos x - \sin x}dx =$$

$$= \int (\cos x + \sin x)dx = \int \cos x dx + \int \sin x dx = \sin x - \cos x + C.$$

18. $\int 3a^x\left(e^x - a^{-x}\right) dx$

Megoldás.

$$\int 3a^x\left(e^x - a^{-x}\right) dx = 3\int \left(a^x e^x - 1\right) dx = 3\int (ae)^x\, dx - 3\int dx =$$

$$= 3 \cdot \frac{(ae)^x}{\ln ae} - 3x + C = \frac{3a^x e^x}{1+\ln a} - 3x + C.$$

19. $\int \operatorname{sh} x dx$

Megoldás.

$$\int \operatorname{sh} x dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx = \frac{1}{2}\int e^x dx - \frac{1}{2}\int \left(e^{-1}\right)^x dx =$$

$$= \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}\frac{\left(e^{-1}\right)^x}{\ln e^{-1}} + C = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + C = \operatorname{ch} x + C.$$

20. $\int \frac{x^4 + 2x^2}{3x^2+3} dx$

Megoldás.

$$\int \frac{x^4 + 2x^2}{3x^2+3} dx = \int \frac{(x^4+2x^2+1)-1}{3(x^2+1)} dx = \frac{1}{3}\int \frac{(x^2+1)^2-1}{x^2+1} dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \left(x^2 + 1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3} + x - \operatorname{arctg} x\right) + C.$$

21. $\int \frac{8}{1-\cos 4x} dx$

Megoldás.

$$\int \frac{8}{1-\cos 4x} dx = 8\int \frac{1}{2\sin^2 2x} dx = 4\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{(2\sin x \cos x)^2} dx =$$

$$= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

22. $\int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$

Megoldás.

$$\int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx = \int \left(\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right) dx =$$

$$= \int (1+\sin x)\, dx = x - \cos x + C.$$

23. $\displaystyle\int \frac{1-3\sin^2 x}{\cos^2 x - \cos^4 x}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{1-3\sin^2 x}{\cos^2 x-\cos^4 x}dx = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x-3\sin^2 x}{\cos^2 x\,(1-\cos^2 x)}dx = \int \frac{\cos^2 x-2\sin^2 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\sin^2 x} - 2\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{ctg} x - 2\operatorname{tg} x + C.$$

24. $\displaystyle\int 3^x 2^{-3x}dx$

Megoldás.

$$\int 3^x 2^{-3x}dx = \int \frac{3^x}{8^x}dx = \int \left(\frac{3}{8}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{3}{8}\right)^x}{\ln\frac{3}{8}} + C = \frac{3^x 2^{-3x}}{\ln 3 - \ln 8} + C.$$

25. $\displaystyle\int e^{2x+5}dx$

Megoldás.

$$\int e^{2x+5}dx = e^5\int \left(e^2\right)^x dx = e^5\cdot\frac{\left(e^2\right)^x}{\ln e^2} + C = \frac{1}{2}e^{2x+5} + C.$$

26. $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{4-4x^2}}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{3}{\sqrt{4-4x^2}}dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C.$$

27. $\displaystyle\int \left(9+9x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx$

Megoldás.

$$\int \left(9+9x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{9+9x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{arsh} x + C = \frac{1}{3}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C.$$

28. $\displaystyle\int \frac{x^3-2\sqrt{1-x^2}}{x^3\sqrt{1-x^2}}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{x^3-2\sqrt{1-x^2}}{x^3\sqrt{1-x^2}}dx = \int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{x^3}\right)dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx - 2\int x^{-3}dx =$$

$$= \arcsin x - 2\cdot\frac{x^{-2}}{-2} + C = \arcsin x + \frac{1}{x^2} + C.$$

29. $\displaystyle\int \frac{5+5x^2-\sqrt[3]{x^2}}{(1+x^2)\sqrt[3]{x^2}}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{5+5x^2-\sqrt[3]{x^2}}{(1+x^2)\sqrt[3]{x^2}}dx = 5\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} - \int \frac{dx}{1+x^2} = 5\int x^{-\frac{2}{3}}dx - \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= 5\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} - \operatorname{arctg} x + C = 15\sqrt[3]{x} - \operatorname{arctg} x + C.$$

30. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+1}dx$

Megoldás.

$$\int \frac{x^4}{x^2+1}dx = \int \frac{(x^4+x^2)-x^2}{x^2+1}dx = \int \left(\frac{x^2(x^2+1)}{x^2+1} - \frac{x^2}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \int x^2dx - \int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx = \frac{x^3}{3} - \int \left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = \frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x + C.$$

5.3. Integrálási módszerek

5.3.1. Helyettesítési módszer

Helyettesítési módszernek nevezzük azt az integrálási módszert, amelyet az összetett függvény differenciálásából vezetünk le.

5.4. Tétel. *Ha az f függvénynek van F primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon és $\varphi : [\alpha,\beta] \mapsto [a,b]$ folytonosan differenciálható függvény az $[\alpha,\beta]$ intervallumon, azaz $x=\varphi(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, akkor az $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ függvénynek van $F(\varphi(t))$ primitív függvénye az $[\alpha,\beta]$ intervallumon, ezért $[\alpha,\beta]$-n*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C\ .$$

Bizonyítás. Az $F(\varphi(t))$ összetett függvény differenciálható és igaz, hogy

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t)\ .$$

Mivel F az f függvény primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon, ezért $t\in[\alpha,\beta]$ esetén $\varphi(t)\in[a,b]$, azaz $F'(\varphi(t)) = f(\varphi(t))$ az $[\alpha,\beta]$ intervallumon, ahonnan az állítás következik. $\diamond$

FELADATOK.

Oldjuk meg helyettesítéssel a következő határozatlan integrálokat.

1. $\int (ax+b)^n\, dx$, $n \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbf{R}$

Megoldás. Bevezetve az $ax+b=t$, $adx=dt$, $dx=\frac{dt}{a}$ helyettesítést adódik, hogy

$$\int (ax+b)^n\, dx = \frac{1}{a}\int t^n dt = \frac{1}{a}\frac{t^{n+1}}{n+1} + C = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C.$$

2. $\int \frac{dx}{3x+4}$

Megoldás. Alkalmazva a $3x+4=t$, $3dx=dt$, $dx=\frac{dt}{3}$ helyettesítést kapjuk, hogy

$$\int \frac{dx}{3x+4} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + C = \frac{1}{3}\ln|3x+4| + C.$$

3. $\int \frac{dx}{x^2+9}$

Megoldás. Kiemelve 9-et a nevezőből és rendezve az integrandust jön, hogy

$$\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\frac{x^2}{9}+1} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}.$$

Vezessük be most az $\frac{x}{3}=t$, $dx=3dt$ helyettesítést. Ekkor

$$\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{9}\int \frac{3dt}{t^2+1} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C.$$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

Megoldás. Kiemelve 2-t a nevezőből és rendezve az integrandust következik:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}.$$

Vezessük be most az $\frac{x}{2}=t$, $dx=2dt$ helyettesítést. Ekkor

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{2dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin\frac{x}{2} + C.$$

5. $\int e^{2x+5}dx$

Megoldás. Bevezetve a $2x+5=t$, $2dx=dt$, $dx=\frac{dt}{2}$ helyettesítést adódik:

$$\int e^{2x+5}dx = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{2x+5} + C.$$

6. $\int 5\sin(5x+3)dx$

Megoldás. Bevezetve a $5x+3=t$, $5dx=dt$, $dx=\frac{dt}{5}$ helyettesítést kapjuk:

$$\int 5\sin(5x+3)dx = 5\cdot\frac{1}{5}\int \sin t dt = -\cos t + C = -\cos(5x+3)+C.$$

7. $\int \frac{3dx}{\cos^2\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)}$

Megoldás. Bevezetve a $3x-\frac{\pi}{2}=t$, $3dx=dt$ helyettesítést az integrál megoldása:

$$\int \frac{3dx}{\cos^2\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C = \operatorname{tg}\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)+C.$$

8. $\int a^{px+q}dx$, $a\in \mathbf{R}^+$, $p\in R\setminus\{0\}$, $q\in\mathbf{R}$

Megoldás. Vezessük be a $px+q=t$, $pdx=dt$, $dx=\frac{dt}{p}$ helyettesítést. Ekkor

$$\int a^{px+q}dx = \frac{1}{p}\int a^t dt = \frac{1}{p}\cdot\frac{a^t}{\ln a}+C = \frac{a^{px+q}}{p\ln a}+C.$$

9. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$

Megoldás. Egészítsük ki teljes négyzetté a nevezőben levő másodfokú kifejezést. Ekkor

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x^2+2x+1)+4} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4}.$$

Kiemelve 4-et a nevezőből kapjuk, hogy

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}.$$

Bevezetve a $\frac{x+1}{2}=t$, $\frac{1}{2}dx=dt$, $dx=2dt$ helyettesítést adódik, hogy

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \frac{1}{4}\int \frac{2dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}}$

Megoldás. Bevezetve a $2-3x=t$, $-3dx=dt$, $dx=-\frac{dt}{3}$ helyettesítést adódik, hogy

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}} = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} = -\frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{3}}dt =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+C = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{t^2}+C = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{(2-3x)^2}+C.$$

11. $\displaystyle\int \frac{2xdx}{x^2+3}$

Megoldás. Bevezetve a $x^2+3=t$, $2xdx=dt$ helyettesítést következik:

$$\int \frac{2xdx}{x^2+3} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(x^2+3) + C.$$

12. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+1}dx$

Megoldás. Bevezetve a $x^3+1=t$, $3x^2dx=dt$, $x^2dx=\dfrac{dt}{3}$ helyettesítést adódik:

$$\int x^2\sqrt{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{t}dt = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dt =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9}\sqrt{t^3} + C = \frac{2}{9}t\sqrt{t} + C = \frac{2}{9}(x^3+1)\sqrt{x^3+1} + C.$$

13. $\displaystyle\int \frac{2x-4}{x^2-4x}dx$

Megoldás. Alkalmazzuk az $x^2-4x=t$, $(2x-4)dx=dt$ helyettesítést. Ekkor

$$\int \frac{2x-4}{x^2-4x}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^2-4x| + C.$$

14. $\displaystyle\int \frac{9t^2+12t+15}{t^3+2t^2+5t+1}dt$

Megoldás. Emeljünk ki 3-at a számlálóból az integrál elé. Ekkor

$$\int \frac{9t^2+12t+15}{t^3+2t^2+5t+1}dt = 3\int \frac{3t^2+4t+5}{t^3+2t^2+5t+1}dt.$$

Bevezetve a $t^3+2t^2+5t+1=z$, $(3t^2+4t+5)dt=dz$ helyettesítést következik, hogy

$$\int \frac{9t^2+12t+15}{t^3+2t^2+5t+1}dt = 3\int \frac{dz}{z} = 3\ln|z| + C = 3\ln|t^3+2t^2+5t+1| + C.$$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}$

Megoldás. Bevezetve a $\ln x = t$, $\dfrac{dx}{x} = dt$ helyettesítést adódik, hogy

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C.$$

16. $\displaystyle\int x^3 e^{-x^4} dx$

Megoldás. Bevezetve a $-x^4 = t$, $-4x^3 dx = dt$, $x^3 dx = -\dfrac{dt}{4}$ helyettesítést jön, hogy

$$\int x^3 e^{-x^4} dx = -\frac{1}{4}\int e^t dt = -\frac{1}{4}e^t + C = -\frac{1}{4}e^{-x^4} + C = -\frac{1}{4e^{x^4}} + C.$$

17. $\displaystyle\int \frac{\sin x dx}{3 - 2\cos x}$

Megoldás. Bevezetve a $3 - 2\cos x = t$, $2\sin x dx = dt$, $\sin x dx = \dfrac{dt}{2}$ helyettesítést adódik:

$$\int \frac{\sin x dx}{3 - 2\cos x} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|3 - 2\cos x| + C.$$

18. $\displaystyle\int \operatorname{tg} 3x dx$

Megoldás. Alkalmazzuk a $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ trigonometriai azonosságot. Ekkor

$$\int \operatorname{tg} 3x dx = \int \frac{\sin 3x}{\cos 3x} dx.$$

Bevezetve a $\cos 3x = t$, $-3\sin 3x dx = dt$, $\sin 3x dx = -\dfrac{dt}{3}$ helyettesítést adódik, hogy

$$\int \operatorname{tg} 3x dx = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{3}\ln|t| + C = -\frac{1}{3}\ln|\cos 3x| + C.$$

19. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\pi + \sin^2 x} dx$

Megoldás. Bevezetve a

$$\pi + \sin^2 x = t, \quad 2\sin x\cos x dx = dt, \quad \sin 2x dx = dt$$

helyettesítést következik, hogy

$$\int \frac{\sin 2x}{\pi + \sin^2 x} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(\pi + \sin^2 x) + C.$$

20. $\displaystyle\int \frac{\sin x dx}{2\left(\sin^2\frac{x}{2} - 1\right)} dx$

Megoldás. Alkalmazzuk a $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ trigonometriai azonosságot és rendezzük az integrandust. Ekkor

$$\int \frac{\sin x dx}{2\left(\sin^2\frac{x}{2} - 1\right)} dx = \int \frac{\sin x dx}{2\left(\frac{1-\cos x}{2} - 1\right)} dx = \int \frac{\sin x dx}{-1 - \cos x} dx.$$

Bevezetve a $-1-\cos x = t$, $\sin x dx = dt$ helyettesítést adódik, hogy

$$\int \frac{\sin x dx}{2\left(\sin^2 \frac{x}{2} - 1\right)} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|-1-\cos x| + C = \ln|1+\cos x| + C.$$

21. $\displaystyle\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$

Megoldás. Bővítsük az integrandust $\sin x + \cos x$-el, majd rendezzük. Ekkor

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \cdot \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx =$$

$$\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} dx = \int \frac{-(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x} dx = -\int \frac{\cos 2x}{1+\sin 2x} dx.$$

Alkalmazva a $1 + \sin 2x = t$, $2\cos 2x dx = dt$, $\cos 2x dx = \dfrac{dt}{2}$ helyettesítést adódik, hogy

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\ln|t| + C = -\frac{1}{2}\ln|1+\sin 2x| + C.$$

22. $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x} dx$

Megoldás. Bevezetve a

$$2\sin^2 x + 3\cos^2 x = t, \quad -2\sin x \cos x dx = dt, \quad \sin x \cos x dx = -\frac{dt}{2}$$

helyettesítést az integrál megoldása:

$$\int \frac{\sin x \cos x}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x} dx = -\frac{1}{2}\ln|t| + C = -\frac{1}{2}\ln\left(2\sin^2 x + 3\cos^2 x\right) + C.$$

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$

Megoldás. Alkalmazzuk először a nevezőben a $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ azonosságot. Ekkor

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}.$$

Bevezetve az $\dfrac{x}{2} = t$, $dx = 2dt$ helyettesítést adódik, hogy

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2dt}{2\sin t \cos t} = \int \frac{dt}{\sin t \cos t}.$$

Egyszerűsítsük most az integrandust $\cos^2 t$-vel. Ekkor

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\frac{\sin t \cos t}{\cos^2 t}} = \int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\frac{\sin t}{\cos t}} = \int \frac{dt}{\cos^2 t \ \mathrm{tg}\, t}.$$

Bevezetve most a $\mathrm{tg}\, t = z$, $\dfrac{dt}{\cos^2 t} = dz$ helyettesítés kapjuk, hogy

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + C = \ln|\mathrm{tg}\, t| + C = \ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right| + C.$$

24. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}}$

Megoldás. Bevezetve a $\arcsin x = t$, $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt$ helyettesítést adódik, hogy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{\arcsin x}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}+C = 2\sqrt{\arcsin x}+C.$$

25. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

Megoldás. Alakítsuk át először az integrandust:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-1+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(1-2x+x^2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}.$$

Bevezetve az $x-1=t$, $dx=dt$ helyettesítést adódik, hogy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin(x-1)+C.$$

26. $\displaystyle\int \sin^4 x \sin 2x dx$

Megoldás. Felhasználva a $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ trigonometriai azonosságot és bevezetve a $t=\sin x$, $dt=\cos x dx$ helyettesítést következik, hogy

$$\int \sin^4 x \sin 2x dx = 2\int \sin^5 x \cos x dx = 2\int t^5 dt = 2\frac{t^6}{6}+C = \frac{1}{3}\sin^6 x + C.$$

27. $\displaystyle\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx$

Megoldás. Bevezetve az

$$\ln \operatorname{tg} x = t, \quad \frac{1}{\operatorname{tg} x}\frac{1}{\cos^2 x}dx = dt, \quad \frac{dx}{\sin 2x} = \frac{dt}{2}$$

helyettesítést az integrál a következőképpen oldható meg:

$$\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx = \frac{1}{2}\int t dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2}+C = \frac{t^2}{4}+C = \frac{(\ln \operatorname{tg} x)^2}{4}+C.$$

28. $\displaystyle\int \frac{\ln x\sqrt{\ln x}}{x} dx$

Megoldás. Bevezetve az $\ln x = t$, $\dfrac{dx}{x} = dt$ helyettesítést adódik:

$$\int \frac{\ln x\sqrt{\ln x}}{x} dx = \int t\sqrt{t} dt = \int t^{\frac{3}{2}} dt =$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{t^5}+C = \frac{2}{5}t^2\sqrt{t}+C = \frac{2}{5}\ln^2 x\sqrt{\ln x}+C.$$

29. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$

Megoldás. Alakítsuk át az integrandust:

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-x}{1-x}}dx = \int \sqrt{\frac{(1-x)^2}{1-x^2}}dx =$$

$$= \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Bevezetve a második integrálban az $1-x^2 = t$, $-2xdx = dt$, $xdx = -\frac{dt}{2}$ helyettesítést következik:

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \arcsin x + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{t} + C = \arcsin x + \sqrt{t} + C = \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

30. $\int \sqrt{1-x^2}dx$

Megoldás. Bevezetve az $t = \arcsin x$, $x = \sin t$, $dx = \cos tdt$ helyettesítést kapjuk, hogy

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt = \int \sqrt{\cos^2 t}\cos tdt =$$

$$= \int \cos^2 tdt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2tdt.$$

Alkalmazzuk a második integrálban most a $2t = z$, $2dt = dz$ helyettesítést. Ekkor

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\int \cos zdz = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin z + C = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t + C.$$

Mivel

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t},$$

a megoldás visszahelyettesítés után

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} + C = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C.$$

5.3.2. Parciális integrálás módszere

A parciális integrálás módszere két függvény szorzatának differenciálási szabályából vezethető le.

5.5. Tétel. *Ha u és v folytonosan differenciálható függvények az $[a, b]$ intervallumon, akkor az $[a, b]$ intervallumon érvényes, hogy*

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

Bizonyítás. Az $[a, b]$ intervallumon értelmezett u és v függvények szorzatának deriváltját az

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

formula adja, a szorzat differenciálját pedig

$$d(u(x)v(x)) = v(x)du(x) + u(x)dv(x).$$

Ha az u és v függvények folytonosan differenciálhatók, akkor igaz, hogy

$$u(x)v(x) + C = \int v(x)du(x) + \int u(x)dv(x).$$

Ebből, figyelembe véve, hogy a határozatlan integrál két tetszőleges konstanst is tartalmaz, a C konstanst kihagyhatjuk, s az $[a, b]$ intervallumra igaz lesz, hogy

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x),$$

ahonnan az állítás következik. ◇

Ily módon az $u(x)v'(x)$ függvény primitív függvényének megtalálása visszavezetődik egy részleges integrálásra és a $v(x)u'(x)$ függvény primitív függvényének meghatározására. A fenti tétel alapján végzett integrálási módszert nevezzük parciális integrálásnak. Az egyszerűség kedvéért a parciális integrálás alkalmazásánál a formulából szokás kihagyni az argumentumot. A formula ekkor:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

FELADATOK

Határozzuk meg a parciális integrálás módszerével az alábbi határozatlan integrálok megoldását.

1. $\int xe^x dx$

Megoldás. Alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u = x, \quad dv = e^x dx, \quad \text{akkor} \quad du = dx, \quad v = \int e^x dx = e^x.$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe és elvégezve az integrálást adódik:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x = xe^x - e^x + C = e^x (x - 1) + C.$$

2. $\int x \sin x dx$

Megoldás. Alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u = x, \quad dv = \sin x dx, \quad \text{akkor} \quad du = dx, \quad v = \int \sin x dx = -\cos x.$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe és elvégezve az integrálást kapjuk, hogy

$$\int x \sin x dx = -x \cos x - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

3. $\int (3x+1)\cos 2x dx$

Megoldás. Ha

$$u = 3x+1, \quad dv = \cos 2x dx, \quad \text{akkor} \quad du = 3dx, \quad v = \frac{1}{2}\sin 2x,$$

ahol v kiszámításánál a $2x = t$, $2dx = dt$, $dx = \dfrac{dt}{2}$ helyettesítést és az alábbi számítást alkalmazzuk:

$$v = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int \cos t dt = \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin 2x + C.$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe és elvégezve az integrálást következik, hogy

$$\int (3x+1)\cos 2x dx = \frac{3x+1}{2}\sin 2x - \int \frac{1}{2}\cdot \sin 2x \cdot 3dx = \frac{3x+1}{2}\sin 2x - \frac{3}{2}\int \sin 2x dx.$$

Alkalmazva a kapott integrálban a $2x = t$, $2dx = dt$, $dx = \dfrac{dt}{2}$ helyettesítést adódik:

$$\int (3x+1)\cos 2x dx = \frac{3x+1}{2}\sin 2x - \frac{3}{4}\int \sin t dt =$$

$$= \frac{3x+1}{2}\sin 2x - \frac{3}{4}(-\cos t) + C = \frac{3x+1}{2}\sin 2x + \frac{3}{4}\cos 2x + C.$$

4. $\int x \operatorname{sh} x dx$

Megoldás. Alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u = x, \quad dv = \operatorname{sh} x dx, \quad \text{akkor} \quad du = dx, \quad v = \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x.$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe és elvégezve az integrálást jön, hogy

$$\int x \operatorname{sh} x dx = x \operatorname{ch} x - \int \operatorname{ch} x dx = x \operatorname{ch} x - \int \operatorname{ch} x dx = x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x + C.$$

5. $\int x \sin^2 x dx$

Megoldás. Alkalmazzuk a $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$ trigonometriai azonosságot. Ekkor

$$\int x\sin^2 x dx = \int x \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int x dx - \frac{1}{2}\int x \cos 2x dx.$$

Ha most a második integrálban

$$u = x, \quad dv = \cos 2x dx, \quad \text{akkor} \quad du = dx, \quad v = \frac{1}{2}\sin 2x,$$

akkor behelyettesítve a parciális integrálás képletébe és elvégezve az integrálást adódik:

$$\int x\sin^2 x dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx\right) =$$

$$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cos 2x + C = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C.$$

6. $\int \ln x dx$

Megoldás. Alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u = \ln x, \quad dv = dx, \quad \text{akkor} \quad du = \frac{dx}{x}, \quad v = x.$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe és elvégezve az integrálást következik, hogy

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

7. $\int \operatorname{arctg} x dx$

Megoldás. Alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u = \operatorname{arctg} x, \quad dv = dx, \quad \text{akkor} \quad du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = x.$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe és elvégezve az integrálást kapjuk, hogy

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}dx.$$

Bevezetve a kapott integrálban az $1 + x^2 = t$, $2dx = dt$, $dx = \dfrac{dt}{2}$ helyettesítést kapjuk a megoldást:

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|t| + C = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

8. $\int \arcsin 3x dx$

Megoldás. Alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u = \arcsin 3x, \quad dv = dx, \quad \text{akkor} \quad du = \frac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}}, \quad v = x.$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe és elvégezve az integrálást következik, hogy

$$\int \arcsin 3x dx = x\arcsin 3x - 3\int \frac{x}{\sqrt{1-9x^2}}dx.$$

Bevezetve a kapott integrálban az $1-9x^2=t^2$, $\sqrt{1-9x^2}=t$, $-18xdx=2tdt$, $xdx=-\dfrac{tdt}{9}$ helyettesítést adódik, hogy

$$\int \arcsin 3xdx = x\arcsin 3x + \frac{3}{9}\int \frac{tdt}{t} = x\arcsin 3x + \frac{1}{3}\int dt + C =$$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{3}t + C = x\arcsin x + \frac{1}{3}\sqrt{1-9x^2} + C.$$

9. $\displaystyle\int x\ln xdx$

Megoldás. Alkalmazzuk az integrálás során a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u=\ln x,\quad dv=xdx,\quad \text{akkor}\quad du=\frac{1}{x}dx,\quad v=\int xdx=\frac{x^2}{2}.$$

Helyettesítsünk be a parciális integrálás képletébe és végezzük el az integrálást. Ekkor

$$\int x\ln xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C.$$

10. $\displaystyle\int x^3\ln xdx$

Megoldás. Alkalmazzuk az integrálás során a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u=\ln x,\quad dv=x^3dx,\quad \text{akkor}\quad du=\frac{1}{x}dx,\quad v=\int x^3dx=\frac{x^4}{4}.$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe és elvégezve az integrálást kapjuk, hogy

$$\int x^3\ln xdx = \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{4}\int x^3dx = \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{16}x^4 + C.$$

11. $\displaystyle\int \ln\left(1+x^2\right)dx$

Megoldás. Alkalmazzuk az integrálás során a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u=\ln\left(1+x^2\right),\quad dv=dx,\quad \text{akkor}\quad du=\frac{2x}{1+x^2}dx,\quad v=x.$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe és elvégezve az integrálást következik, hogy

$$\int \ln\left(1+x^2\right)dx = x\ln\left(1+x^2\right) - \int x\cdot\frac{2x}{1+x^2}dx = x\ln\left(1+x^2\right) - 2\int\frac{x^2}{1+x^2}dx =$$

$$= x\ln\left(1+x^2\right) - 2\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = x\ln\left(1+x^2\right) - 2\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= x\ln\left(1+x^2\right) - 2\int dx + 2\int\frac{1}{1+x^2}dx = x\ln\left(1+x^2\right) - 2x + 2\mathrm{arctg}\, x + C.$$

12. $\displaystyle\int x \operatorname{arctg} x dx$

Megoldás. Alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u = \operatorname{arctg} x, \quad dv = x dx, \quad \text{akkor} \quad du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = \frac{x^2}{2}.$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe és elvégezve az integrálást jön, hogy

$$\int x \operatorname{arctg} x dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \operatorname{arctg} x + C.$$

13. $\displaystyle\int x \arcsin x dx$

Megoldás. Alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u = \arcsin x, \quad dv = x dx, \quad \text{akkor} \quad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = \frac{x^2}{2}.$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe és elvégezve az integrálást adódik, hogy

$$\int x \arcsin x dx = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^2}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} \int \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx.$$

A helyettesítési módszerrel megoldott feladatsor 30. feladata alapján

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2},$$

ezért következik, hogy

$$\int x \arcsin x dx = \frac{1}{2} x^2 \arcsin x + \frac{1}{4} \arcsin x + \frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \arcsin x + C =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \arcsin x - \frac{1}{4} \arcsin x + \frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2} + C.$$

14. $\displaystyle\int x \sin x \cos x dx$

Megoldás. Alkalmazva a $\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{2}$ trigonometriai azonosságot kapjuk, hogy

$$\int x \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int x \sin 2x dx.$$

Ha

$$u = x, \quad dv = \sin 2x dx, \quad \text{akkor} \quad du = dx, \quad v = -\frac{1}{2} \cos 2x,$$

akkor behelyettesítve a parciális integrálás képletébe és elvégezve az integrálást adódik:

$$\int x \sin x \cos x dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x\cos 2x - \int\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C.$$

15. $\displaystyle\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx$

Megoldás. Alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u = x, \quad dv = \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx, \quad \text{akkor} \quad du = dx, \quad v = -\frac{1}{\sin x},$$

ahol v kiszámítása a $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$ helyettesítés bevezetésével történt:

$$v = \int dv = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{dt}{t^2} = \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{\sin x}.$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe és elvégezve az integrálást kapjuk a megoldást:

$$\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx = -\frac{x}{\sin x} + \int \frac{1}{\sin x}dx.$$

Felhasználva a helyettesítési módszerrel megoldott feladatsor 23. feladatának eredményét, miszerint

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C,$$

kapjuk, hogy

$$\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx = -\frac{x}{\sin x} + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

16. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

Megoldás. Alkalmazzuk az integrálás során a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u = \ln x, \quad dv = \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad \text{akkor} \quad du = \frac{1}{x}dx, \quad v = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}.$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe és elvégezve az integrálást következik, hogy

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\ln x - 2\int \frac{\sqrt{x}}{x}dx = 2\sqrt{x}\ln x - 2\int \sqrt{x}dx =$$

$$= 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C = 2\sqrt{x}\left(\ln x - 2\right) + C.$$

17. $\displaystyle\int x\ln^2 x dx$

Megoldás. Alkalmazzuk az integrálás során a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u = \ln^2 x, \quad dv = xdx, \quad \text{akkor} \quad du = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}dx, \quad v = \frac{x^2}{2}.$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe és elvégezve az integrálást adódik:

$$\int x \ln^2 x dx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int \frac{x^2}{2}\cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int x\ln x dx.$$

Felhasználva a parciális integrálás módszerévell megoldott feladatsor 9. feladatának eredményét, miszerint

$$\int x \ln x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C,$$

kapjuk, hogy

$$\int x \ln^2 x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln^2 x - \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{4}x^2 + C.$$

18. $\displaystyle\int e^x \cos x dx$

Megoldás. Alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u = \cos x, \quad dv = e^x dx, \quad \text{akkor} \quad du = -\sin x dx, \quad v = e^x.$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe következik, hogy

$$I = \int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx.$$

Alkalmazzuk most újra a kapott integrálban a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u = \sin x, \quad dv = e^x dx, \quad \text{akkor} \quad du = \cos x dx, \quad v = e^x.$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe most azt kapjuk, hogy

$$I = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - I,$$

azaz ugyanazt az integrált kaptuk, amelyből kiindultunk. Ekkor

$$2I = e^x \cos x + e^x \sin x,$$

ahonnan

$$I = \frac{1}{2}e^x\left(\cos x + \sin x\right) + C.$$

19. $\displaystyle\int 3^{2x}\sin(3x+1)dx$

Megoldás. Alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u = 3^{2x}, \quad dv = \sin(3x+1)dx, \quad \text{akkor} \quad du = 2\cdot 3^{2x}\ln 3 dx, \quad v = -\frac{1}{3}\cos(3x+1).$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe adódik, hogy

$$I = \int 3^{2x}\sin(3x+1)dx = -\frac{1}{3}\cdot 3^{2x}\cdot\cos(3x+1) + \frac{2\ln 3}{3}\int 3^{2x}\cos(3x+1)dx.$$

Alkalmazzuk most újra a kapott integrálban a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u = 3^{2x}, \quad dv = \cos(3x+1)dx, \quad \text{akkor} \quad du = 2 \cdot 3^{2x} \ln 3 dx, \quad v = \frac{1}{3}\sin(3x+1).$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe most azt kapjuk, hogy

$$I = -\frac{1}{3} \cdot 3^{2x} \cdot \cos(3x+1) + \frac{2\ln 3}{3}\left(\frac{1}{3} \cdot 3^{2x} \cdot \sin(3x+1) - \int \frac{2\ln 3}{3} \cdot 3^{2x} \cdot \sin(3x+1)dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot 3^{2x} \cdot \cos(3x+1) + \frac{2\ln 3}{9} \cdot 3^{2x} \cdot \sin(3x+1) - \frac{4\ln^2 3}{9} I,$$

azaz ugyanazt az integrált kaptuk, amelyből kiindultunk. Ekkor

$$\left(1 + \frac{4\ln^2 3}{9}\right) I = -\frac{1}{3} \cdot 3^{2x} \cdot \cos(3x+1) + \frac{2\ln 3}{9} \cdot 3^{2x} \cdot \sin(3x+1),$$

ahonnan

$$I = \frac{9 \cdot 3^{2x}}{9 + 4\ln^2 3}\left(\frac{2\ln 3}{9}\sin(3x+1) - \frac{1}{3}\cos(3x+1)\right) + C =$$

$$= \frac{3^{2x}}{9 + 4\ln^2 3}\left(2\ln 3 \ \sin(3x+1) - 3\cos(3x+1)\right) + C.$$

20. * $\displaystyle\int \frac{\ln(1+x^2) - 2x\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)\ln^2(1+x^2)}dx$

Megoldás. Rendezzük az integrandust az alábbi módon:

$$I = \int \frac{\ln(1+x^2) - 2x\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)\ln^2(1+x^2)}dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{2x}\ln\left(1+x^2\right) - \operatorname{arctg} x\right)\frac{2x}{(1+x^2)\ln^2(1+x^2)}dx.$$

Alkalmazzuk az integrálás során a parciális integrálás módszerét. Ha

$$u = \frac{1}{2x}\ln\left(1+x^2\right) - \operatorname{arctg} x, \quad dv = \frac{2x}{(1+x^2)\ln^2(1+x^2)}dx,$$

akkor

$$du = -\frac{1}{2x^2}\ln\left(1+x^2\right)dx, \quad v = -\frac{1}{\ln(1+x^2)},$$

ahol v kiszámítása a $\ln(1+x^2) = t$, $\dfrac{2xdx}{1+x^2} = dt$ helyettesítéssel történt:

$$v = \int dv = \int \frac{2x}{(1+x^2)\ln^2(1+x^2)}dx = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\ln(1+x^2)} + C.$$

Behelyettesítve a parciális integrálás képletébe és elvégezve az integrálást adódik, hogy

$$I = \left(\frac{1}{2x}\ln\left(1+x^2\right) - \operatorname{arctg} x\right)\left(-\frac{1}{\ln(1+x^2)}\right) -$$

$$-\int\left(-\frac{1}{\ln(1+x^2)}\right)\left(-\frac{1}{2x^2}\ln\left(1+x^2\right)\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{2x} + \frac{\operatorname{arctg} x}{\ln(1+x^2)} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{2x} + \frac{\operatorname{arctg} x}{\ln(1+x^2)} + \frac{1}{2x} + C = \frac{\operatorname{arctg} x}{\ln(1+x^2)} + C.$$

5.4. Racionális és racionalizálható integrálok

5.4.1. Racionális függvények integrálása

5.3. Definíció. *Racionális törtfüggvénynek vagy röviden racionális törtnek nevezzük két polinom, például $P(x)$ és $Q(x)$, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ hányadosát, ahol a $Q(x)$ osztópolinom nem a nullapolinom.*

Racionális törtfüggvényekkel ugyanolyan szabályok szerint végzünk műveleteket, mint a racionális számokkal. A racionális törtek egyenlőségét ugyanúgy értelmezzük, mint a törtek egyenlőségét az elemi aritmetikában. A továbbiakban csak valós együtthatós racionális törtekkel fogunk foglalkozni.

5.4. Definíció. *Rövidíthetetlennek nevezünk egy racionális törtet, ha számlálója relatív prím a nevezőjéhez.*

5.6. Tétel. *Minden racionális tört egyenlő egy rövidíthetetlen törttel, mely a számláló és nevező nulladfokú közös tényezőitől eltekintve, egyértelműen meghatározott.*

Bizonyítás. Bármely racionális törtet egyszerűsíthetjük számlálójának és nevezőjének legnagyobb közös osztójával, miáltal egy az eredetivel egyenlő rövidíthetetlen törtet kapunk. Ha továbbá a $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ és a $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ rövidíthetetlen törtek egyenlők egymással, azaz $P(x)\psi(x) = Q(x)\varphi(x)$, akkor $P(x)$ és $Q(x)$ relatív prím voltából következik, hogy $\varphi(x)$ osztható a $P(x)$ polinommal, $\varphi(x)$ és $\psi(x)$ relatív prím voltából pedig következik, hogy $P(x)$ osztható $\varphi(x)$-szel. Eszerint $P(x) = C\varphi(x)$, akkor viszont $Q(x) = C\psi(x)$ is következik. ◇

5.5. Definíció. *Nevezzünk egy racionális törtet szabályosnak vagy valódinak, ha számlálójának fokszáma alacsonyabb, mint a nevezőjéé.*

Ha megegyezés szerint a szabályos törtek közé számítjuk a nullapolinomot is, akkor érvényes a következő állítás:

5.7. Tétel. *Minden racionális tört egyértelműen előállítható egy polinom és egy szabályos tört összegeként.*

Bizonyítás. Ha adott a $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ racionális tört, s ha a számlálót a nevezővel osztva az

$$P(x) = Q(x)S(x) + R(x)$$

egyenlőséget nyerjük, ahol $R(x)$ fokszáma kisebb, mint $Q(x)$-é, akkor könnyű belátni, hogy

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Ha továbbá fennáll az

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \bar{S}(x) + \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

egyenlőség, ahol $\varphi(x)$ fokszáma kisebb $\psi(x)$ fokszámánál, akkor a két egyenlet kivonásával kapjuk, hogy

$$S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} - \bar{S}(x) - \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0,$$

ahonnan

$$S(x) - \bar{S}(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} - \frac{R(x)}{Q(x)},$$

ebből pedig

$$S(x) - \bar{S}(x) = \frac{\varphi(x)Q(x) - \psi(x)R(x)}{\psi(x)Q(x)}.$$

Minthogy most a bal oldalon polinom áll, a jobb oldalon pedig szabályos tört, amiről könnyű meggyőződni, azért szükségképpen $S(x) = \bar{S}(x)$ és

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} - \frac{R(x)}{Q(x)} = 0.$$

◇

A szabályos racionális törteket további vizsgálatnak vethetjük alá. Először is emlékeztetünk arra, hogy az *irreducibilis valós polinomok* $x - a$ alakú lineáris polinomok lehetnek, ahol a valós szám, illetve $x^2 - px + q$ alakú másodfokú polinomok, ahol $p, q \in \mathbf{R}$ és $p^2 - 4q < 0$. Az irreducibilis valós másodfokú polinomoknak nincsenek valós gyökei.

5.6. Definíció. *A* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *szabályos racionális törtet elemi törtnek nevezzük, ha nevezője, $Q(x)$ valamely irreducibilis $p(x)$ polinom hatványa,*

$$Q(x) = p^k(x) \quad (k \geq 1),$$

a számláló $P(x)$ pedig alacsonyabb fokú, mint $p(x)$.

5.3. Példa. Néhány elemi tört: $\frac{1}{x-2}$, $\frac{2}{(x+1)^3}$, $\frac{\pi}{x^2+1}$, $\frac{-5x}{x^2+x+1}$, $\frac{x-1}{(x^2-x+1)^2}$.

Érvényes a következő állítás, amit bizonyítás nélkül fogunk megadni:

5.8. Tétel. *Minden szabályos racionális tört egyértelműen felbontható elemi törtek összegére.*

FELADATOK

Oldjuk meg a következő racionális integrálokat.

1. $\displaystyle\int \frac{3}{x^2 - 4x} dx$

Megoldás. Az integrandus racionális törtfüggvény, bontsuk tehát elemi törtek összegére. Mivel $x^2 - 4x = x(x-4)$, ezért

$$\frac{3}{x^2 - 4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4}$$

alakban keressük az elemi törtek öszegét. Szorozzuk be mindkét oldalt a baloldali nevezővel. Ekkor

$$3 = A(x-4) + Bx.$$

$x = 0$ esetén a fenti egyenlőségből $3 = -4A$ adódik, $x = 4$ esetén pedig $3 = 4B$, amelyből a megoldások $A = -\frac{3}{4}$ és $B = \frac{3}{4}$, az integrandus pedig felírható mint

$$\frac{3}{x^2-4x} = \frac{-\frac{3}{4}}{x} + \frac{\frac{3}{4}}{x-4} = -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-4},$$

az integrálási feladat pedig a következő módon oldható meg:

$$\int \frac{3}{x^2-4x}dx = \int \left(-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-4}\right)dx = -\frac{3}{4}\int \frac{1}{x}dx + \frac{3}{4}\int \frac{1}{x-4}dx =$$

$$= -\frac{3}{4}\ln|x| + \frac{3}{4}\ln|x-4| + C = \frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-4}{x}\right| + C.$$

2. $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2-x-2}dx$

Megoldás. Mivel az integrandus racionális törtfüggvény és a nevezője felírható $x^2-x-2 = (x+1)(x-2)$ alakban, ezért

$$\frac{3x}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

alakban keressük az elemi törtek öszegét. Szorozzuk be mindkét oldalt a baloldali nevezővel és rendezzük a kifejezést. Ekkor

$$3x = A(x-2) + B(x+1), \quad \text{illetve} \quad 3x = (A+B)x - 2A + B.$$

A megfelelő együtthatók kiegyenlítésével kapjuk az

$$A + B = 3, \quad -2A + B = 0$$

két egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszert, amelynek megoldása $A = 1$, $B = 2$. Ekkor az integrálási feladat megoldása:

$$\int \frac{3x}{x^2-x-2}dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2}\right)dx = \int \frac{1}{x+1}dx + 2\int \frac{1}{x-2}dx =$$

$$= \ln|x+1| + 2\ln|x-2| + \ln|C| = \ln\left|C(x+1)(x-2)^2\right|.$$

3. $\displaystyle\int \frac{-x^2-x-7}{x^3+3x^2-4}dx$

Megoldás. Mivel az integrandus racionális törtfüggvény és a nevezője felírható $x^3+3x^2-4 = (x-1)(x+2)^2$ alakban, ezért

$$\frac{-x^2-x-7}{x^3+3x^2-4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

alakban keressük az elemi törtek öszegét. Szorozzuk be mindkét oldalt a baloldali nevezővel és rendezzük a kifejezést. Ekkor

$$-x^2 - x - 7 = A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1).$$

$x = 1$ esetén a fenti egyenlőségből $-9 = 9A$, illetve $A = -1$ adódik, $x = -2$ esetén $-9 = -3C$, illetve $C = 3$, $x = 0$ behelyettesítésével pedig $-7 = -4 - 2B - 3$, illetve $B = 0$. Ekkor az integrálási feladat megoldása:

$$I = \int \frac{-x^2 - x - 7}{x^3 + 3x^2 - 4} dx = \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{3}{(x+2)^2} \right) dx = -\int \frac{1}{x-1} + 3 \int \frac{1}{(x+2)^2} dx.$$

Az $x - 1 = t$, $dx = dt$, illetve $x + 2 = z$, $dx = dz$ helyettesítések bevezetésével, majd az integrálás elvégzésével kapjuk, hogy

$$I = -\int \frac{dt}{t} + 3 \int \frac{dz}{z^2} = -\ln|t| - \frac{3}{z} + C = -\ln|x-1| - \frac{3}{x+2} + C.$$

4. $\displaystyle\int \frac{-3x^2 + 2x - 21}{x^3 - 3x^2 + 5x - 15} dx$

Megoldás. Mivel az integrandus racionális törtfüggvény és a nevezője felírható $x^3 - 3x^2 + 5x - 15 = (x-3)(x^2+5)$ alakban, ezért

$$\frac{-3x^2 + 2x - 21}{(x-3)(x^2+5)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx + C}{x^2 + 5}$$

alakban keressük az elemi törtek öszegét. Szorozzuk be mindkét oldalt a baloldali nevezővel és rendezzük a kifejezést. Ekkor

$$-3x^2 + 2x - 21 = A(x^2 + 5) + (Bx + C)(x - 3).$$

$x = 3$ esetén a fenti egyenlőségből $-42 = 14A$, illetve $A = -3$ adódik, $x = 0$ esetén $-21 = -15 - 3C$, illetve $C = 2$, $x = 1$ behelyettesítésével pedig $-4 = -2B - 4$, illetve $B = 0$ a megoldás. Ekkor az integrálási feladat megoldása:

$$I = \int \frac{-3x^2 + 2x - 21}{x^3 - 3x^2 + 5x - 15} dx = \int \left(\frac{-3}{x-3} + \frac{2}{x^2+5} \right) dx =$$

$$= -3 \int \frac{1}{x-3} dx + 2 \int \frac{1}{x^2+5} dx.$$

Emeljünk ki 5-öt a második integrál nevezőjéből, majd vezessük be az $x - 3 = t$, $dx = dt$ és $\frac{x}{\sqrt{5}} = s$, $dx = \sqrt{5} ds$ helyettesítéseket. Ekkor

$$I = -3 \int \frac{dt}{t} + \frac{2}{5} \int \frac{\sqrt{5} ds}{s^2 + 1} = -3 \ln|t| + \frac{2\sqrt{5}}{5} \operatorname{arctg} s + C =$$

$$= -3 \ln|x-3| + \frac{2\sqrt{5}}{5} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

5. $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^3-x}dx$

Megoldás. Mivel az integrandus racionális törtfüggvény és a nevezője felírható $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ alakban, ezért

$$\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

alakban keressük az elemi törtek öszegét. Szorozzuk be mindkét oldalt a baloldali nevezővel és rendezzük a kifejezést. Ekkor

$$x-3 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$$

$x = 0$ esetén a fenti egyenlőségből $-3 = -A$, illetve $A = 3$ adódik, $x = 1$ esetén $-2 = 2B$, illetve $B = -1$, $x = -1$ behelyettesítésével pedig $-4 = 2C$, illetve $C = -2$ a megoldás. Ekkor az integrálási feladat megoldása:

$$I = \int \frac{x-3}{x^3-x}dx = \int \left(\frac{3}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{-2}{x+1}\right) dx = 3\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} - 2\int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= 3\ln|x| - \ln|x-1| - 2\ln|x+1| + \ln|C| = \ln\left|\frac{Cx^3}{x^2-1}\right|.$$

6. $\displaystyle\int \frac{-2x^3-2x+2}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}dx$

Megoldás. Mivel az integrandus racionális törtfüggvény, nevezője pedig irreducibilis másodfokú polinomok szorzata, ezért

$$\frac{-2x^3-2x+2}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}$$

alakban keressük az elemi törtek öszegét. Szorozzuk be mindkét oldalt a baloldali nevezővel és rendezzük a kifejezést. Ekkor

$$-2x^3 - 2x + 2 = (Ax+B)(x^2-x+1) + (Cx+D)(x^2+x+1).$$

$x = 0$ esetén a fenti egyenlőségből $2 = B + D$ adódik, $x = 1$ érték behelyettesítésével $-2 = (A+B)+(C+D)\cdot 3$, $x = -1$ behelyettesítésével $6 = (-A+B)\cdot 3+(-C+D)$, $x = 2$ behelyettesítésével pedig az $-18 = (2A + B)\cdot 3 + (2C + D)\cdot 7$ egyenletet kapjuk. A kapott négy egyenletből álló négyismeretlenes egyenletrendszer

$$\begin{aligned} B + D &= 2, \\ A + B + 3C + 3D &= -2, \\ -3A + 3B - C + D &= 6, \\ 6A + 3B + 14C + 7D &= -18. \end{aligned}$$

Az első egyenletből $D = 2 - B$, s ezt behelyettesítve a többi egyenletbe adódik a következő három lineáris egyenletből álló háromismeretlenes egyenletrendszer

$$A - 2B + 3C = -8, \quad -3A - 2B - C = 4, \quad 3A - 2B + 7C = -16,$$

amelynek megoldása $A = 0$, $B = 1$ és $C = -2$, valamint $D = 1$. Ekkor az integrálási feladat megoldása:

$$I = \int \frac{-2x^3 - 2x + 2}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} dx = \int \left(\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{-2x+1}{x^2-x+1} \right) dx =$$
$$= \int \frac{dx}{x^2+x+1} - \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx.$$

Az első integrál megoldásához átírjuk a nevezőt

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]$$

formába és bevezetjük a $\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = s$, $\frac{2}{\sqrt{3}}dx = ds$, $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}ds$ helyettesítést, a másik integrálban pedig az $x^2 - x + 1 = t$, $(2x-1)dx = dt$ helyettesítést vezetjük be. Ekkor

$$I = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} - \int \frac{dt}{t} = \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{ds}{s^2+1} - \ln|t| =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg} s - \ln|t| + C = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \ln\left(x^2-x+1\right) + C.$$

7. $\displaystyle\int \frac{x^3+x-1}{x^4+x^3+2x^2+x+1}dx$

Megoldás. Alakítsuk át a nevezőt szorzattá:

$$x^4+x^3+2x^2+x+1 = x^4+x^3+x^2+x^2+x+1 =$$
$$= x^2(x^2+x+1) + x^2+x+1 = (x^2+x+1)(x^2+1).$$

Így az integrál megoldásához

$$\frac{x^3+x-1}{(x^2+1)(x^2+x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

alakban keressük az elemi törtek öszegét. Szorozzuk be mindkét oldalt a baloldali nevezővel és rendezzük a kifejezést. Ekkor

$$x^3+x-1 = (Ax+B)(x^2+x+1) + (Cx+D)(x^2+1).$$

$x = 0$ esetén a fenti egyenlőségből $-1 = B + D$ adódik, az $x = 1$ érték behelyettesítésével $1 = (A+B)\cdot 3 + (C+D)\cdot 2$, az $x = -1$ érték behelyettesítésével $-3 = (-A+B)\cdot 1 + (-C+D)\cdot 2$, az $x = 2$ érték behelyettesítésével pedig az $9 = (2A+B)\cdot 7 + (2C+D)\cdot 5$ egyenletet kapjuk. A kapott négy egyenletből álló négyismeretlenes egyenletrendszer

$$\begin{aligned} B + D &= -1, \\ 3A + 3B + 2C + 2D &= 1, \\ -A + B - 2C + 2D &= -3, \\ 14A + 7B + 10C + 5D &= 9. \end{aligned}$$

Az első egyenletből $D = -1 - B$, s ezt behelyettesítve a többi egyenletbe adódik a következő három lineáris egyenletből álló háromismeretlenes egyenletrendszer

$$3A + B + 2C = 3, \quad -A - B - 2C = -1, \quad 7A + B + 5C = 7,$$

amelynek megoldása $A = 1$, $B = 0$ és $C = 0$, valamint $D = -1$. Ekkor az integrálási feladat megoldása:

$$I = \int \frac{x^3 + x - 1}{x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1} dx = \int \left(\frac{x}{x^2 + 1} + \frac{-1}{x^2 + x + 1} \right) dx =$$

$$= \int \frac{xdx}{x^2 + 1} - \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx.$$

Az első integrálban bevezetjük az $x^2 + 1 = t$, $2xdx = dt$, $xdx = \dfrac{dt}{2}$ helyettesítést, a második integrál megoldásához pedig átírjuk a nevezőt

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}} x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right]$$

formába és bevezetjük a $\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} = s$, $\dfrac{2}{\sqrt{3}} dx = ds$, $dx = \dfrac{\sqrt{3}}{2} ds$ helyettesítést. Ekkor

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} - \frac{4}{3} \int \frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln |t| - \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{ds}{s^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} s + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

8. $\displaystyle\int \frac{2x^4 - 10x^3 + 7x^2 + 4x + 3}{x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2} dx$

Megoldás. Először bontsuk elemi törtek összegére a $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ valós szabályos racionális törtet, ahol $P(x) = 2x^4 - 10x^3 + 7x^2 + 4x + 3$ és $Q(x) = x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2$. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$Q(x) = (x + 2)(x - 1)^2 (x^2 + 1),$$

s emellett az $x + 2$, $x - 1$, $x^2 + 1$ polinomok mindegyike irreducibilis. A keresett felbontás szükségképpen

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x - 1} + \frac{Dx + E}{x^2 + 1}$$

alakú, ahonnan az A, B, C, D és E paraméterek értékét kell meghatározni. Szorozva a fenti egyenlőség mindkét oldalát a $Q(x)$ polinommal, következik a

$$\begin{aligned} P(x) &= A(x-1)^2(x^2+1) + B(x+2)(x^2+1) + C(x+2)(x-1)(x^2+1) + \\ &+ Dx(x+2)(x-1)^2 + E(x+2)(x-1)^2 \end{aligned}$$

egyenlőség. Kiegyenlítve a kapott egyenlőség jobb és bal oldalán szereplő polinomok megfelelő együtthatóit, öt egyenletből álló, egyértelműen megoldható lineáris egyenletrendszert kapunk, A, B, C, D, E ismeretlenekkel. Az ismeretlenek meghatározására azonban más módszer is választható. Ha a kapott egyenlőségben az $x = -2$ behelyettesítést elvégezzük, a $45A = 135$ egyenlőséget kapjuk, ahonnan $A = 3$ adódik. $x = 1$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $6B = 6$, azaz $B = 1$. Ezután helyettesítsünk az egyenlőségbe $x = 0$-t, majd $x = -1$-et. Figyelembe véve A és B ismert értékeit, kapjuk a

$$\begin{aligned} -2C + 2E &= -2 \\ -4C - 4D + 4E &= -8 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Innen $D = 1$. Végül helyettesítsünk $x = 2$-t a fenti egyenlőségbe, majd a már kiszámolt értékek felhasználásával együtt nyerjük a $20C + 4E = -52$ egyenletet, ami a fenti egyenletrendszerrel együtt vezet a $C = -2$ és $E = -3$ értékekhez. Így tehát

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{3}{x+2} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + \frac{x-3}{x^2+1}.$$

A fenti levezetés alapján

$$I = \int \frac{2x^4 - 10x^3 + 7x^2 + 4x + 3}{x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2} dx =$$

$$= \int \left(\frac{3}{x+2} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + \frac{x-3}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \int \frac{3}{x+2} dx \int + \frac{1}{(x-1)^2} dx - \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{3}{x^2+1} dx.$$

Az $s = x + 2$ és $t = x - 1$ helyettesítés bevezetésével, ahol $ds = dx$ és $dt = dx$, valamint a $w = x^2 + 1$ helyettesítés bevezetésével, ahol $dw = 2xdx$, adódik

$$I = 3 \int \frac{1}{s} ds + \int \frac{1}{t^2} dt - 2 \int \frac{1}{t} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{w} dw - 3 \int \frac{1}{x^2+1} dx =$$

$$= 3 \ln |s| - \frac{1}{t} - 2 \ln |t| + \frac{1}{2} \ln |w| - 3 \operatorname{arctg} x + C.$$

Visszahelyettesítés után kapjuk, hogy

$$I = 3 \ln |x+2| - \frac{1}{x-1} - 2 \ln |x-1| + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 3 \operatorname{arctg} x + C.$$

9. $\displaystyle \int \frac{x^4}{(x-1)(x+2)} dx$

Megoldás. Az integrandus egy nem szabályos racionális törtfüggvény, ami azt jelenti, hogy fel kell írni egy polinom és egy szabályos racionális tört összegeként. A számlálót a nevezővel elosztva, rendezés után kapjuk, hogy

$$\frac{x^4}{(x-1)(x+2)} = x^2 - x + 3 + \frac{-5x+6}{(x-1)(x+2)},$$

és így

$$I = \int \frac{x^4}{(x-1)(x+2)}dx =$$
$$= \int \left(x^2 - x + 3 + \frac{-5x+6}{(x-1)(x+2)}\right) dx =$$
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x + \int \frac{-5x+6}{(x-1)(x+2)}dx.$$

A racionális törtfüggvény integrálásához a racionális törtfüggvényt fel kell bontani elemi törtek összegére. Konkrét esetben:

$$\frac{-5x+6}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{x+2}.$$

Ebből következik, hogy

$$I = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{16}{3}\frac{1}{x+2}\right) dx.$$

Az $s = x - 1$ és $t = x + 2$ helyettesítés bevezetésével, ahol $ds = dx$ és $dt = dx$, adódik, hogy

$$I = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{1}{3} \int \frac{1}{s}ds - \frac{16}{3} \int \frac{1}{t}dt =$$
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{1}{3} \ln|s| - \frac{16}{3} \ln|t| + C.$$

Visszahelyettesítés után kapjuk a következő eredményt:

$$I = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{16}{3} \ln|x+2| + C =$$
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{1}{3} \ln \frac{|x-1|}{(x+2)^{16}} + C.$$

10. $\displaystyle\int \frac{x^4 + 7x^3 + 14x^2 + 5x - 11}{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}dx$

Megoldás. Az integrandus egy nem szabályos racionális törtfüggvény, ami azt jelenti, hogy fel kell írni egy polinom és egy szabályos racionális tört összegeként. A számlálót a nevezővel elosztva, rendezés után kapjuk, hogy

$$\frac{x^4 + 7x^3 + 14x^2 + 5x - 11}{x^3 + 5x^2 + 3x - 9} = x + 2 + \frac{x^2 + 8x + 7}{x^3 + 5x^2 + 3x - 9},$$

s így

$$I = \int \frac{x^4 + 7x^3 + 14x^2 + 5x - 11}{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}dx = \int \left(x + 2 + \frac{x^2 + 8x + 7}{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}\right) dx =$$
$$= \int (x+2)\, dx + \int \frac{x^2 + 8x + 7}{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \int \frac{x^2 + 8x + 7}{(x-1)(x+3)^2}dx.$$

A racionális törtfüggvény integrálásához a racionális törtfüggvényt fel kell bontani elemi törtek összegére. Konkrét esetben:

$$\frac{x^2+8x+7}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x+3)^2}.$$

Ebből következik, hogy

$$I = \frac{x^2}{2} + 2x + \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{(x+3)^2}.$$

Az $s = x-1$ és $t = x+3$ helyettesítés bevezetésével, ahol $ds = dx$ és $dt = dx$, adódik, hogy

$$I = \frac{x^2}{2} + 2x + \int \frac{ds}{s} + 2\int \frac{dt}{(t)^2} = \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|s| - \frac{2}{t} + C = \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x-1| - \frac{2}{x+3} + C.$$

5.4.2. Irracionális függvények integrálása

Az irracionális integrálok megoldásakor arra törekszünk, hogy megfelelő helyettesítések bevezetésével az adott integrált racionális törtfüggvény integrálására vezessük vissza. Irracionális integrálok esetén a típusok és helyettesítések igen sokfélék lehetnek. Közülük csak a két legegyszerűbbet mutatjuk meg. A következőkben az R racionális törtkifejezést jelöl.

a) $R\left(x, \sqrt[p_1]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[p_2]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}, ..., \sqrt[p_k]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ integrál esetén a helyettesítés

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n, \quad \text{ahol} \quad n = LKT(p_1, p_2, ..., p_k).$$

Ha $c = 0$ és $d = 1$, akkor ez az integráltipus a legegyszerűbb alakot veszi fel. Mi csak ilyen integrálokkal foglalkozunk.

FELADATOK

Határozzuk meg a következő irracionális integrálok megoldását.

1. $\displaystyle\int x\sqrt[3]{2x+3}dx$

Megoldás. Az integrál megoldásához vezessük be a $2x+3 = t^3$, $x = \dfrac{t^3-3}{2}$, $2dx = 3t^2dt$, $dx = \dfrac{3}{2}t^2dt$ helyettesítést, az adott integrál pedig így alakul:

$$\int x\sqrt[3]{2x+3}dx = \int \frac{t^3-3}{2} \cdot \sqrt[3]{t^3} \cdot \frac{3}{2}t^2dt = \frac{3}{4}\int (t^3-3)t^3dt = \frac{3}{4}\int (t^6-3t^3)dt =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{t^7}{7} - 3\cdot\frac{t^4}{4}\right) + C = \frac{3}{4}t^4\left(\frac{t^3}{7} - \frac{3}{4}\right) + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(2x+3)^4}\left(\frac{2x+3}{7} - \frac{3}{4}\right) + C =$$

$$= \frac{3}{4}(2x+3)\sqrt[3]{2x+3}\left(\frac{8x+12-21}{28}\right) + C = \frac{3}{112}(2x+3)(8x-9)\sqrt[3]{2x+3} + C.$$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}}$

Megoldás. Vegyük észre, hogy az integrandus irracionális függvény, ahol minden gyök alatti mennyiség ugyanaz az x, és megegyezik az a) típusú integrállal $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$ esetén. Mivel a gyökkitevők 2 és 3, ezért $n = LKT(2,3) = 6$, így a helyettesítés $x = t^6$, $dx = 6t^5dt$. Ekkor

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}} = \int \frac{6t^5dt}{\sqrt[3]{t^6}+2\sqrt{t^6}} = 6\int \frac{t^5dt}{t^2+2t^3} = 6\int \frac{t^3dt}{1+2t},$$

valóban racionális integrál. Mivel

$$\frac{t^3}{1+2t} = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{4} + \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2t+1},$$

ezért a keresett integrál

$$I = 6\int\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2t+1}\right)dt = 3\int t^2dt - \frac{3}{2}\int tdt + \frac{3}{4}\int dt - \frac{3}{4}\int\frac{dt}{2t+1} =$$

$$= t^3 - \frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{4}t - \frac{3}{4}\ln|2t+1| + C.$$

Mivel $x = t^6$ volt a helyettesítés, ahonnan $t = \sqrt[6]{x}$, ezért

$$I = (\sqrt[6]{x})^3 - \frac{3}{4}(\sqrt[6]{x})^2 + \frac{3}{4}\sqrt[6]{x} - \frac{3}{4}\ln|2\sqrt[6]{x}+1| + C =$$

$$= \sqrt{x} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x} + \frac{3}{4}\sqrt[6]{x} - \frac{3}{4}\ln|2\sqrt[6]{x}+1| + C.$$

3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$

Megoldás. Mivel $\sqrt[4]{x^3} = \sqrt[4]{x\cdot x^2} = \sqrt[4]{x}\cdot\sqrt{x}$ és így

$$I = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt[4]{x}+1}dx,$$

ebből az következik, hogy $n = LKT(2,4) = 4$, vagyis az $x = t^4$, $dx = 4t^3dt$ helyettesítést kell bevezetni. Ekkor

$$I = \int \frac{\sqrt{t^4}\cdot 4t^3dt}{\sqrt{t^4}\cdot\sqrt[4]{t^4}+1} = 4\int\frac{t^4}{t^3+1}dt =$$

$$= 4\int\left(t - \frac{t}{t^3+1}\right)dt = 4\int tdt - 4\int\frac{t}{(t+1)(t^2-t+1)}dt.$$

A második integrál racionális tört, amely felbontható elemi törtek összegére, azaz

$$\frac{t}{(t+1)(t^2-t+1)} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{t+1}{t^2-t+1},$$

ezért a továbbiakban

$$I = 4 \cdot \frac{t^2}{2} + \frac{4}{3}\int \frac{dt}{t+1} - \frac{4}{3}\int \frac{dt}{(t^2 - t + \frac{1}{4}) + \frac{3}{4}} =$$

$$= 2t^2 + \frac{4}{3}\ln|t+1| - \frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\int \frac{dt}{\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}.$$

Vezessük most be a $\dfrac{2t-1}{\sqrt{3}} = z$, $dt = \dfrac{\sqrt{3}dz}{2}$ helyettesítést. Ekkor

$$I = 2t^2 + \frac{4}{3}\ln|t+1| - \frac{16}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{dz}{z^2+1} = 2t^2 + \frac{4}{3}\ln|t+1| - \frac{8\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg} z + C.$$

Visszahelyettesítve az eredeti változóra adódik, hogy $t = \sqrt[4]{x}$, ezért

$$I = 2\sqrt{x} + \frac{4}{3}\ln\left|\sqrt[4]{x} + 1\right| - \frac{8\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-5} - \sqrt[4]{2x-5}}$

Megoldás. Mivel $n = LKT(2,4) = 4$, vagyis az $2x-5 = t^4$, $2dx = 4t^3dt$, $dx = 2t^3dt$ helyettesítést kell bevezetni. Ekkor

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-5} - \sqrt[4]{2x-5}} = \int \frac{2t^3dt}{\sqrt{t^4} - \sqrt[4]{t^4}} = 2\int \frac{t^3dt}{t^2 - t} = 2\int \frac{t^2dt}{t-1} =$$

$$= 2\int \frac{(t^2-1)+1}{t-1}dt = 2\int \frac{(t-1)(t+1)}{t-1}dt + 2\int \frac{dt}{t-1} =$$

$$= 2\int (t+1)dt + 2\int \frac{dt}{t-1} = t^2 + 2t + 2\ln|t-1| + C.$$

Mivel most $t = \sqrt[4]{2x-5}$, ezért visszatérve az eredeti változóra kapjuk, hogy

$$I = \sqrt{2x-5} + 2\sqrt[4]{2x-5} + 2\ln\left|\sqrt[4]{2x-5} - 1\right| + C.$$

5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$

Megoldás. Vezessük be az $x+1 = t^2$, $t = \sqrt{x+1}$, $dx = 2tdt$ helyettesítést. Ekkor

$$I = \int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx = \int \frac{t+1}{t-1}\cdot 2tdt = 2\int \frac{t^2+t}{t-1}dt = 2\int\left(t + 2 + \frac{2}{t-1}\right)dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^2}{2} + 2t + 2\ln|t-1|\right) + C = t^2 + 4t + 4\ln|t-1| + C.$$

Visszatérve az eredeti változóra,

$$I = x + 1 + 4\sqrt{x+1} + 4\ln|\sqrt{x+1} - 1| + C.$$

b) $R\left(x, \sqrt{px^2+qx+r}\right) dx$ $(p, q, r \in \mathbf{R})$ típusú irracionális integrálokat vagy trigonometrikus vagy hiperbolikus helyettesítéssel oldhatunk meg attól függően, hogy az px^2+qx+r másodfokú trinom négyzetek összegeként vagy négyzetek különbségeként írható fel. Ha $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, akkor

$$R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right) dx \quad \text{esetén a helyettesítés} \quad x = a\sin t \quad \text{vagy} \quad x = a\cos t,$$

$$R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right) dx \quad \text{esetén a helyettesítés} \quad x = a\,\mathrm{sh}\,t,$$

$$R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) dx \quad \text{esetén a helyettesítés} \quad x = a\,\mathrm{ch}\,t.$$

A megadott helyettesítéseket és a

$$\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}, \quad \cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}, \quad \mathrm{sh}^2 t = \frac{\mathrm{ch}\,2t-1}{2}, \quad \mathrm{ch}^2 t = \frac{\mathrm{ch}\,2t+1}{2}$$

azonosságokat alkalmazva a kapott integrálok alapintegrálokra vezethetők vissza.

FELADATOK

Oldjuk meg a következő irracionális integrálokat.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}$

Megoldás. A fentiek alapján vezessük be az $x = \sin t$, $dx = \cos t dt$ helyettesítést. Ekkor

$$I = \int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos t dt}{(\sin^2 t - 1)\sqrt{1-\sin^2 t}} =$$

$$= \int \frac{\cos t dt}{(-\cos^2 t)\sqrt{\cos^2 t}} = -\int \frac{dt}{\cos^2 t} = -\mathrm{tg}\, t + C.$$

Mivel

$$t = \arcsin x \quad \text{és} \quad \mathrm{tg}\, t = \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}},$$

ezért visszatérve az eredeti változóra adódik, hogy

$$I = -tg(\arcsin x) + C = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$

Megoldás. A gyök alatti másodfokú kifejezés most négyzetek összegeként írható fel $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$ alakban, ezért alkalmazzuk az $x+1 = \mathrm{sh}\, t$, $dx = \mathrm{ch}\, t dt$ helyettesítést. Ekkor

$$I = \int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{(x+1)^2+1}} = \int \frac{\mathrm{ch}\, t dt}{\mathrm{sh}^2 t \cdot \sqrt{\mathrm{sh}^2 t + 1}} =$$

$$= \int \frac{\operatorname{ch} t dt}{\operatorname{sh}^2 t \cdot \sqrt{\operatorname{ch}^2 t}} = \int \frac{dt}{\operatorname{sh}^2 t} = -\operatorname{cth} t + C = -\frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 t + 1}}{\operatorname{sh} t} + C.$$

Mivel $t = \operatorname{arsh}(x+1)$, ezért visszatérve az eredeti változóra azt kapjuk, hogy

$$I = -\frac{\sqrt{(x+1)^2+1}}{x+1} + C = -\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1} + C.$$

3. $\int x\sqrt{x-x^2}dx$

Megoldás. Mivel $x - x^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + x - x^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - x + x^2\right) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$, ezért

$$I = \int x\sqrt{x-x^2}dx = \int x\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int x\sqrt{1-(2x-1)^2}dx.$$

Vezessük be a $2x - 1 = \sin t$, $x = \frac{1+\sin t}{2}$, $2dx = \cos t dt$ helyettesítést. Ekkor

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{1+\sin t}{2} \cdot \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \frac{\cos t dt}{2} = \frac{1}{8}\int (1+\sin t)\cos^2 t dt =$$

$$= \frac{1}{8}\int \cos^2 t dt + \frac{1}{8}\int \cos^2 t \sin t dt.$$

Az első integrálban alkalmazzuk a $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$ trigonometrikus azonosságot, a másikban pedig bevezetjük a $\cos t = z$, $-\sin t dt = dz$, $\sin t dt = -dz$ helyettesítést. Ekkor

$$I = \frac{1}{8}\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt - \frac{1}{8}\int z^2 dz = \frac{1}{16}\int (1+\cos 2t)dt - \frac{1}{8}\frac{z^3}{3} =$$

$$= \frac{1}{16}\int dt + \frac{1}{16}\int \cos 2t dt - \frac{1}{8}\frac{\cos^3 t}{3} = \frac{1}{16}t + \frac{1}{16}\frac{\sin 2t}{2} - \frac{1}{24}\cos^3 t + C =$$

$$= \frac{1}{16}t + \frac{1}{16}\frac{2\sin t\cos t}{2} - \frac{1}{24}(\cos t)^3 + C.$$

Térjünk most vissza az eredeti x változóra. Mivel most $\sin t = 2x - 1$, ahonnan $t = \arcsin(2x-1)$ és $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-(2x-1)^2} = \sqrt{4x-4x^2} = 2\sqrt{x-x^2}$, ezért

$$I = \frac{1}{16}\arcsin(2x-1) + \frac{1}{8}(2x-1)2\sqrt{x-x^2} - \frac{1}{24} \cdot 8(x-x^2)\sqrt{x-x^2} + C =$$

$$= \frac{1}{16}\arcsin(2x-1) + \frac{4x^2+2x-3}{12}\sqrt{x-x^2} + C.$$

5.4.3. Trigonometrikus függvények integrálása

A trigonometrikus függvények racionális kifejezéseinek integrálása mindig megoldható elemi úton. Néhány egyszerűbb típus trigonometrikus átalakításokkal visszavezethető olyan integrálra, amelyet helyettesítéssel megoldhatunk, míg más, összetettebb alakok $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ helyettesítéssel vezethetők vissza racionális törtfüggvény integráljára.

a) Az egyszerűbb speciális típusok közé tartoznak n és k nemnegatív egészek esetén az

$$\int \sin^{2n+1} x \cdot \cos^k x dx = \int \left(\sin^2 x\right)^n \cdot \sin x \cdot \cos^k x dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)^n \cdot \cos^k x \cdot \sin x dx,$$

illetve

$$\int \cos^{2n+1} x \cdot \sin^k x dx = \int \left(\cos^2 x\right)^n \cdot \cos x \cdot \sin^k x dx = \int \left(1-\sin^2 x\right)^n \cdot \sin^k x \cdot \cos x dx$$

integrálok, melyeket rendre a $\cos x = t$, illetve $\sin x = t$ helyettesítéssel vezethetünk vissza polinomfüggvény integrálására, valamint az

$$\int \sin^{2n} x \cos^{2k} x dx$$

típusú integrálok, amelyek a

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad \text{és} \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

trigonometriai azonosságok ismételt alkalmazásával oldhatunk meg.

FELADATOK

Oldjuk meg a következő trigonometrikus integrálokat.

1. $\int \sin^5 x dx$

Megoldás. Alakítsuk át az integrandust az előzőekben bemutatott módon. Ekkor

$$I = \int \sin^5 x dx = \int \left(\sin^2 x\right)^2 \sin x dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \sin x dx.$$

Vezessük be a $\cos x = t$, $-\sin x dx = dt$ helyettesítést. Ekkor

$$I = \int \left(1-t^2\right)^2 (-dt) = -\int \left(1-2t^2+t^4\right) dt = -t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + C.$$

Visszatérve az eredeti változóra kapjuk, hogy

$$I = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C.$$

2. $\displaystyle\int \cos^3 x \sin^4 x dx$

Megoldás. Végezzük el az integrandus megfelelő átalakításait. Ekkor

$$I = \int \cos^3 x \sin^4 x dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right) \sin^4 x \cos x dx.$$

Vezessük be a $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$ helyettesítést. Az integrál most így módosul:

$$I = \int \left(1 - t^2\right) t^4 dt = \int \left(t^4 - t^6\right) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C.$$

Visszatérve az eredeti változóra kapjuk, hogy

$$I = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

3. $\displaystyle\int \cos^2 x \sin^4 x dx$

Megoldás. Végezzük el először a trigonometrikus átalakításokat. Ekkor

$$I = \int \cos^2 x \sin^4 x dx = \int 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \frac{\sin^2 x}{4} dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cdot \cos 2x dx.$$

Az első integrált bontsuk tovább két integrál összegére, a másodikban pedig vezessük be a $\sin 2x = t$, $2 \cos 2x dx = dt$, $\cos 2x dx = \dfrac{dt}{2}$ helyettesítést. Ekkor

$$I = \frac{1}{16} \int dx - \frac{1}{16} \int \cos 4x dx - \frac{1}{8} \int t^2 \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{16} x - \frac{1}{16} \frac{\sin 4x}{4} dx - \frac{1}{16} \cdot \frac{t^3}{3} + C =$$

$$= \frac{1}{16} x - \frac{1}{16} \frac{\sin 4x}{4} dx - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.$$

b) Az $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x) dx$ alakú integrálok a $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = t$ helyettesítéssel racionalizálhatók. Ebben az esetben

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2},$$

$$\sin x = \frac{\sin x}{1} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} \left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)}{\cos^2 \frac{x}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1 + t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right)}{\cos^2 \frac{x}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right)} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

FELADATOK

Oldjuk meg a következő trigonometrikus integrálokat.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

Megoldás. Alkalmazzuk a megadott helyettesítéseket. Ekkor

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t|+C = \ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$

Megoldás. Alkalmazzuk a $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$ helyettesítést. Ekkor

$$\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{4t}{1+t^2}+3} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2+4t+3+3t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2\left(t^2+2t+2\right)} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t+1)^2+1} = \operatorname{arctg}(t+1)+C = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)+C.$$

5.4.4. Exponenciális és hiperbolikus függvények integrálása

Az $\displaystyle\int R\left(e^x\right)dx$ exponenciális függvény integrálját, ahol az integrandus az e^x függvény racionális kifejezése, az

$$e^x=t, \quad x=\ln t, \quad dx=\frac{dt}{t}$$

helyettesítéssel tudjuk visszavezetni racionális törtfüggvény integráljára. Minthogy

$$\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th}x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \quad \text{és} \quad \operatorname{cth}x=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}},$$

így érthető, hogy a hiperbolikus függvények racionális kifejezéseinek integráljai ugyanezzel a helyettesítéssel racionalizálhatók.

FELADATOK

Határozzuk meg a következő exponenciális integrálok megoldását.

1. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$

Megoldás. Vezessük be az $e^x=t$, $dx=\dfrac{dt}{t}$ helyettesítést. Ekkor

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}dx = \int \frac{t}{1+t}\cdot\frac{dt}{t} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t|+C = \ln\left(1+e^x\right)+C.$$

2. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx$

Megoldás. Vezessük be az $e^x = t$, $dx = \dfrac{dt}{t}$ helyettesítést. Az integrál megoldása most

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{t^2}{1+t^2}\cdot\frac{dt}{t} = \int \frac{tdt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{1+t^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2x}\right) + C.$$

3. $\displaystyle\int \frac{e^{3x}-e^x}{e^{2x}+1}dx$

Megoldás. Vezessük be az $e^x = t$, $dx = \dfrac{dt}{t}$ helyettesítést. Ekkor

$$\int \frac{e^{3x}-e^x}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{t^3-t}{t^2+1}\cdot\frac{dt}{t} = \int \frac{t^2-1}{t^2+1}dt = \int \frac{t^2+1-2}{t^2+1}dt =$$
$$= \int \left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)dt = t - 2\mathrm{arctg}\, t + C = e^x - 2\mathrm{arctg}\, e^x + C.$$

4. $\displaystyle\int \sqrt{e^x-1}dx$

Megoldás. Alkalmazzuk az $e^x = t$, $dx = \dfrac{dt}{t}$ helyettesítést. Ekkor az

$$I = \int \sqrt{e^x-1}dx = \int \sqrt{t-1}\cdot\frac{dt}{t} = \int \frac{\sqrt{t-1}}{t}dt.$$

integrált kapjuk, amelyben a $t-1 = z^2$, $dt = 2zdz$ helyettesítést bevezetve adódik, hogy

$$I = \int \frac{z}{z^2+1}\cdot 2zdz = 2\int \frac{z^2+1-1}{z^2+1} = \int \left(1-\frac{1}{z^2+1}\right)dz = 2\left(z - \mathrm{arctg}\, z\right) + C =$$
$$= 2\left(\sqrt{t-1} - \mathrm{arctg}\sqrt{t-1}\right) + C = 2\left(\sqrt{e^x-1} - \mathrm{arctg}\sqrt{e^x-1}\right) + C.$$

5. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{ch}\, x + \mathrm{sh}\, x}{e^x+1}dx$

Megoldás. Helyettesítsük be az integrandusba a $\mathrm{ch}\, x$ és $\mathrm{sh}\, x$ függvények exponenciális alakját. Ekkor a következő integrált kapjuk:

$$I = \int \frac{\mathrm{ch}\, x + \mathrm{sh}\, x}{e^x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{e^x+e^{-x}+e^x-e^{-x}}{e^x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^x}{e^x+1}dx = \int \frac{e^x}{1+e^x}dx.$$

Az exponenciális függvényekkel kapcsolatos integrálok első feladata alapján a megoldás

$$I = \ln\left(1+e^x\right) + C.$$

5.5. A határozott integrál fogalma és tulajdonságai

5.5.1. Arkhimédész módszere síkidomok területének meghatározására

A gyakorlati életben sokszor van szükségünk különböző síkidomok nagyságának meghatározására. Egy mérőszámot kell hozzárendelni a síkidomhoz, amit a területének nevezünk. Sokszögek esetében nincsenek nagyobb problémák, sőt a kör esetében is megoldható a hozzárendelés. Most néhány további speciális síkidomhoz fogunk területet rendelni, s feltesszük, hogy a tekintett síkidomoknak van területe.

Tekintsük azt a síkidomot, amelyet az x tengely $[0,1]$ intervalluma, az $x=1$ egyenes megfelelő szakasza és az $f(x)=x^2$ függvény grafikonjának megfelelő íve határol. Ezt a síkidomot parabolikus háromszögnek is szokás nevezni, s területének kiszámítására Arkhimédész parabola-kvadratúráját alkalmazzuk. A módszer lényege az, hogy a keresett területet téglalapok területeinek összegével közelítjük.

Írjunk a parabolikus háromszögbe és köré sokszöget a következő módon: osszuk a $[0,1]$ intervallumot n egyenlő részre ($n \in \mathbf{N}$). A

$$\left[0,\frac{1}{n}\right], \quad \left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right], \quad \dots \quad \left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right], \quad \dots \quad \left[\frac{n-1}{n},1\right]$$

részintervallumokra állítsunk beírt és körülírt téglalapokat úgy, hogy a beírt téglalap magassága a részintervallumok kezdőpontjainak függvényértéke, azaz rendre

$$0, \ \left(\frac{1}{n}\right)^2, \ \dots, \ \left(\frac{i-1}{n}\right)^2, \ \dots, \ \left(\frac{n-1}{n}\right)^2,$$

a körülírt téglalapok magassága a részintervallumok végpontjainak függvényértéke, azaz rendre

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2, \ \left(\frac{2}{n}\right)^2, \ \dots, \ \left(\frac{i}{n}\right)^2, \ \dots, \ 1$$

legyen. A beírt téglalapok területe:

$$s_n = 0\cdot\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2\frac{1}{n} + \dots + \left(\frac{i-1}{n}\right)^2\frac{1}{n} + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n^3}\left[1^2+2^2+\dots+(i-1)^2+\dots+(n-1)^2\right] = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}.$$

A körülírt téglalapok területe:

$$S_n = \left(\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2\frac{1}{n} + \left(\frac{3}{n}\right)^2\frac{1}{n} + \dots + \left(\frac{i}{n}\right)^2\frac{1}{n} + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^2\frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n^3}\left[1^2+2^2+3^2+\dots+i^2+\dots+n^2\right] = \frac{(n+1)n(2n+1)}{6n^3}.$$

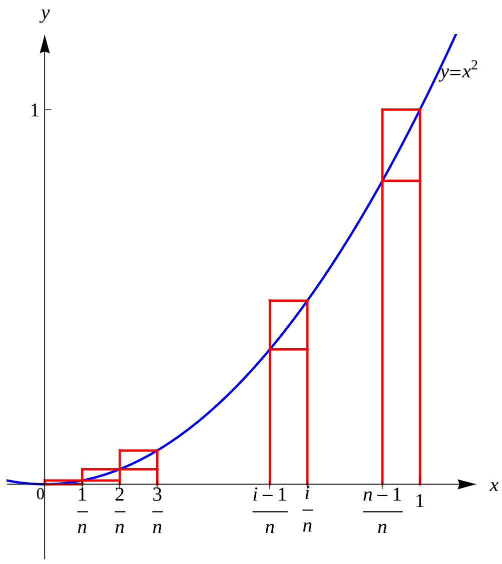
Az a sejtésünk, hogy ha egyetlen olyan szám van, amely minden s_n-nél nagyobb és minden S_n-nél kisebb, akkor a parabolikus háromszögnek van területe, és ez a T terület azzal a számmal egyenlő. Ezért felírhatjuk, hogy

$$s_n \leq T \leq S_n,$$

behelyettesítve a képleteket pedig kapjuk, hogy

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \leq T \leq \frac{(n+1)n(2n+1)}{6n^3}.$$

A fenti egyenlőtlenségek a határértékekre is érvényesek, ha $n \to \infty$, azaz igazak a



$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \leq T \leq \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n(2n+1)}{6n^3}$$

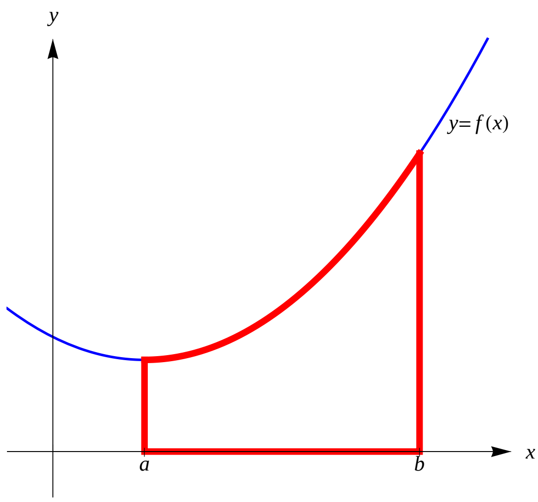
egyenlőtlenségek is. Ekkor

$$\frac{1}{3} \leq T \leq \frac{1}{3}, \quad \text{ahonnan} \quad T = \frac{1}{3}.$$

5.5.2. A határozott integrál fogalma

Legyen f egy korlátos pozitív függvény az $[a, b]$ intervallumon, ami azt jelenti, hogy a grafikonja az x-tengely felett helyezkedik el. Ekkor azt a síkbeli alakzatot, amelyet az x-tengelyen az $[a, b]$ intervallum, az $x = a$ és $x = b$ egyenesek, valamint az f függvény $[a, b]$ intervallumhoz tartozó grafikonja határol, az $[a, b]$ intervallumhoz tartozó $\mathcal{G}$ **görbevonalú trapéznak** nevezzük.

A $\mathcal{G}$ görbevonalú trapézterület meghatározásának problémája és az Arkhimédészi módszer ötlete vezetett a határozott integrál definíciójához.



Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot n számú

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ [x_2, x_3],\ \ldots,\ [x_{n-1}, x_n],$$

részintervallumra úgy, hogy az osztópontokra

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ \ldots\ < x_{n-1} < x_n = b$$

legyen érvényes. Az $[a, b]$ intervallum $\mathcal{F}$ felosztása az

$$\mathcal{F} = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$$

ponthalmazt jelenti. Jelölje most $\Delta x_1 = x_1 - x_0$ az első, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$ a második, és így tovább, $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ pedig az n-edik részintervallum hosszúságát. A

$$d(\mathcal{F}) = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n\}$$

számot az $\mathcal{F}$ felosztás diaméterének nevezzük, s a legnagyobb részintervallum-hosszúságot jelöli.

5.7. Definíció. *Legyen f az $[a, b]$ zárt intervallum felett definiált korlátos függvény és $\mathcal{F}$ az $[a, b]$ intervallum egy felosztása. Ekkor az*

$$s_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \cdots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$$

összeget, ahol m_i jelenti az f függvény alsó határát az $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallumon, az f függvény $\mathcal{F}$ felosztáshoz tartozó alsó közelítő összegének nevezzük. Az

$$S_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \cdots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$

összeget, ahol M_i jelenti az f függvény felső határát az $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallumon, az f függvény $\mathcal{F}$ felosztáshoz tartozó felső közelítő összegének nevezzük.

5.8. Definíció. *Legyen f az $[a, b]$ zárt intervallum felett definiált korlátos függvény, $\mathcal{F}$ az $[a, b]$ intervallum egy felosztása és $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$, a részintervallumok tetszőleges pontjainak egy kiválasztása. Ekkor a*

$$T(f, \mathcal{F}, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

összeget az f függvény $\mathcal{F}$ felosztáshoz tartozó Riemann-féle integrálösszegének nevezzük.

5.9. Tétel. *Legyen f az $[a, b]$ zárt intervallum felett definiált korlátos függvény, $\mathcal{F}$ az $[a, b]$ intervallum egy felosztása és $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$, a részintervallumok tetszőleges pontjainak egy kiválasztása. Ekkor*

$$s_n \leq T(f, \mathcal{F}, \xi) \leq S_n$$

érvényes minden $n \in \mathbf{N}$ esetén, ha s_n és S_n az f függvény alsó és felső közelítő összegeinek sorozatai.

Bizonyítás. Az alsó és felső határ definíciójából adódik, hogy minden ξ pontválasztás esetén

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Beszorozva a fenti értékeket a megfelelő részintervallumok hosszúságával kapjuk, hogy

$$m_i\Delta x_i \leq f(\xi_i)\Delta x_i \leq M_i\Delta x_i, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Adjuk össze a fenti értékeket 1-től n-ig. Ekkor

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$

illetve

$$s_n \leq T(f, \mathcal{F}, \xi) \leq S_n,$$

amit igazolni akartunk. $\diamond$

5.9. Definíció. *Legyen $f : [a, b] \mapsto \mathbf{R}$ korlátos függvény. Ha az $[a, b]$ intervallum minden $\mathcal{F}$ felosztására és bármely olyan $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ pont n-esre, amelyekre $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$, létezik az*

$$I := \lim_{d(\mathcal{F})\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

egyértelmű határérték, akkor az f függvényre azt mondjuk, hogy integrálható az $[a, b]$ intervallumon, az I szám az f függvény határozott integrálja az $[a, b]$ intervallumon, jelölése pedig

$$\lim_{d(\mathcal{F})\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

Az a, illetve b számok, $a < b$, a határozott integrál alsó, illetve felső határai, az f függvény a határozott integrál integrandusa. Ebben az esetben az I határérték azt jelenti, hogy minden $\varepsilon > 0$ számra létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden tetszőleges $\mathcal{F}$ felosztásra $d(\mathcal{F}) < \delta$ és a $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ pont n-esek bármely választása esetén igaz, hogy

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \right| < \varepsilon \ .$$

Történeti okokból, és azért mert más integrálfogalom is létezik, a fenti definíció értelmében integrálható függvényeket szokás Riemann szerint integrálható függvényeknek nevezni. (Bernhard Riemann német matematikus 1826-1866.)

5.10. Tétel. *Ha az f függvény integrálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor f korlátos $[a, b]$ intervallumon.*

5.11. Tétel. *Az $[a, b]$ intervallumon értelmezett f függvény akkor és csakis akkor integrálható, ha az $[a, b]$ intervallum bármely $\mathcal{F}$ felosztásához a megfelelő alsó és felső közelítő összegek s_n és S_n sorozatai közös határértékhez tartanak, azaz*

$$\lim_{d(\mathcal{F})\to 0} s_n = \lim_{d(\mathcal{F})\to 0} S_n.$$

5.12. Tétel. *Ha az f függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon, akkor f integrálható az $[a, b]$ intervallumon.*

5.13. Tétel. *Ha az f függvény korlátos és monoton az $[a, b]$ intervallumon, akkor f integrálható az $[a, b]$ intervallumon.*

5.5.3. A határozott integrál tulajdonságai

5.10. Definíció. *Legyen f integrálható függvény az $[a,b]$ intervallumon.*

1. *Ha $a > b$, akkor* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

2. *Ha $a = b$, akkor* $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0.$

Belátható, hogy minden f az $[a,b]$ intervallumon folytonos függvény integrálható is az $[a,b]$-n. Ugyanúgy minden olyan korlátos $f : [a,b] \mapsto \mathbf{R}$ függvény is integrálható, amely folytonos az $[a,b]$ intervallumon, kivéve véges sok pontjában.

5.14. Tétel. *Ha f a konstans függvény, azaz $f(x) = k$, $x \in [a,b]$, akkor*

$$\int_a^b f(x)dx = k(b-a).$$

5.15. Tétel. *Ha f integrálható függvény az $[a,b]$ intervallumon és k egy valós szám, akkor a kf függvény is integrálható az $[a,b]$ intervallumon és* $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$

Bizonyítás. Minden F felosztás és a részintervallumokon választott bármely ξ pontok esetén

$$T(kf,\mathcal{F},\xi) = \sum_{i=1}^n kf(\xi_i)\Delta x_i = k\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = kT(f,\mathcal{F},\xi).$$

Mivel

$$\lim_{d(\mathcal{F})\to 0} T(f,\mathcal{F},\xi) = \int_a^b f(x)dx,$$

ezért

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{d(\mathcal{F})\to 0} T(kf,\mathcal{F},\xi) = k\lim_{d(\mathcal{F})\to 0} T(f,\mathcal{F},\xi) = k\int_a^b f(x)dx.$$

$\diamond$

5.16. Tétel. *Ha f és g integrálható függvények az $[a,b]$ intervallumon, akkor az összegük is integrálható az $[a,b]$ intervallumon és* $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

Bizonyítás. Minden F felosztás és a részintervallumokon választott bármely ξ pontok esetén

$$T(f+g,\mathcal{F},\xi) = \sum_{i=1}^n \left(f(\xi_i)+g(\xi_i)\right)\Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i = T(f,\mathcal{F},\xi) + T(g,\mathcal{F},\xi).$$

Mivel

$$\lim_{d(\mathcal{F})\to 0} \left(T(f,\mathcal{F},\xi) + T(g,\mathcal{F},\xi)\right) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$

ezért

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \lim_{d(\mathcal{F})\to 0} T(f+g,\mathcal{F},\xi) =$$

$$= \lim_{d(\mathcal{F})\to 0} (T(f,\mathcal{F},\xi)+T(g,\mathcal{F},\xi)) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

$\diamond$

5.2. Következmény. *Ha f és g integrálható függvények az $[a,b]$ intervallumon, k_1 és k_2 pedig valós számok, akkor a $k_1 f + k_2 g$ függvény is integrálható az $[a,b]$ intervallumon és*

$$\int_a^b (k_1 f(x) + k_2 g(x))dx = k_1 \int_a^b f(x)dx + k_2 \int_a^b g(x)dx.$$

5.17. Tétel. *Ha f és g integrálható függvények az $[a,b]$ intervallumon és $f(x) \leq g(x)$ minden $x \in [a,b]$ esetén, akkor*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Bizonyítás. Minden $\mathcal{F}$ felosztás és a részintervallumokon választott bármely ξ pontok esetén

$$T(f,\mathcal{F},\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = T(g,\mathcal{F},\xi).$$

Ekkor

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d(\mathcal{F})\to 0} T(f,\mathcal{F},\xi) \leq \lim_{d(\mathcal{F})\to 0} T(g,\mathcal{F},\xi) = \int_a^b g(x)dx.$$

$\diamond$

A következő állítások az 5.17. Tétel következményei.

5.3. Következmény. *Ha f és g integrálható függvények az $[a,b]$ intervallumon, $f(x) \leq 0$ és $g(x) \geq 0$ minden $x \in [a,b]$ esetén, akkor*

$$\int_a^b f(x)dx \leq 0 \quad \text{és} \quad \int_a^b g(x)dx \geq 0.$$

5.18. Tétel. *Legyen f integrálható függvény az $[a,b]$ intervallumon és legyen minden $x \in [a,b]$ esetén $m \leq f(x) \leq M$. Ekkor*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

5.19. Tétel (Az integrálszámítás középértéktétele). *Legyen f az $[a,b]$ intervallum felett folytonos függvény. Ekkor van olyan $c \in (a,b)$ szám, hogy*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Bizonyítás. Mivel az f függvény folytonos, ezért a zárt $[a,b]$ intervallumon felveszi M maximumát és m minimumát. Így az f függvény teljesíti az 5.18. Tétel feltételeit, ahonnan $b-a>0$ figyelembe vételével,

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M,$$

ebből pedig az adódik, hogy $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ a $[m,M]$ intervallum egy közbenső értéke, melyet az f függvény a folytonosság miatt felvesz. Ezért van olyan $c\in(a,b)$ szám, hogy

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

s ezzel az állítás bizonyított. $\diamond$

A következő tételekben a határozott integrálok fontos tulajdonságait fogalmaztuk meg.

5.20. Tétel. *Ha f integrálható függvény az $[a,b]$ intervallumon, akkor*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

5.21. Tétel. *Ha f integrálható függvény az $[a,b]$ intervallumon és ha $c\in(a,b)$, akkor igaz, hogy*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

5.5.4. Newton-Leibniz formula

5.22. Tétel. *Ha f az $[a,b]$ intervallumon folytonos függvény és*

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

akkor a Φ függvény az f függvény egy primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon.

Bizonyítás. A Φ függvény növekményének és az x változó Δx növekményének hányadosa

$$\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left(\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right).$$

A 5.21. Tétel alapján igaz, hogy

$$\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Az f függvény folytonos, ha $t\in[x,x+\Delta x]$, ezért érvényes az integrálszámítás középértéktétele (5.19. Tétel), ahol $a=x$, $b=x+\Delta x$. Ekkor

$$\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x} = f(c), \quad c\in[x,x+\Delta x].$$

Ha $\Delta x \to 0$, akkor $x + \Delta x \to x$ és $c \to x$, s az f függvény folytonosságából $f(c) \to f(x)$. Tehát a fenti növekmények hányadosának határértéke létezik, ha $\Delta x \to 0$, és

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = f(x).$$

Eszerint a Φ függvény differenciálható és $\Phi'(x) = f(x)$. $\diamond$

Az integrálszámítás alaptétele lehetővé teszi az $\int_a^b f(x)dx$ határozott integrál kiszámítását az f függvény tetszőleges F primitív függvényének segítségével.

5.23. Tétel. *Legyen f az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvény, F pedig az egyik primitív függvénye, azaz $F'(x) = f(x)$, minden $x \in [a, b]$ esetén. Ekkor érvényes a Newton-Leibniz-féle formula:*

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Bizonyítás. Ha F és Φ az f függvény primitív függvényei, akkor ezek a függvények legfeljebb egy állandóban különböznek egymástól. Ekkor

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

azaz

$$\int_a^x f(x)dx = F(x) + C.$$

Az $x = a$ helyettesítési érték vezet a

$$0 = F(a) + C$$

formulához, amiből $C = -F(a)$ és

$$\int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a).$$

Az $x = b$ helyettesítés után következik, hogy

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

$\diamond$

A határozott integrál számításánál felhasználjuk a határozatlan integrált, s ezért a helyettesítést vagy a parciális integrálás szabályát alkalmazhatjuk a határozott integrálra is az alábbi módon.

5.24. Tétel. *Legyen $f : [a, b] \mapsto \mathbf{R}$ folytonos függvény, $\varphi : [\alpha, \beta] \mapsto [a, b]$ pedig olyan monoton függvény, amelynek az első deriváltja folytonos az $[\alpha, \beta]$ intervallumon. Ekkor az $x = \varphi(t)$ helyettesítés után*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\ ,$$

ahol $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

5.25. Tétel. *Ha az u és v függvények folytonosan differenciálhatók az* $[a,b]$ *intervallumon, akkor igaz a parciális integrálás képlete, miszerint*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx \ .$$

FELADATOK.

Számítsuk ki a következő határozott integrálok értékét.

1. $\int_1^3 \left(4x^3 - x\right) dx$

Megoldás.

$$\int_1^3 \left(4x^3 - x\right) dx = \left(x^4 - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^3 = \left(3^4 - \frac{3^2}{2}\right) - \left(1^4 - \frac{1^2}{2}\right) = 81 - \frac{9}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 76.$$

2. $\int_2^3 \sqrt[3]{x}dx$

Megoldás.

$$\int_2^3 \sqrt[3]{x}dx = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\Big|_2^3 = \frac{3}{4}\left(3\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{2}\right).$$

3. $\int_{-4}^{-2} \frac{dx}{x^4}$

Megoldás.

$$\int_{-4}^{-2} \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3}\Big|_{-4}^{-2} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{-8} - \frac{1}{-64}\right) = \frac{7}{192}.$$

4. $\int_5^{12} \frac{3}{x}dx$

Megoldás.

$$\int_5^{12} \frac{3}{x}dx = 3\ln|x|\Big|_5^{12} = 3\left(\ln 12 - \ln 5\right) = 3\ln\frac{12}{5}.$$

5. $\int_0^{\pi} \sin x dx$

Megoldás.

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2.$$

6. $\displaystyle\int_0^1 (5x+1)^4 dx$

Megoldás. Ha alkalmazzuk az $5x+1=t$, $dx=\dfrac{dt}{5}$ helyettesítést, akkor a t változóval kapott integrál határait is meg kell változtatni a régi határok értékeinek behelyettesítésével, így az új határok most $5\cdot 0+1=1$ és $5\cdot 1+1=6$ lesznek. Ekkor

$$\int_0^1 (5x+1)^4 dx = \int_1^6 t^4\cdot\frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\cdot\frac{t^5}{5}\bigg|_1^6 = \frac{1}{25}\left(6^5-1^5\right) = 311.$$

7. $\displaystyle\int_1^2 e^{2x+3}dx$

Megoldás. Vezessük be a $2x+3=t$, $dx=\dfrac{dt}{2}$ helyettesítést. A megfelelő határok most $x=1$ helyett $t=5$, valamint $x=2$ helyett $t=7$. Az integrál megoldása tehát

$$\int_1^2 e^{2x+3}dx = \int_5^7 e^t\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}e^t\bigg|_5^7 = \frac{1}{2}\left(e^7-e^5\right) = \frac{1}{2}e^5\left(e^2-1\right).$$

8. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\cos x dx$

Megoldás. Vezessük be a $\cos x=t$, $\sin x dx=-dt$ helyettesítést. Az új határok most $x=\dfrac{\pi}{2}$ helyett $t=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$, $x=\pi$ helyett pedig $t=\cos\pi=-1$. Az integrál ekkor

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\cos x dx = -\int_0^{-1} tdt = \int_{-1}^0 = \frac{t^2}{2}\bigg|_{-1}^0 = 0-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

9. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx$

Megoldás. Mivel $\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$, ezért vezessük be az integrálban a $\cos x=t$, $\sin x dx=-dt$ helyettesítést. Az új határok: $x=-\dfrac{\pi}{4}$ helyett $t=\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, valamint $x=\dfrac{\pi}{4}$ helyett $t=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ekkor

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{t} = 0.$$

10. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$

Megoldás. Alkalmazzuk az $\ln x=t$, $\frac{dx}{x}=dt$ helyettesítést. Az új határok $x=e$ helyett $t=\ln e=1$, illetve $x=e^2$ helyett $t=\ln e^2=2$. Ekkor

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \int_1^2 \frac{dt}{t} = \ln|t|\bigg|_1^2 = \ln 2-\ln 1 = \ln 2.$$

11. $\displaystyle\int_1^2 xe^x dx$

Megoldás. Ha $u = x$, $dv = e^x dx$, valamint $du = dx$ és $v = e^x$, akkor

$$\int_1^2 xe^x dx = xe^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = \big(2e^2 - 1e\big) - e^x\big|_1^2 = 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2.$$

12. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x dx$

Megoldás. Legyen a parciális integrálás képletében $u = \arcsin x$ és $dv = dx$. Ekkor $du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ és $v = x$. Ekkor

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x dx = x \arcsin x\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

A kapott integrálban vezessük be az $1 - x^2 = t$, $xdx = -\dfrac{dt}{t}$ helyettesítést. Az új határok most $x = -\dfrac{1}{2}$ helyett $t = \dfrac{3}{4}$, illetve $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ helyett $t = \dfrac{1}{4}$. Az integrálást folytatva kapjuk, hogy

$$I = \frac{\sqrt{3}}{2} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) - \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{t}}\left(-\frac{dt}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{t}\Bigg|_{\frac{3}{4}}^{\frac{1}{4}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{12} + \sqrt{\frac{1}{4}} - \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3}\right).$$

13. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x \cos x dx$

Megoldás. Legyen a parciális integrálás képletében $u = x$ és $dv = \cos x dx$, ahonnan $du = dx$ és $v = \sin x$. Ekkor

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x \cos x dx = x \sin x\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos x\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \cos\frac{\pi}{4} - \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{8} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

14. $\displaystyle\int_e^{e^2} x^2 \ln x dx$

Megoldás. legyen a parciális integrálás képletében $u = \ln x$ és $dv = x^2 dx$. Ekkor $du = \dfrac{dx}{x}$ és $v = \dfrac{x^3}{3}$. Ekkor

$$\int_e^{e^2} x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x \Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{e^6}{3} \ln e^2 - \frac{e^3}{3} \ln e - \frac{1}{3} \int_e^{e^2} x^2 dx =$$

$$= \frac{2}{3}e^6 - \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_e^{e^2} = \frac{2}{3}e^6 - \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}\left(e^6 - e^3\right) =$$

$$= \frac{5}{9}e^6 - \frac{2}{9}e^3 = \frac{e^3}{9}\left(5e^3 - 2\right).$$

15. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$

Megoldás. Az integrandus racionális törtfüggvény, s felírható

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$$

alakban. Ekkor

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = \int_0^1 \frac{dx}{x-3} - \int_0^1 \frac{dx}{x-2}.$$

Alkalmazva az $x - 3 = t$, $dx = dt$, valamint $x - 2 = z$, $dx = dz$ helyettesítéseket adódik, hogy az új határokkal

$$I = \int_{-3}^{-2} \frac{dt}{t} - \int_{-2}^{-1} \frac{dz}{z} = \ln|t|\Big|_{-3}^{-2} - \ln|z|\Big|_{-2}^{-1} = \ln 2 - \ln 3 - \ln 1 + \ln 2 = \ln\frac{4}{3}.$$

5.6. A határozott integrál alkalmazása

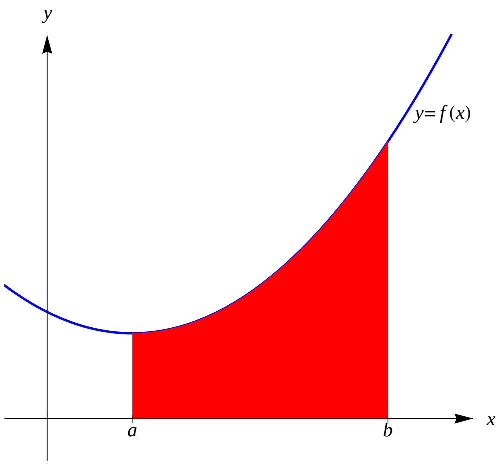
5.6.1. Síkidomok területszámítása

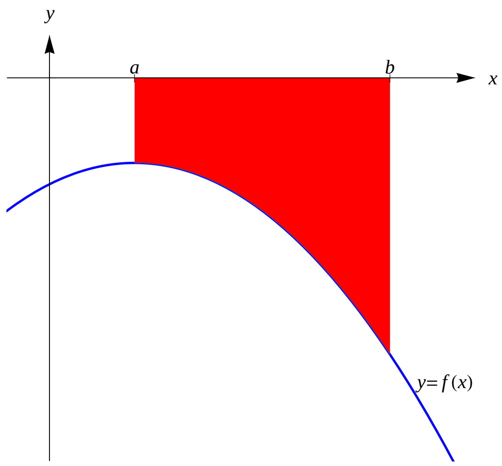
Legyen $f : [a, b] \mapsto \mathbf{R}$ nemnegatív folytonos függvény, az $[a, b]$ intervallumon. A Riemann-féle integrál definíciója alapján kimondhatjuk, hogy az f függvényhez tartozó $\mathcal{G}$ görbevonalú trapéz $T(\mathcal{G})$ területe az $[a, b]$ intervallum felett:

$$T(\mathcal{G}) = \int_a^b f(x)dx.$$

Ha az $f : [a, b] \mapsto \mathbf{R}$ folytonos függvény nempozitív az $[a, b]$ intervallumon, akkor az f függvényhez tartozó $\mathcal{G}$ görbevonalú trapéz $T(\mathcal{G})$ területe az $[a, b]$ intervallum felett:

$$T(\mathcal{G}) = -\int_a^b f(x)dx, \quad \text{illetve} \quad T(\mathcal{G}) = \left|\int_a^b f(x)dx\right|.$$

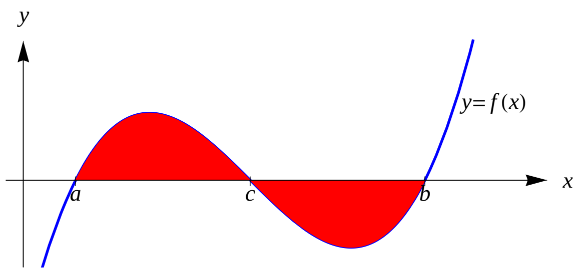




Ha az $f : [a, b] \mapsto \mathbf{R}$ folytonos függvény az $[a, b]$ intervallumon előjelet vált, azaz az $[a, c]$ intervallumon nemnegatív, a $[c, b]$ intervallumon pedig nempozitív ($a < c < b$), akkor a $\mathcal{G}$ degenerált görbevonalú trapéz területét kell kiszámolni.

Ebben az esetben a terület kiszámítását egy x-tengely feletti és egy x-tengely alatti terület kiszámítására kell szétbontani, azaz

$$T(\mathcal{G}) = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx.$$

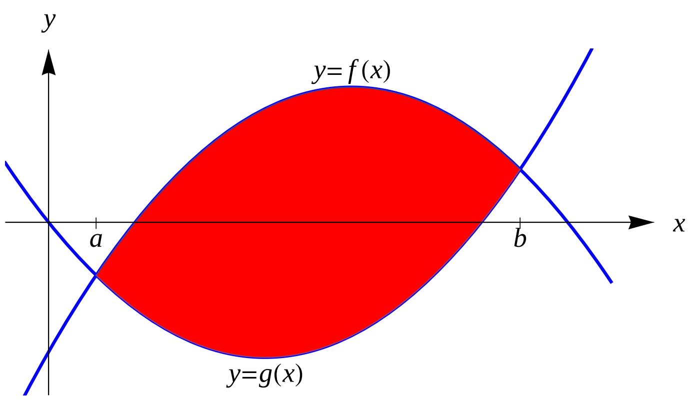


Legyenek $f : [a, b] \mapsto \mathbf{R}$ és $g : [a, b] \mapsto \mathbf{R}$ olyan folytonos függvények az $[a, b]$ intervallumon, hogy $g(x) \leq f(x)$, $x \in [a, b]$. Az

$$\mathcal{A} = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \;\; g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

zárt alakzat területét most a következő módon számoljuk ki:

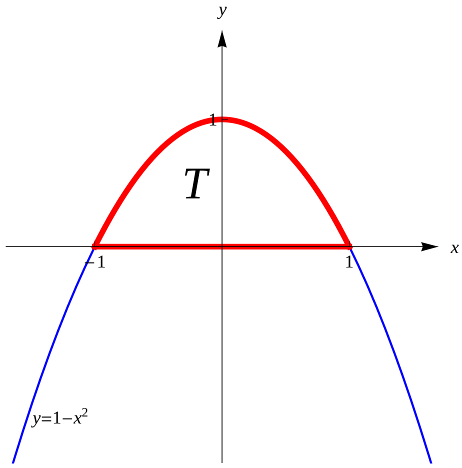
$$T(\mathcal{A}) = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$



FELADATOK.

1. Számítsuk ki az $y = 1 - x^2$ görbe és az x tengely által határolt zárt tartomány területét.

Megoldás. Keressük meg az $y = 1 - x^2$ parabola és az x-tengely metszéspontjait, vagyis a parabola nullahelyeit. $1 - x^2 = 0$, ha $x = -1$ vagy $x = 1$, ezért a keresett terület az x-tengelyen -1-től 1-ig terjed és a következőképpen számíthatjuk ki:



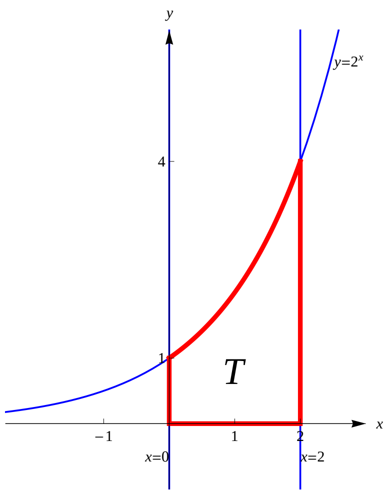
$$T = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^{1} =$$

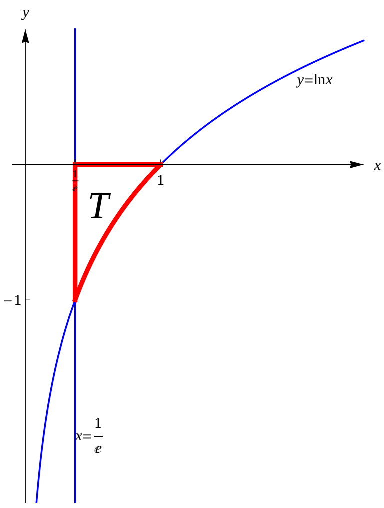
$$= \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

2. Számítsuk ki az $y = 2^x$ görbe, valamint az $x = 0$, $x = 2$ és $y = 0$ egyenesek által határolt zárt terület nagyságát.

Megoldás. A határozott integrál határait az $x = 0$ és $x = 2$ egyenesek adják meg. A keresett terület

$$T = \int_0^2 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_0^2 = \frac{4}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} = \frac{3}{\ln 2}.$$





3. Számítsuk ki az $y = \ln x$ görbe, valamint az $x = \dfrac{1}{e}$ és $y = 0$ egyenesek által határolt zárt terület nagyságát.

Megoldás. Mivel az $y = \ln x$ görbe az $x = 1$-ben metszi az x-tengelyt, így az integrálás határai az $x = \dfrac{1}{e}$ és $x = 1$ lesznek. A keresett terület az x-tengely alatt helyezkedik el, ezért

$$T = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x dx = \int_{1}^{\frac{1}{e}} \ln x dx = (x \ln x - x)\Big|_{1}^{\frac{1}{e}} =$$

$$= \left(\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e} - \frac{1}{e}\right) - (1\ln 1 - 1) = \frac{1}{e}\cdot(-1) - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

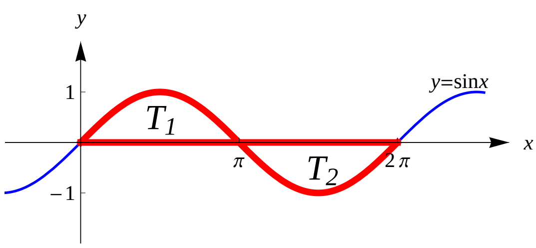
4. Számítsuk ki az $y = \sin x$ görbe és az x tengely által határolt zárt tartomány területét a $[0, 2\pi]$ intervallumon.

Megoldás. Állapítsuk meg, hogy a megadott intervallumon $\sin x > 0$, ha $x \in (0, \pi)$, és $\sin x < 0$, ha $x \in (\pi, 2\pi)$.Ezért a keresett terület nagyszágát két integrál segítségével számítjuk:

$$T = T_1 + T_2 = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= -(\cos\pi - \cos 0) + (\cos 2\pi - \cos\pi) = -(-1-1) + (1+1) = 2 + 2 = 4.$$

Vegyük észre, hogy ha nem vesszük figyelembe a függvény előjelét és a keresett területet csak egy integrál segítségével számítjuk 0-tól 2π-ig, akkor a



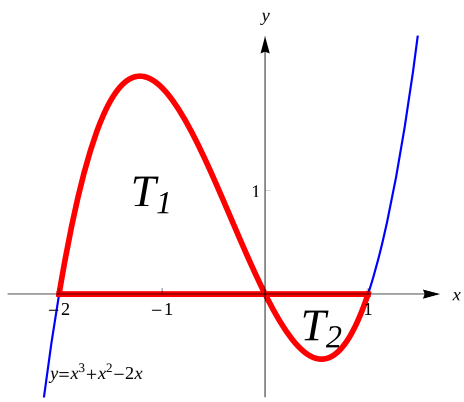
$$T^* = \int_0^{2\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= -(\cos 2\pi - \cos 0) = -(1-1) = 0$$

számot kapnánk, ami természetesen helytelen lenne, mert csak arra utalna, hogy az x-tengely alatti és feletti tartományok területe egymással egyenlő.

5. Számítsuk ki az $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ függvény grafikonja és az x tengely által határolt zárt tartomány területét.

Megoldás. Vizsgáljuk ki az f függvény területszámítási szempontból fontos tulajdonságait. Mivel $f(x) = x(x-1)(x+2)$, így a nullahelyek $x = -2$, $x = 0$ és $x = 1$, a függvény negatív, ha $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 1)$, valamint a függvény pozitív, ha $x \in (-2, 0) \cup (1, +\infty)$. Ezért a keresett területet ismét két határozott integrál segítségével számítjuk ki.



$$T = T_1 + T_2 = \int_{-2}^{0} (x^3 + x^2 - 2x) dx - \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Bigg|_{-2}^{0} - \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Bigg|_{0}^{1} =$$

$$= \left[0 - \left(\frac{16}{4} - \frac{8}{3} - 4 \right) \right] - \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 \right) - 0 \right] = \frac{37}{12} = 3\frac{1}{12}.$$

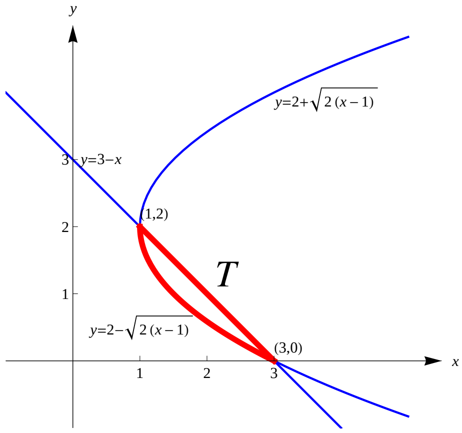
Vegyük észre ennél a feladatnál is, hogy a keresett területet most sem számíthatjuk egy integrállal, mert bár ebben az esetben pozitív számot kapunk, hiszen a

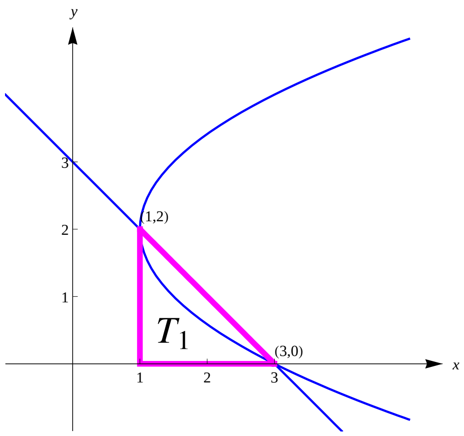
$$T^* = \int_{-2}^{1} (x^3 + x^2 - 2x)dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Bigg|_{-2}^{1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 - \frac{16}{4} + \frac{8}{3} + 4 = \frac{27}{12}$$

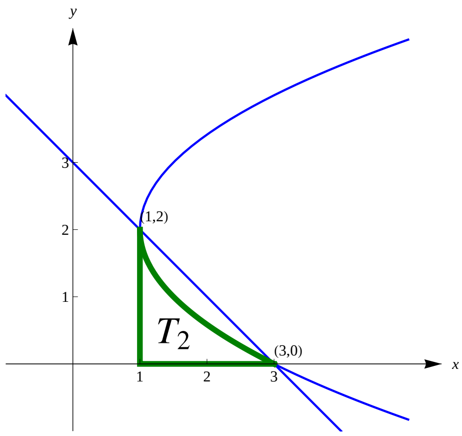
számot kapnánk, de ez nem a keresett terület nagyságának mérőszáma.

6. Határozzuk meg az $(y-2)^2 = 2(x-1)$ parabola és az $y = 3 - x$ egyenes által határolt zárt terület nagyságát.

I.Megoldás. Az egyenes és a parabola metszéspontjai az $(1,2)$ és $(3,0)$ pontok. A keresett területet megkapjuk, ha az $[1,3]$ intervallumon az $y = 3 - x$ egyenes alatti T_1 területből kivonjuk a parabola alatti T_2 területet. Fejezzük ki y-t az adott parabola egyenletéből. Ekkor a parabola alsó ágának egyenlete $y = 2 - \sqrt{2(x-1)}$. Így







$$T_1 = \int_1^3 (3-x)dx = 3x|_1^3 - \frac{x^2}{2}\Bigg|_1^3 = 9 - 3 - \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \right) = 2 \quad \text{és}$$

$$T_2 = \int_1^3 \left(2 - \sqrt{2(x-1)} \right) dx = 2x|_1^3 - \sqrt{2} \int_1^3 \sqrt{x-1}dx.$$

Vezessük be a kapott integrálban a $t = x - 1$, $dt = dx$ helyettesítést. Ekkor

$$T_2 = (6-2) - \sqrt{2} \int_0^2 t^{\frac{1}{2}} dt = 4 - \sqrt{2}\, \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3},$$

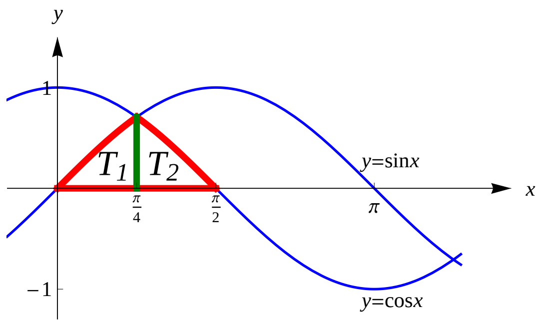
a keresett terület nagysága pedig $T = T_1 - T_2 = \dfrac{2}{3}$.

II.Megoldás. Megmutatjuk, hogy ezt a területet egyszerűbben úgy is számíthatjuk, hogy az adott görbe $x = x(y)$ alakját és a metszéspontok ordinátáit használjuk fel, s az adott görbék és az y-tengely közötti területek segítségével jutunk eredményhez. A metszéspontok ordinátái az előző számítások alapján $y = 0$ és $y = 2$. Az $y = 3-x$ egyenest $x = 3-y$ módon fejezzük ki, az $(y-2)^2 = 2(x-1)$ parabolát pedig mint $x = 1 + \frac{1}{2}(y-2)^2$. A keresett területet most a következőképpen számoljuk:

$$T = \int_0^2 \left[(3-y) - \left(1 + \frac{1}{2}(y-2)^2\right)\right] dy = \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}y^2 + y\right) dy =$$
$$= \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = -\frac{1}{6}(8-0) + \frac{1}{2}(4-0) = \frac{2}{3}.$$

7. Számoljuk ki az $y = \sin x$ és $y = \cos x$ görbék, valamint az $y = 0$ egyenes $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ szakasza által határolt zárt terület mérőszámát.

Megoldás. Az $y = \sin x$ és $y = \cos x$ görbéknek a megadott intervallumon belül $x = \frac{\pi}{2}$-ben van metszéspontjuk, ezért a keresett terület egyrészt a $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ intervallumon az $y = \sin x$ görbe alatti területből, másrészt a $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon az $y = \cos x$ görbe alatti területből tevődik össze. Így



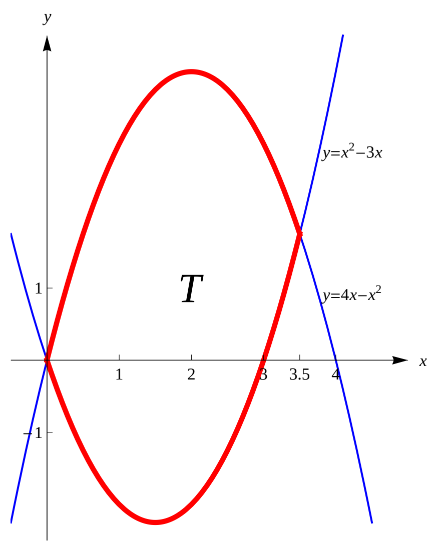
$$T = T_1 + T_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$= -\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos 0\right) + \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2}.$$

8. Számítsuk ki az $y = 4x - x^2$ és $y = x^2 - 3x$ parabolák által határolt zárt terület a nagyságát.

Megoldás. A keresett területet a

$$T = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

képlettel számoljuk, ahol $f(x) = 4x - x^2$ és $g(x) = x^2 - 3x$, a és b pedig a megfelelő görbék metszéspontjainak abszcisszái. A parabolák metszéspontjaiban megegyeznek a függvényértékek, azaz $4x - x^2 = x^2 - 3x$, ahonnan a $2x^2 - 7x = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek



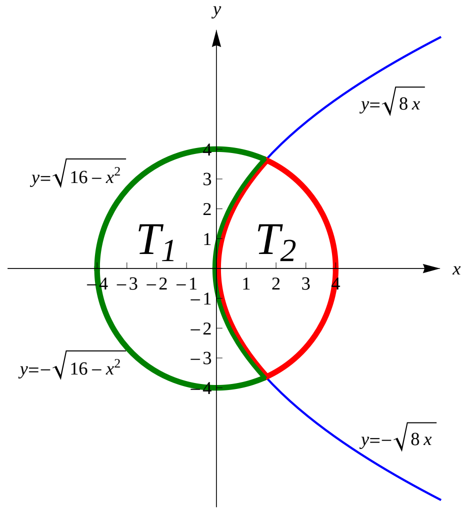
megoldása $x = 0$ vagy $x = \frac{7}{2}$. Ezért a keresett terület

$$T = \int_0^{\frac{7}{2}} \left(4x - x^2 - (x^2 - 3x)\right) dx = \int_0^{\frac{7}{2}} \left(7x - 2x^2\right) dx = \left(\frac{7x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{7}{2}} =$$

$$= \frac{7}{2} \cdot \frac{49}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{343}{8} - 0 = \frac{343}{24}.$$

9. Számítsuk ki az $x^2 + y^2 = 16$ kör és $y^2 = 6x$ parabola által határolt zárt síkidomok területének nagyságát.

Megoldás. Az $x^2 + y^2 = 16$ középponti kör, melynek sugara $r = 4$. Az $y^2 = 6x$ parabola az $f_1(x) = \sqrt{6x}$ és $f_2(x) = -\sqrt{6x}$ függvények grafikonjaiból tevődik össze. A kör és a parabola metszéspontjainak abszcisszáját az $x^2 + 6x - 16 = 0$ egyenlet $x = 2$ pozitív megoldása adja. A grafikon jobboldali kisebb T_2 területe két részből számítható ki, a parabola alatti és a körvonal alatti terület összegéből. Eszerint



$$T_2 = \int_0^2 \left(\sqrt{6x} - (-\sqrt{6x})\right) dx + \int_2^4 \left(\sqrt{16 - x^2} - (-\sqrt{16 - x^2})\right) dx =$$

$$= 2\int_0^2 \sqrt{6x} dx + 2\int_2^4 \sqrt{16 - x^2} dx.$$

Vegyük észre, hogy a keresett terület szimmetrikus az x-tengelyre és emiatt a T_2 területet kiszámíthatjuk az x-tengely feletti rész kétszereseként is. Vezessük be a második integrálban az $x = 4\sin t$, $dx = 4\cos t dt$ helyettesítést. Ekkor

$$T_2 = \frac{4\sqrt{6}}{3} x\sqrt{x}\Bigg|_0^2 + 32\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{4\sqrt{6}}{3}(2\sqrt{2} - 0) + 16\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt =$$

$$= \frac{16\sqrt{3}}{3} + 16t\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + 8\sin 2t\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16\sqrt{3}}{3} + 16\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 8\left(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{3}\right) =$$

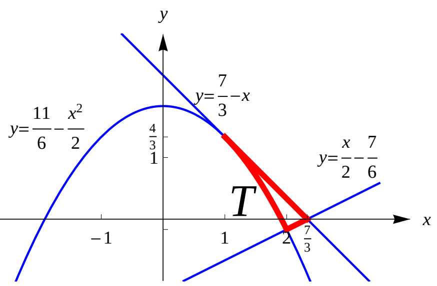
$$= \frac{16\sqrt{3}}{3} + \frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3} = \frac{4}{3}(\sqrt{3} + 4\pi).$$

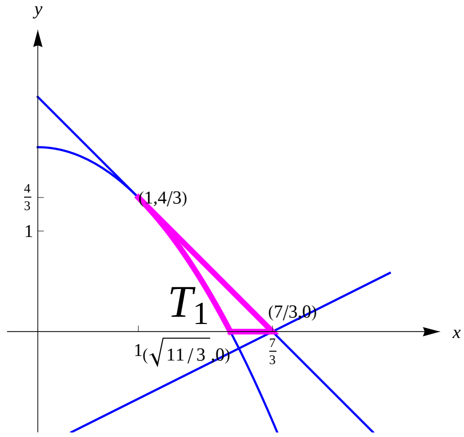
A baloldali T_1 terület nagyságát úgy számíthatjuk ki legegyszerűbben, ha a kör területéből kivonjuk a T_2 területet és ez

$$T_1 = T_{\text{kör}} - T_2 = 16\pi - \frac{4}{3}\left(\sqrt{3} + 4\pi\right) = \frac{4}{3}\left(8\pi - \sqrt{3}\right).$$

10. Határozzuk meg az $y = \dfrac{11}{6} - \dfrac{x^2}{2}$ parabola, a parabola $x = 1$ pontban húzott érintője és a parabola $x = 2$ pontban húzott merőleges egyenese által határolt zárt terület nagyságát.

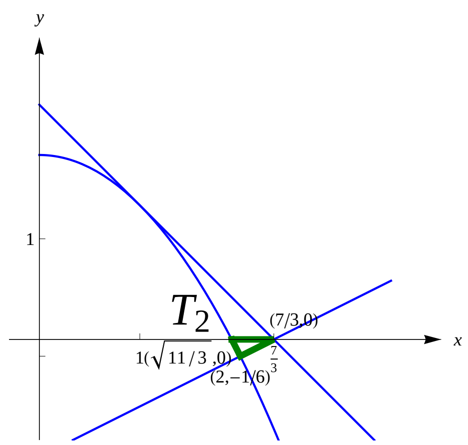
I.Megoldás. A parabola érintőjének és merőleges egyenesének meghatározásához szükség van az $f(x) = \dfrac{11}{6} - \dfrac{x^2}{2}$ függvény $f'(x) = -x$ deriváltjára. Az adott parabola $x = 1$ pontban húzott érintőjének egyenlete $y = -x + \dfrac{7}{3}$, az $x = 2$ pontban húzott merőlegesének egyenlete pedig $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{7}{6}$. Az $y = -x + \dfrac{7}{3}$ érintőegyenes és az $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{7}{6}$ merőleges egyenes $\left(\dfrac{7}{3}, 0\right)$ pontban metszik egymást.

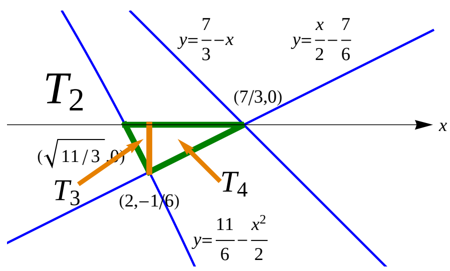




A keresett területet felbontjuk a T_1 területre, amely az x-tengely felett helyezkedik el, valamint a T_2 területre, amely az x-tengely alatt helyezkedik el. Ekkor

$$T_1 = \int_1^{\frac{7}{3}} \left(-x + \frac{7}{3}\right) dx - \int_1^{\sqrt{\frac{11}{3}}} \left(\frac{11}{6} - \frac{x^2}{2}\right) dx = \left(\frac{8}{9} + \frac{1}{27}\left(45 - 11\sqrt{33}\right)\right).$$





A T_2 területet is két részre bontva számoljuk ki, az egyik a parabola feletti terület a $\left[\sqrt{\frac{11}{3}}, 2\right]$ intervallumon, a másik pedig a parabola merőleges egyenese feletti terület a $\left[2, \frac{7}{3}\right]$ intervallumon, azaz

$$T_2 = \left| \int_{\sqrt{\frac{11}{3}}}^{2} \left(\frac{11}{6} - \frac{x^2}{2} \right) dx \right| + \left| \int_{2}^{\frac{7}{3}} \left(\frac{x}{2} - \frac{7}{6} \right) dx \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{27} \left(63 - 11\sqrt{33} \right) \right| + \left| -\frac{1}{36} \right| = \frac{1}{27} \left(11\sqrt{33} - 63 \right) + \frac{1}{36}.$$

A keresett terület $T = T_1 + T_2 = \dfrac{1}{4}$.

II.Megoldás. A keresett terület más felbontásban is kiszámolható. Az $[1, 2]$ intervallumon az érintő alatti területből kivonjuk a parabola alatti területet, majd a $\left[2, \frac{7}{3}\right]$ intervallumon az érintő alatti területből kivonjuk a merőleges alatti területet. Ekkor

$$T = \int_1^2 \left[-x + \frac{7}{3} - \left(\frac{11}{6} - \frac{x^2}{2} \right) \right] dx + \int_2^{\frac{7}{3}} \left[-x + \frac{7}{3} - \left(\frac{x}{2} - \frac{7}{6} \right) \right] dx =$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} \right) dx + \int_2^{\frac{7}{3}} \left(-\frac{3}{2}x + \frac{7}{2} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x \right]_1^2 + \left[-\frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{7}{2}x \right]_2^{\frac{7}{3}} =$$

$$= \left[\frac{8}{6} - \frac{4}{2} + 1 \right] - \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] + \left[-\frac{3}{2} \cdot \frac{49}{18} + \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{3} \right] - \left[-\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{2} + 7 \right] = \frac{1}{4}.$$

5.6.2. Forgástestek térfogata

Ha az $y = f(x)$ folytonos görbe $[a, b]$ intervallum feletti ívét megforgatjuk az x-tengely körül, akkor egy $\mathcal{T}$ forgástestet kapunk. A kapott $\mathcal{T}$ forgástest térfogata

$$V(\mathcal{T}) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Vizsgáljuk meg, hogyan juthatunk el ehhez a képlethez az Arkhimédészi módszer segítségével. Tekintsük e célból az $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ korlátos függvényt, az $[a, b]$ intervallum egy $\mathcal{F}$ felosztását és legyen $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$, a részintervallumok tetszőleges pontjainak egy kiválasztása. Legyen H_i $(i = 1, 2, ..., n)$ olyan henger, melynek magassága az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon megegyezik a forgást megfelelő szeletének magasságával, azaz Δx_i, alapjának sugara pedig $f(\xi_i)$. A H_i $(i = 1, 2, ..., n)$ henger térfogata így $V(H_i) = (f(\xi_i))^2 \pi \Delta x_i$. Az így kapott hengerek összege

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} V(H_i) = \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i))^2 \pi \Delta x_i.$$

Ha létezik a V_n összeg egyértelmű határértéke az $[a, b]$ intervallum minden $\mathcal{F}$ felosztására és minden $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$ pontválasztásra, akkor ez a határérték a tekintett forgástest térfogata, azaz

$$V(\mathcal{T}) = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i))^2 \pi \Delta x_i = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Ha az $x = g(y)$ folytonos görbe $[c, d]$ intervallum feletti ívét forgatjuk meg az y-tengely körül, akkor a kapott $\mathcal{T}$ forgástest térfogata

$$V(\mathcal{T}) = \pi \int_c^d (g(y))^2 dy.$$

FELADATOK.

1. Határozzuk meg annak a forgástestnek a térfogatát, amely az $y = 2x + 3$ egyenes x-tengely körüli forgatásával keletkezik a $[-1, 4]$ intervallum felett.

Megoldás. Mivel a görbét az x-tengely körül forgatjuk, a keletkezett forgástest térfogatát a

$$V = \pi \int_{-1}^{4} (2x + 3)^2 dx$$

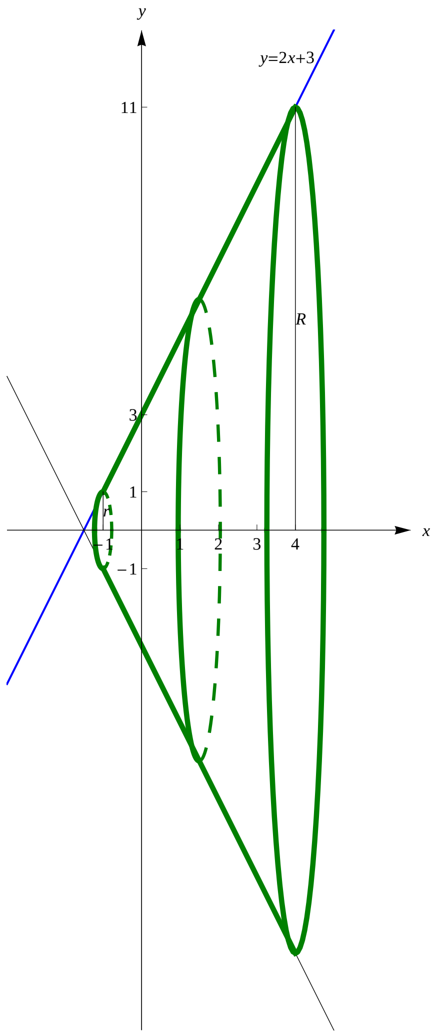
formula adja. Vezessük be a $t = 2x + 3$, $dt = 2dx$, $dx = \dfrac{dt}{2}$, helyettesítést. Ekkor

$$V = \frac{\pi}{2} \int_1^{11} t^2 dt = \left.\frac{\pi t^3}{6}\right|_1^{11} = \frac{665\pi}{3}.$$

Mivel a forgástest ebben az esetben egy csonkakúp, ahol $H = 5$, $r = y(-1) = 1$ és $R = y(4) = 11$, ezért a csonkakúp térfogatképletével is számolhatunk, vagyis

$$V = \frac{H\pi}{3} \left(R^2 + Rr + r^2\right) =$$

$$= \frac{5\pi}{3} (121 + 11 + 1) = \frac{665\pi}{3}.$$

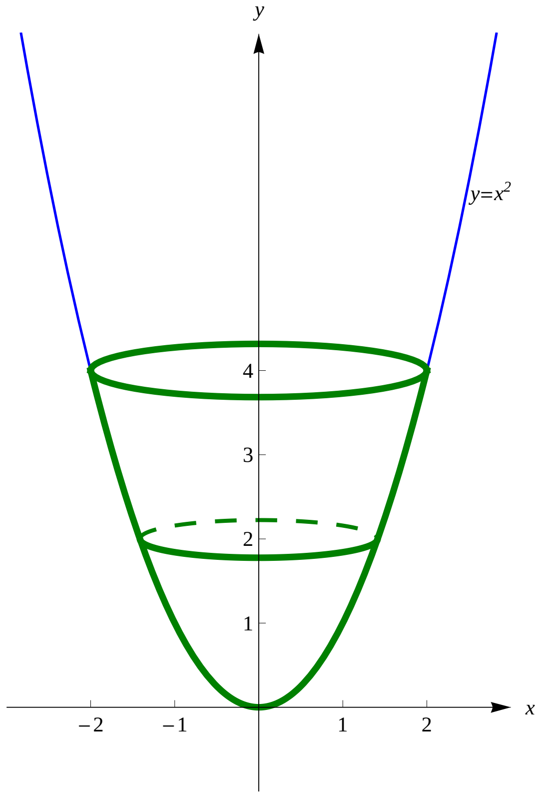


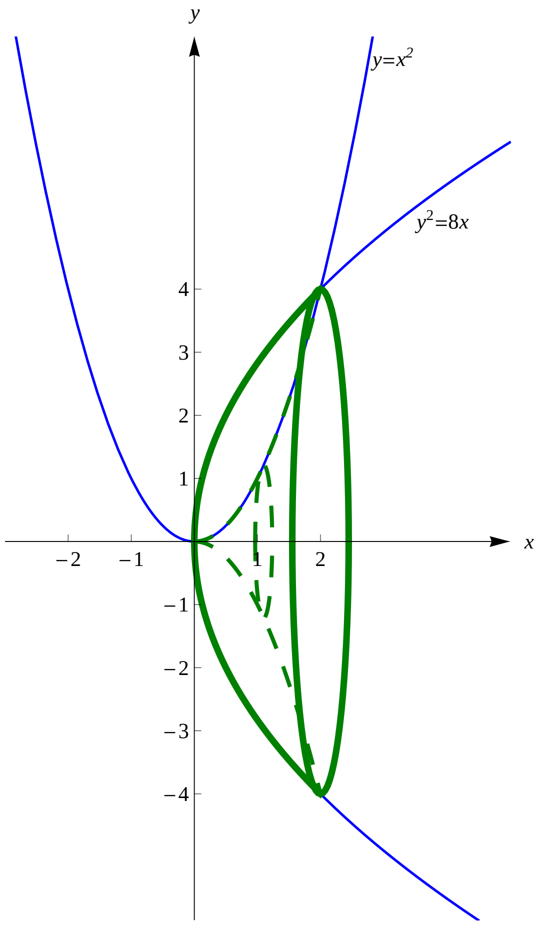
2. Számoljuk ki annak a forgásparaboloidnak a térfogatát, amely az $y = x^2$ parabola y-tengely körüli forgatásával keletkezik, ha $0 \leq y \leq 4$.

Megoldás. A görbét az y-tengely körül forgatjuk, tehát a térfogat kiszámításához ki kell fejeznünk a függvényt $x = \sqrt{y}$ alakban. Felhívjuk a figyelmet, hogy az

$x = -\sqrt{y}$ alak is megfelelő lenne, mert mindkét görbe forgatásával ugyanazt a forgástestet kapjuk.

$$V = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{y}\right)^2 dy = \pi \int_0^4 y dy = \left. \frac{\pi\ y^2}{2} \right|_0^4 = 8\pi.$$





3. Számítsuk ki annak a forgástestnek a térfogatát, amelyet az $y = x^2$ és $y^2 = 8x$ parabolák által határolt zárt tartomány x-tengely körüli forgatásával kapunk.

Megoldás. A két görbe a $(0, 0)$ és $(2, 4)$ pontokban metszi egymást. $x \in [0, 2]$ esetén az $y^2 = 8x$ parabola íve távolabb van az x-tengelytől mint az $y = x^2$ parabolaív, ezért a keresett térfogatot úgy számítjuk ki, hogy a nagyobb térfogatból kivonjuk a kisebb térfogatot, vagyis

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_0^2 8x dx - \pi \int_0^2 \left(x^2\right)^2 dx = 8\pi \cdot \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^2 - \pi \cdot \left. \frac{x^5}{5} \right|_0^2 =$$

$$= 4\pi \cdot (4 - 0) - \frac{\pi}{5} \cdot (32 - 0) = 16\pi - \frac{22}{5}\pi = \frac{48\pi}{5}.$$

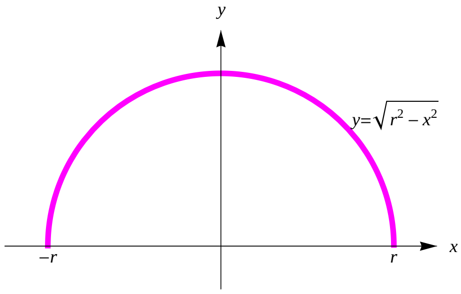
5.6.3. Ívhossz számítás

Legyen az f függvénynek folytonos első deriváltja az $[a,b]$ zárt intervallumon. Az f függvény grafikonja $A(a,f(a))$ és $B(b,f(b))$ pontokkal meghatározott ℓ ívének hosszát a következő határozott integrál adja meg:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx \ .$$

FELADATOK.

1. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$ függvény grafikonjának ívhosszát, ha $r>0$.
Megoldás. Mivel az x változó a $[-r,r]$ intervallumból veheti fel az értékeit, a függvény első deriváltja pedig $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$, ezért a keresett ívhossz



$$\ell = \int_{-r}^{r} \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}dx = \int_{-r}^{r} \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}dx = \int_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{r})^2}}dx.$$

Vezessük be a $t = \dfrac{x}{r}$, $rdt = dx$ helyettesítést. Ekkor

$$\ell = r\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = r \arcsin t|_{-1}^{1} = r\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = r\pi,$$

s ez valóban az r sugarú kör félkörívének hosszúsága.

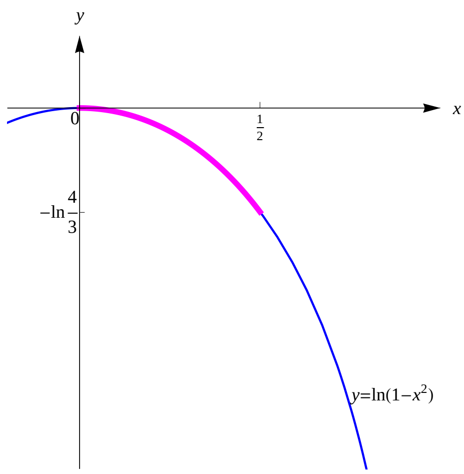
2. Számítsuk ki az $y = \ln\left(1-x^2\right)$ görbe ívének hosszát ha $0 \le x \le \dfrac{1}{2}$.
Megoldás. Mivel

$$f(x) = \ln\left(1-x^2\right)$$

esetén

$$f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2},$$

így a keresett ívhossz



$$\ell = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+2x^2+x^4}{(1-x^2)^2}}dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+1}{1-x^2} dx = -\int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2}{1-x^2}\right) dx = -x\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \ln \frac{1+x}{1-x}\Big|_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2} + \ln \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} - \ln 1 = \ln 3 - \frac{1}{2}.$$

5.6.4. Forgástestek felszíne

Legyen $f : [a,b] \mapsto \mathbf{R}$ olyan, hogy $f(x) \geq 0$ minden $x \in [a,b]$ esetén, és az f függvénynek legyen az $[a,b]$ intervallum felett folytonos deriváltja. Forgassuk meg az f függvény $[a,b]$ intervallumhoz tartozó grafikonját az x-tengely körül. Ekkor a kapott forgástest palástjának felszíne a következő formulával adott:

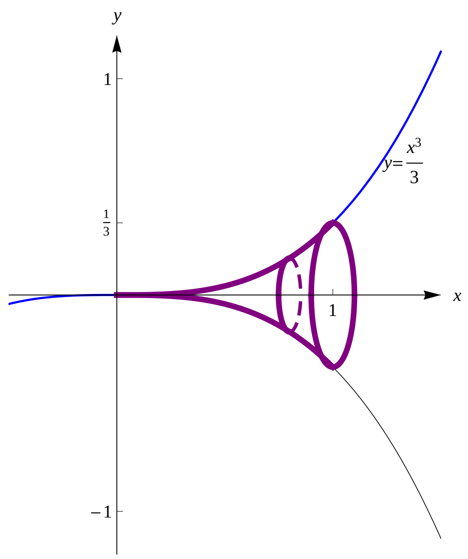
$$F = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2} dx.$$

Ha az $x = g(y)$ folytonos görbe $[c,d]$ intervallum feletti ívét forgatjuk meg az y-tengely körül, akkor a kapott $\mathcal{T}$ forgástest térfogata

$$F = 2\pi \int_c^d g(y)\sqrt{1+(g'(y))^2} dy.$$

FELADATOK.

1. Számítsuk ki annak a forgástestnek a palástfelszínét, amelyet a $3y = x^3$ görbe $0 \leq x \leq 1$ intervallumhoz tartozó ívének x-tengely körüli forgatásával kapunk.



Megoldás. Mivel $f(x) = \dfrac{x^3}{3}$ esetén $f'(x) = x^2$, így a képlet alapján a keresett palástfelszínt az

$$F = 2\pi \int_0^1 \frac{x^3}{3}\sqrt{1+x^4} dx =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_0^1 x^3\sqrt{1+x^4} dx$$

képlettel számoljuk. Vezessük be az $1+x^4 = t$, $4x^3 dx = dt$, $x^3 dx = \dfrac{dt}{4}$ helyettesítést. Ekkor

$$F = \frac{\pi}{6} \int_1^2 \sqrt{t} dt = \frac{\pi}{9} t\sqrt{t}\Big|_1^2 = \frac{\pi}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

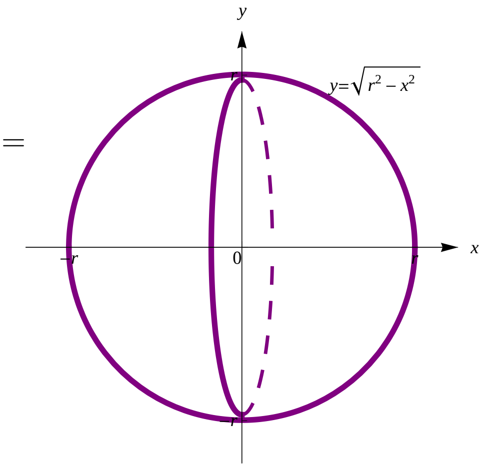
2. Számoljuk ki annak a gömbnek a felszínét, amely az $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ félkör x-tengely körüli forgatásával keletkezik.

Megoldás. Mivel az x változó a $[-r, r]$ intervallumból veszi az értékeit, a félkört meghatározó függvényértékek nemnegatívak. Az f függvény első deriváltja most $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, ezért a gömb felszíne

$$F = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} r\, dx = 2\pi r\, x|_{-r}^{r} = 4r^2\pi.$$



5.7. Improprius integrál

5.7.1. Első típusú improprius integrál

5.11. Definíció. *Ha az $f : [a, \infty] \mapsto \mathbf{R}$ függvény integrálható az $[a, b]$ intervallumon, minden $b > a$ esetén, az f függvény első típusú improprius integrálja az $[a, \infty]$ intervallumon a következő határérték:*

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{T \to \infty} \int_a^T f(x)dx.$$

Ha a fenti határérték létezik, akkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^{\infty} f(x)dx$ improprius integrál konvergens, ha nem létezik, akkor az adott integrál divergens.
Hasonlóan, az $f : [-\infty, b] \mapsto \mathbf{R}$ függvényre, amely integrálható a $[c, b]$ intervallumon, minden $c < b$ esetén, úgy definiáljuk az f függvény első típusú improprius integrálját a $[-\infty, b]$ intervallumon, mint a következő határértéket:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{T_1 \to -\infty} \int_{T_1}^{b} f(x)dx.$$

Végül, a definíció szerint az $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ függvényre, amely integrálható a $[c, d]$ intervallumon, minden $c, d \in \mathbf{R}$, $c < d$ esetén,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx\ .$$

Belátható, hogy ez a definíció nem függ az a számtól. Az $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ improprius integrál a definíció szerint konvergens, ha mindkét jobb oldalon szereplő improprius integrál konvergens.

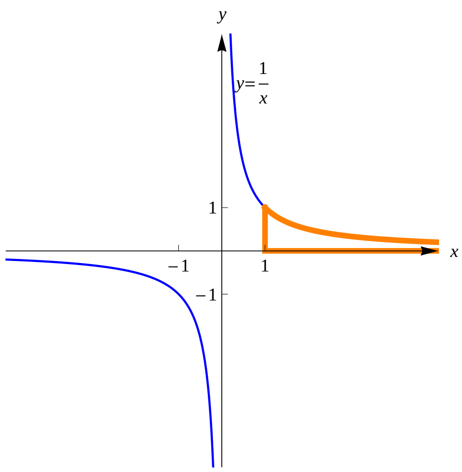
FELADATOK.

1. Határozzuk meg az $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ improprius integrál értékét.

Megoldás. Az improprius integrált úgy számoljuk, mint a határozott integrál határértékét:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{T\to\infty} \int_1^T \frac{1}{x}dx =$$

$$= \lim_{T\to\infty} [\ln x]|_1^T = \lim_{T\to\infty} \ln T = \infty.$$



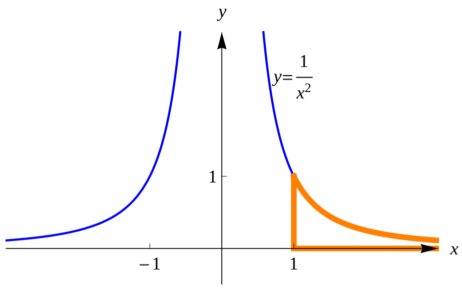
Mivel határozott integrálról, tehát területről van szó, ez egyúttal azt is jelenti, hogy az $y = \frac{1}{x}$ görbe és az x-tengely közötti terület az $x = 1$ egyenestől jobbra végtelen nagy.

2. Számítsuk ki az $y = \frac{1}{x^2}$ görbe és az x-tengely közötti terület nagyságát $x \geq 1$ esetén.

Megoldás. Ezt a területet egy első típusú improprius integrál segítségével lehet kiszámítani, azaz

$$T = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{T\to\infty} \int_1^T x^{-2}dx =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)_1^T = \lim_{T\to\infty} \left(-\frac{1}{T} + 1\right) = 1.$$



Ez az improprius integrál tehát konvergens, a keresett terület mérőszáma 1, tehát véges.

3. Számítsuk ki az $y = \frac{1}{x^2+25}$ görbe és az x-tengely közötti területet a görbét meghatározó függvény teljes értelmezési tartományán.

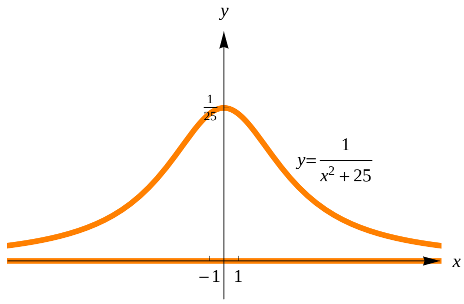
Megoldás. Az $f(x) = \frac{1}{x^2+25}$ függvény értelmezési tartománya a valós számok $\mathbf{R}$ halmaza. Az f függvény páros, tehát a grafikonja, és így a keresett terület is, szimmetrikus az y-tengelyre, ezért a területet a következő módon számolhatjuk ki:

$$T = \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+25} = 2\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+25} = 2\lim_{T\to\infty} \int_0^T \frac{dx}{x^2+25} = \frac{2}{25}\lim_{T\to\infty} \int_0^T \frac{dx}{\left(\frac{x}{5}\right)^2+1}.$$

Vezessük be az $\frac{x}{5} = t$, $dx = 5dt$ helyettesítést. Ekkor

$$T = \frac{2}{5}\lim_{T\to\infty}\int_0^{\frac{T}{5}}\frac{dt}{t^2+1} = \frac{2}{5}\lim_{T\to\infty}(\operatorname{arctg} t)\Big|_0^{\frac{T}{5}} =$$

$$= \frac{2}{5}\lim_{T\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{T}{5} - \operatorname{arctg} 0\right) = \frac{2}{5}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{5}.$$



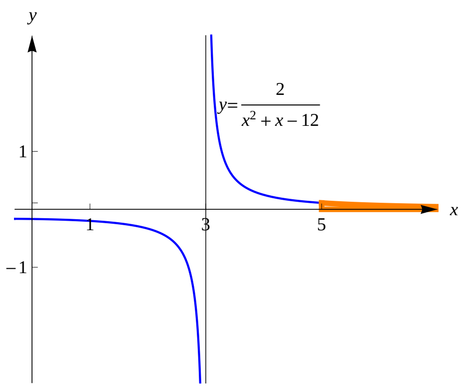
4. Számítsuk ki az $\displaystyle\int_5^\infty \frac{2}{x^2+x-12}dx$ improprius integrált.

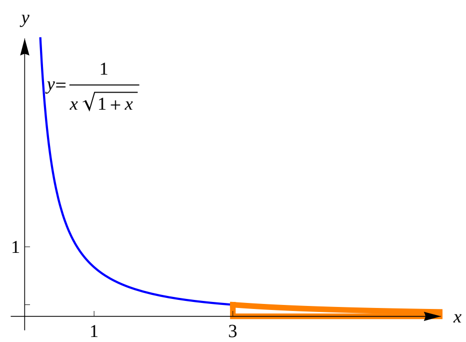
Megoldás.

$$\int_5^\infty \frac{2}{x^2+x-12}dx = 2\int_5^\infty \frac{1}{(x-3)(x+4)}dx =$$

$$= 2\lim_{T\to\infty}\int_5^T\left(\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{x-3} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{x+4}\right)dx = \frac{2}{7}\lim_{T\to\infty}\left[\left(\ln\left|\frac{x-3}{x+4}\right|\right)\Big|_5^T\right] =$$

$$= \frac{2}{7}\lim_{T\to\infty}\left(\ln\left|\frac{T-3}{T+4}\right| - \ln\frac{2}{9}\right) = \frac{2}{7}\cdot\left(\ln 1 - \ln\frac{2}{9}\right) = \frac{2}{7}\ln\frac{9}{2}.$$





5. Számítsuk ki az $\displaystyle\int_3^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}$ improprius integrált.

Megoldás. Az adott improprius integrált az $1+x=t^2$, $x=t^2-1$, $dx=2tdt$ helyettesítéssel oldhatjuk meg a következő módon:

$$\int_3^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x}} = \int_2^\infty \frac{2tdt}{(t^2-1)\,t} = 2\lim_{T\to\infty}\int_2^T\frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= 2\lim_{T\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Big|_2^T\right] = \lim_{T\to\infty}\left(\ln\left|\frac{T-1}{T+1}\right| - \ln\frac{1}{3}\right) = \ln 1 - \ln\frac{1}{3} = \ln 3.$$

5.7.2. Második típusú improprius integrál

5.12. Definíció. *Ha az $f : [a, b] \mapsto \mathbf{R}$ függvény integrálható a $[c, d] \subset [a, b]$ intervallumon, minden $c, d \in (a, b)$ esetén, és a következő egyenlőségek egyike érvényes:*

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to b-0} f(x) = -\infty,$$

(azaz, ha f nemkorlátos a b bármely környezetében), akkor az f függvény második típusú improprius integrálja az $[a, b]$ intervallumon a következő határérték:

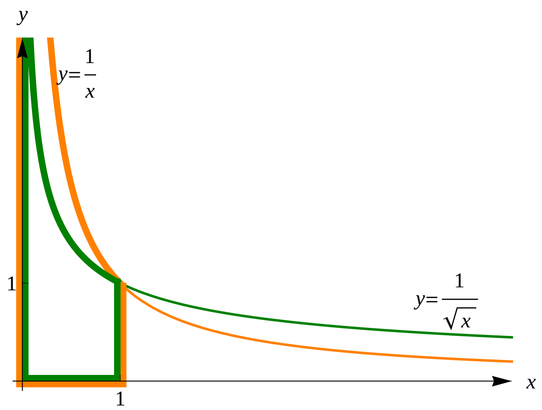
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Mint az első típusú improprius integrálok esetében, az $\int_a^b f(x)dx$ integrál konvergens, illetve divergens, ha a fenti határérték létezik, illetve nem létezik. Az f függvény második típusú improprius integráljához hasonlóan definiáljuk az $[a, b]$ intervallumon az improprius integrált, ha érvényes a következő egyenlőségek egyike:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to a+0} f(x) = -\infty.$$

FELADATOK.

1. Számítsuk ki az $y = \dfrac{1}{x}$ görbe, valamint az $x = 0$, $x = 1$ és az $y = 0$ egyenesek közötti terület nagyságát.



Megoldás. Mivel az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvény nem értelmezett $x = 0$-ban, ezért a keresett terület egy második típusú improprius integrállal számolható ki:

$$T = \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \ln |x| \Big|_\varepsilon^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} (\ln 1 - \ln \varepsilon) = 1 - (-\infty) = \infty.$$

A kapott integrál tehát divergens, a keresett terület végtelen nagy.

2. Számítsuk ki az $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ görbe, valamint az $x = 0$, $x = 1$ és az $y = 0$ egyenesek által határolt terület nagyságát.

Megoldás. Az $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ függvény nem értelmezett az $x = 0$ pontban, így a keresett területet egy második típusú improprius integrállal számolhatjuk ki. Ebben az esetben

$$T = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(2\sqrt{x}\right)\Big|_\varepsilon^1 = 2 \lim_{\varepsilon \to 0} \left(1 - \sqrt{\varepsilon}\right) = 2,$$

tehát most az integrál konvergens, a területet meghatározó mérőszám pedig 2.

3. Számoljuk ki az $\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ integrál értékét.

Megoldás. Az integrálandó függvény nem értelmezett az integrál felső határában, tehát improprius integrálról van szó.

$$I = \int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Vezessük be a $t = 1-x^2$, $dt = -2xdx$, $-dt = 2xdx$ helyettesítést. Ekkor

$$I = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_1^{1-(1-\varepsilon)^2} \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{t}\Big|_1^{1-(1-\varepsilon)^2} = -2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2}-\sqrt{1}\right) = 2.$$

4. Számítsuk ki az $\int_0^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ improprius integrált.

Megoldás. Az integrandus nem értelmezett $x=0$ pontban. Ezért második típusú improprius integrálról van szó. Ekkor

$$\int_0^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \left(3x^{\frac{4}{3}} + 2x^{-\frac{2}{3}}\right)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\left(\frac{9}{7}x^2\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[3]{x}\right)\Big|_\varepsilon^1\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{9}{7} + 6 - \frac{9}{7}\varepsilon^2\sqrt[3]{\varepsilon} - 6\sqrt[3]{\varepsilon}\right) = \frac{51}{7} = 7\frac{2}{7}.$$

5. Számítsuk ki az $\int_1^{10} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}}$ improprius integrált.

Megoldás. Vegyük észre, hogy az $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$ függvény nem értelmezett $x=2$-ben, és ez az $[1,10]$ intervallumba esik. Tehát az integrált szét kell bontani két integrál összegére, melyek közül az egyik az $[1,2]$, másik a $[2,10]$ intervallumra vonatkozik. Ekkor

$$\int_1^{10} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} + \int_2^{10} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_1^{2-\varepsilon_1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{2+\varepsilon_2}^{10} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-2)^2}\right)\Big|_1^{2-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-2)^2}\right)\Big|_{2+\varepsilon_2}^{10} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{(-\varepsilon_1)^2} - \frac{3}{2}\cdot 1\right) + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\left(\frac{3}{2}\cdot 4 - \frac{3}{2}\sqrt[3]{(\varepsilon_2)^2}\right) = \frac{9}{2}.$$