4. Egyváltozós valós függvények differenciálszámítása

4.1. A differenciálszámítás alapfogalmai

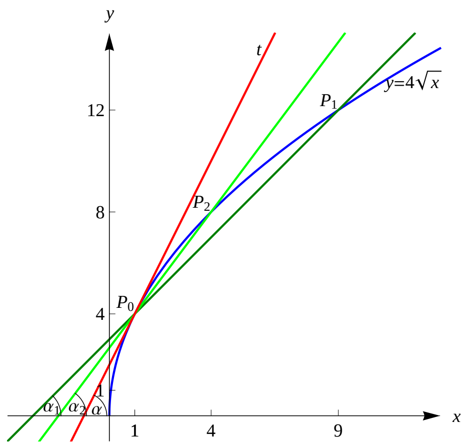
4.1.1. A görbe érintője és a pillanatnyi sebesség

Tekintsük az $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ $f(x) = 4\sqrt{x}$ függvényt. Húzzuk meg az $y = 4\sqrt{x}$ görbe egy szelőjét a $P_0(1, 4\sqrt{1})$ és $P_1(9, 4\sqrt{9})$ pontokon át, majd egy másikat a $P_0(1, 4\sqrt{1})$ és $P_2(4, 4\sqrt{4})$ pontokon keresztül. (A *görbe szelőjének* nevezünk minden olyan egyenest, amelynek a görbével legalább két közös pontja van.) Ezeknek a szelőknek az iránytényezője

$$k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{4\sqrt{9} - 4\sqrt{1}}{9 - 1} = 1, \quad k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{4\sqrt{4} - 4\sqrt{1}}{4 - 1} = \frac{4}{3}.$$

Képzeljünk el egy olyan $\{x_n\}$ számsorozatot, ahol $x_1 = 9$, $x_2 = 4$, a sorozat többi eleme pedig monoton csökkenve tart 1-hez, azaz $x_n \to 1$. Ha szelőt fektetünk a $P_0(1, 4\sqrt{1})$ és valamely $P_n(x_n, 4\sqrt{x_n})$ ponton keresztül, akkor a kapott szelő iránytangense

$$k_n = \operatorname{tg}\alpha_n = \frac{4\sqrt{x_n} - 4\sqrt{1}}{x_n - 1} \quad \text{és}$$



$$A = \lim_{x_n\to 1} \operatorname{tg}\alpha_n = \lim_{x_n\to 1} \frac{4\sqrt{x_n} - 4\sqrt{1}}{x_n - 1} = \lim_{x_n\to 1} \frac{4(\sqrt{x_n} - \sqrt{1})}{x_n - 1} \cdot \frac{\sqrt{x_n} + \sqrt{1}}{\sqrt{x_n} + \sqrt{1}} =$$

$$= 4 \lim_{x_n\to 1} \frac{x_n - 1}{(x_n - 1)(\sqrt{x_n} + \sqrt{1})} = 4 \lim_{x_n\to 1} \frac{1}{\sqrt{x_n} + \sqrt{1}} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

Ha $x_n \to 1$, akkor a megfelelő szelők sorban az $y = 4\sqrt{x}$ görbe $P_0(1, 4)$ pontban húzott érintőjéhez tartanak, tehát $A = 2$ ennek az érintőnek az iránytényezője. (A *görbe érintőjének* nevezünk minden olyan egyenest, amelynek a görbével legalább egy közös pontja van és a közös pont - úgynevezett érintési pont - egy környezetében a görbe csak az egyenes egyik oldalán helyezkedik el.)

Általánosan tekintsünk egy f függvényt, amely értelmezett az $x_0 \in \mathbf{R}$ pont egy környezetében. Vegyünk ismét $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$ pontokat és tekintsük a $P_0(x_0, f(x_0))$ és $P_n(x_n, f(x_n))$ pontokon áthaladó szelő iránytangensét. Jelölje $\Delta x = x_n - x_0$ az x-tengelyen az x_0 ponttól való eltávolodás mértékét, azaz az x független változó növekményét és

$\Delta y = f(x_n) - f(x_0)$ az y-tengelyen az $f(x_0)$ függvényértéktől való eltávolodás mértékét, azaz az f függvény x_0 ponthoz tartozó növekményét. Most

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

alakban is felírható, s ezt a $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ hányadost az $y = f(x)$ függvénygörbe $x = x_0$ ponthoz tartozó differenciahányadosának (különbségi hányadosának) nevezzük. Ha létezik az

$$A = \lim_{x_n \to x_0} \operatorname{tg} \alpha_n = \lim_{x_n \to x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

határérték, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény grafikonjának a $P_0(x_0, f(x_0))$ pontban létezik érintője és ennek az érintőnek az iránytangense A.

Tekintsük most az egyik speciális mozgást, a szabadesést. Ha egy golyót leejtünk akkor a golyó t_0 idő alatt $s_0 = \dfrac{g}{2}t_0^2$, t_n idő alatt pedig $s_n = \dfrac{g}{2}t_n^2$ utat tesz meg (g a nehézségi gyorsulás). A

$$\frac{\frac{g}{2}t_n^2 - \frac{g}{2}t_0^2}{t_n - t_0}$$

hányados azt az átlagsebességet mutatja, amivel haladva a golyó az $s_n - s_0$ utat $t_n - t_0$ idő alatt tenné meg. Ha t_n olyan időpillanatok sorozata, hogy $t_n \neq t_0$, $t_n \to t_0$, akkor ha a

$$v = \lim_{t_n \to t_0} \frac{\frac{g}{2}t_n^2 - \frac{g}{2}t_0^2}{t_n - t_0}$$

határérték létezik, akkor ezt a v határértéket a mozgó test t_0 időpontbeli pillanatnyi sebességének nevezzük.

Általánosan, ha ismerjük az $s = s(t)$ útfüggvényt, és t_n olyan időpillanatok sorozata, hogy $t_n \neq t_0$, $t_n \to t_0$, valamint ha $\Delta t = t_n - t_0$ az idő, mint független változó növekménye és $\Delta s = s(t_n) - s(t_0)$ az útfüggvény növekménye, akkor a t_0 időpontban a mozgó test pillanatnyi sebessége

$$v = \lim_{t_n \to t_0} \frac{s(t_n) - s(t_0)}{t_n - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

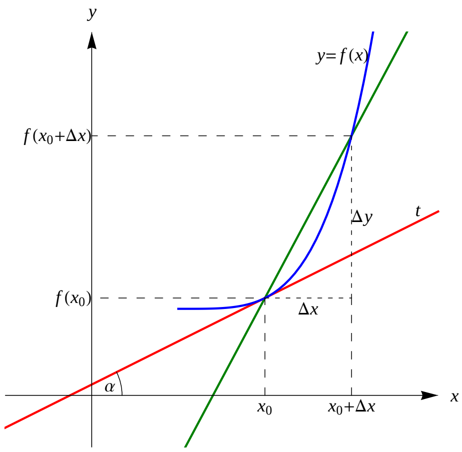
A két problémában az közös, hogy 0-val nem lehet osztani. Ezért kell a szelők iránytangenseiből, illetve az átlagsebességekből sorozatokat képezni és vizsgálni, hogy e sorozatok konvergensek-e.

4.1.2. A derivált (differenciálhányados) fogalma

Egy pontbeli érintő és egy időpontbeli sebesség problémájának vizsgálata ugyanarra a feladatra vezetett. Azt kell vizsgálni, hogy ha adott egy $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ függvény és $x_0 \in (a, b)$, akkor az

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

differenciahányados függvénynek létezik-e határértéke az x_0 pontban, ha Δx közelít nullához.



Sok más gyakorlati (sűrűség, áramerősség, gyorsulás) és elméleti feladat is ugyanerre a problémára vezet, ezért érdemes erre a határértékre külön elnevezést bevezetni.

4.1. Definíció. *Legyen f az (a, b) intervallumon értelmezett függvény és $x_0 \in (a, b)$ egy adott pont. Legyen továbbá Δx az x független változó olyan növekménye, amelyre igaz, hogy $x_0 + \Delta x \in (a, b)$. Ekkor az f függvényt az x_0 pontban deriválhatónak vagy differenciálhatónak nevezzük, ha létezik a*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

határérték. Ezt a határértéket nevezzük az f függvény x_0 pontbeli deriváltjának vagy differenciálhányadosának, szokásos jelölése pedig

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = x_0}.$$

A derivált további jelölései:

$$\left. f'(x) \right|_{x=x_0}, \qquad \text{illetve} \qquad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

Ez utóbbi jelölés egybetartozó szimbólum, a törtvonal tehát nem osztást jelöl!

Szokás a derivált definíciójában használni a $\Delta x = h$ jelölést. Ekkor az f függvény x_0 helyen vett deriváltját így is írhatjuk:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Vezessük be most az $x = x_0 + \Delta x$ jelölést. Ez esetben $\Delta x \to 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x \to x_0$. Ezzel a jelöléssel az f függvény x_0 helyen vett differenciálhányadosa a következő ekvivalens alakban írható fel:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Mivel az x_0 pontbeli differenciálhányados értéke a $P_0(x_0, f(x_0))$ pontban megegyezik az $y = f(x)$ függvénygörbéhez húzott t érintő meredekségével, vagyis

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha,$$

ezért a t érintőegyenes egyenlete

$$t: \ y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

a $P_0(x_0, f(x_0))$ pontban $y = f(x)$ függvénygörbéhez húzott n merőleges egyenes egyenlete pedig

$$n: \ y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Látható, hogy a differenciálhatóság a függvény pontbeli tulajdonsága, bár a pont környezetében való értelmezettsége is követelmény. Természetesen vannak olyan függvények, amelyek értelmezési tartományuk több pontjában, esetleg értelemzési tartományuk valamely részintervallumán differenciálhatók, sőt sok függvény a teljes értelmezési tartományán differenciálható. Az alábbiakban megadjuk az intervallumon való differenciálhatóság definícióját.

4.2. Definíció. *Az f függvényt az (a, b) intervallumon differenciálható függvénynek nevezzük, ha f az (a, b) intervallum minden pontjában differenciálható.*

4.3. Definíció. *Azt a függvényt, mely az (a, b) intervallum minden pontjához az f adott pontbeli deriváltját rendeli hozzá, az f függvény deriváltfüggvényének, vagy röviden deriváltjának nevezzük és f'-vel, vagy $\frac{df}{dx}$-szel jelöljük, s így*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad x \in (a, b).$$

4.1. Példa. Legyenek a és b valós számok. Az $f(x) = ax + b$ függvény deriváltját a definícó segítségével a következőképpen számíthatjuk ki:

$$(ax + b)' = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a(x + \Delta x) + b - ax - b}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a(x + \Delta x - x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a}{1} = a.$$

4.2. Példa. Az $f(x) = x^2$ függvény deriváltja a definícó segítségével így számítható ki:

$$(x^2)' = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2x + \Delta x}{1} = 2x.$$

4.3. Példa. Az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény deriváltjának kiszámítása a definícó segítségével:

$$(\sqrt{x})' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{(\Delta x)(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

4.4. Példa. Az $f(x) = \sin x$ függvény deriváltjának meghatározása a definícó segítségével:

$$(\sin x)' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x+\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} =$$

$$= \lim_{\frac{\Delta x}{2} \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos \frac{2x + \Delta x}{2} = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

4.5. Példa. Az $f(x) = \cos x$ függvény deriváltjának kiszámítása a definícó alapján:

$$(\cos x)' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2 \sin \frac{\Delta x}{2} \sin \frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2} \sin \frac{2x+\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} =$$

$$= -\lim_{\frac{\Delta x}{2} \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \sin \frac{2x + \Delta x}{2} = -1 \cdot \sin x = -\sin x.$$

4.6. Példa. Az $f(x) = a^x$ függvény deriváltját is ki lehet számítani a definícó segítségével. Legyen $a > 0$, $a \neq 1$ és $x \in \mathbf{R}$. Ekkor

$$(a^x)' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

A levezetésben felhasználtuk a $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{a^t - 1}{t} = a^t \ln a$ ismert határértéket.
Az $a = e$ speciális esetben azt kapjuk, hogy $(e^x)' = e^x$.

4.7. Példa. Az $f(x) = \ln x$ függvény deriváltja is kiszámítható a definícó segítségével. Ha $x > 0$, akkor

$$(\ln x)' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x},$$

felhasználva a $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$ ismert határértéket.
Hasonlóan mutatható meg, hogy $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Emlékezzünk vissza, hogy egy x_0 pontban folytonos f valós függvény mindig kielégíti a

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

feltételt, amelyet a következő formában is felírhatunk:

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0.$$

Az így felírt feltétel láthatóan szükséges ahhoz, hogy az $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ differenciahányadosnak legyen véges határértéke $\Delta x \to 0$ esetén. Megfogalmazható tehát az alábbi állítás:

4.1. Tétel. *Ha az f valós függvény differenciálható az x_0 pontban, akkor f folytonos is az x_0 pontban.*

Valamely függvény adott pontbeli folytonosságából nem következik e pontbeli differenciálhatósága, bár lehet differenciálható is.

4.8. Példa. Az $f(x) = |x|$ függvény $x = 0$ pontban folytonos, de nem differenciálható.

4.9. Példa. Az $f(x) = \sqrt[3]{x}$ függvény $x = 0$ pontban folytonos és differenciálható is.

A differenciálhatóság tehát erősebb feltételt jelent, mint a folytonosság. Tételünk alapján világos, ha f az x_0 pontban nem folytonos, akkor ott nem is differenciálható.

4.1.3. Differenciálási szabályok

4.2. Tétel. *Ha az f függvény differenciálható az x pontban, akkor a cf függvény is differenciálható az x pontban, ahol k tetszőleges konstans, és*

$$[kf(x)]' = kf'(x).$$

Bizonyítás. Legyen $F(x) = kf(x)$. Ekkor

$$[kf(x)]' = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{kf(x + \Delta x) - kf(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x} = k \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = kf'(x).$$

$\diamond$

4.3. Tétel. *Ha az f és g függvények differenciálhatók az x pontban, akkor $f + g$ összegük is differenciálható az x pontban, és*

$$(f + g)'(x) = [f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x).$$

Bizonyítás. Legyen $F(x) = f(x) + g(x)$. Ekkor

$$[f(x) + g(x)]' = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - (f(x) + g(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(x) + g'(x).$$

◇

4.4. Tétel. *Ha az f és g függvények differenciálhatók az x pontban, akkor $f - g$ különbségük is differenciálható az x pontban, és*

$$(f - g)'(x) = [f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x).$$

Bizonyítás. Legyen $F(x) = f(x) - g(x)$. Ekkor

$$[f(x) - g(x)]' = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - g(x + \Delta x) - (f(x) - g(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(x) - g'(x).$$

◇

4.5. Tétel. *Ha az f és g függvények differenciálhatók az x pontban, akkor fg szorzatuk is differenciálható az x pontban és érvényes, hogy:*

$$(fg)'(x) = [f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Bizonyítás. Legyen $F(x) = f(x)g(x)$. Ekkor

$$[f(x)g(x)]' = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x + \Delta x) + f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x + \Delta x) + f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} =$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

◇

4.6. Tétel. *Ha az f és g függvények differenciálhatók az x pontban és $g(x) \neq 0$, akkor a függvények $\frac{f}{g}$ hányadosa is differenciálható az x pontban és érvényes, hogy:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Bizonyítás. Legyen $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Ekkor

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{(\Delta x)g(x+\Delta x)g(x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x) - f(x) \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right] =$$

$$= \frac{1}{(g(x))^2} \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x) - f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right] =$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

$\diamond$

4.10. Példa. Az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény deriváltja a hányados deriváltjának szabálya segítségével így számítható ki:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

4.11. Példa. Az $f(x) = \operatorname{ctg} x$ függvény deriváltja is meghatározható a hányados deriváltjának szabálya segítségével:

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

4.7. Tétel. *Ha a g függvény differenciálható az x pontban és az f függvény differenciálható a $g(x)$ pontban, akkor az $f \circ g$ összetett függvény is differenciálható az x pontban és érvényes, hogy:*

$$(f \circ g)'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x).$$

Bizonyítás. Legyen $F(x) = f(g(x))$. Ekkor

$$[f(g(x))]' = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right) =$$

$$= \lim_{g(x+\Delta x)\to g(x)} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} =$$

$$= f'(g(x))g'(x),$$

ahol $g(x+\Delta x) \to g(x)$, ha $\Delta x \to 0$, mert g differenciálható az x pontban és emiatt folytonos is x-ben. $\diamond$

4.12. Példa. Legyen α tetszőleges valós szám. Ha $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, akkor

$$(x^\alpha)' = f'(x) = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

4.13. Példa. Mivel az összetett függvény deriválási szabálya szerint $(e^{-x})' = -e^{-x}$, ezért

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

4.14. Példa. Az $f(x) = \operatorname{th} x$ függvény deriváltja így számítható ki:

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)'\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x(\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

4.15. Példa. Az $f(x) = \operatorname{cth} x$ függvény deriváltja a következőképpen határozható meg:

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{(\operatorname{ch} x)'\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x(\operatorname{sh} x)'}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

4.8. Tétel. *Az f függvény f^{-1} inverz függvénye differenciálható az x pontban, ha az f függvény differenciálható az $f^{-1}(x)$ pontban, ahol $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ és érvényes, hogy:*

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Bizonyítás. Az inverz függvény tulajdonsága, hogy

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

Meghatározva mindkét oldal deriváltját kapjuk az összetett függvény differenciálási szabálya alapján, hogy

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot \left[f^{-1}(x)\right]' = 1.$$

Leosztás után következik, hogy

$$\left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

$\diamond$

A trigonometrikus függvények és a hiperbolikus függvények inverzeinek deriváltjait az előzőekben bemutatott képlet alapján számíthatjuk ki.

4.16. Példa. Ha $f(x) = \sin x$, akkor $f^{-1}(x) = \arcsin x$ és $f'(x) = \cos x$. Ekkor

$$(\arcsin x)' = \left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Mivel $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ és $\sin(\arcsin x) = x$, ezért

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\arcsin x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

4.17. Példa. Ha $f(x) = \cos x$, akkor $f^{-1}(x) = \arccos x$ és $f'(x) = -\sin x$. Ekkor

$$(\arccos x)' = \left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = -\frac{1}{\sin(\arccos x)}.$$

Mivel $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ és $\cos(\arccos x) = x$, ezért

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - (\cos(\arccos x))^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

4.18. Példa. Ha $f(x) = \operatorname{tg} x$, akkor $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$ és $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. Ekkor

$$(\operatorname{arctg} x)' = \left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\frac{1}{(\cos(\operatorname{arctg} x))^2}} = (\cos(\operatorname{arctg} x))^2.$$

Az inverz függvény tulajdonsága alapján $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ és

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{1} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x},$$

ezért

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + (\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x))^2} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

4.19. Példa. Ha $f(x) = \operatorname{ctg} x$, akkor $f^{-1}(x) = \operatorname{arcctg} x$ és $f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$. Ekkor

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\frac{1}{(\sin(\operatorname{arcctg} x))^2}} = -(\sin(\operatorname{arcctg} x))^2.$$

Az inverz függvény tulajdonsága alapján $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$ és

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{1} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}} = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x},$$

ezért

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + (\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x))^2} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

4.20. Példa. Ha $f(x) = \operatorname{sh} x$, akkor $f^{-1}(x) = \operatorname{arsh} x$ és $f'(x) = \operatorname{ch} x$. Ekkor

$$(\operatorname{arsh} x)' = \left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{arsh} x)}.$$

Mivel $\operatorname{ch} x = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}$ és $\operatorname{sh}(\operatorname{arsh} x) = x$, ezért

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + (\operatorname{sh}(\operatorname{arsh} x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Ha a megfelelő área függvényt logaritmusos alakban írjuk fel, akkor a deriváltfüggvény a deriválási szabályok alkalmazásával is kiszámítható. Ebben az esetben

$$(\operatorname{arsh} x)' = \left(\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})\right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

4.21. Példa. Ha $f(x) = \operatorname{ch} x$, akkor $f^{-1}(x) = \operatorname{arch} x$ és $f'(x) = \operatorname{sh} x$. Ekkor

$$(\operatorname{arch} x)' = \left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{arch} x)}.$$

Mivel $\operatorname{sh} x = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}$ és $\operatorname{ch}(\operatorname{arch} x) = x$, ezért

$$(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{(\operatorname{ch}(\operatorname{arch} x))^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

A másik módon:

$$(\operatorname{arch} x)' = \left(\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})\right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

4.22. Példa. Ha $f(x) = \operatorname{th} x$, akkor $f^{-1}(x) = \operatorname{arth} x$ és $f'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$. Ekkor

$$(\operatorname{arth} x)' = \left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\frac{1}{(\operatorname{ch}(\operatorname{arth} x))^2}} = (\operatorname{ch}(\operatorname{arth} x))^2.$$

Az inverz függvény tulajdonsága alapján $\operatorname{th}(\operatorname{arth} x) = x$ és

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch}^2 x}{1} = \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x} = \frac{\frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}}{\frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x}} = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 x},$$

ezért

$$(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1 - (\operatorname{th}(\operatorname{arth} x))^2} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

A másik módszerrel:

$$(\operatorname{arth} x)' = \left(\frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1 + x}{1 - x}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - x}{1 + x} \cdot \frac{1 \cdot (1 - x) - (-1) \cdot (1 + x)}{(1 - x)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - x}{1 + x} \cdot \frac{1 - x + 1 + x}{(1 - x)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + x} \cdot \frac{2}{1 - x} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

4.23. Példa. Ha $f(x) = \operatorname{cth} x$, akkor $f^{-1}(x) = \operatorname{arcth} x$ és $f'(x) = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$. Ekkor

$$(\operatorname{arcth} x)' = \left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\frac{1}{(\operatorname{sh}(\operatorname{arcth} x))^2}} = -(\operatorname{sh}(\operatorname{arcth} x))^2.$$

Az inverz függvény tulajdonsága alapján $\operatorname{cth}(\operatorname{arcth} x) = x$ és

$$-\operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{sh}^2 x}{-1} = \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x} = \frac{\frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x}}{\frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x}} = \frac{1}{1 - \operatorname{cth}^2 x},$$

ezért

$$(\operatorname{arcth} x)' = \frac{1}{1 - (\operatorname{cth}(\operatorname{arcth} x))^2} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

A másik módszerrel:

$$(\operatorname{arcth} x)' = \left(\frac{1}{2} \cdot \ln \frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (x+1)}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \frac{-2}{x-1} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Elemi függvények deriváltjainak táblázata

1. $(c)' = 0, \quad c = const.$

2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0, \quad \alpha \in \mathbf{R}$

3. $(e^x)' = e^x, \quad (a^x)' = a^x \ln a, \quad x \in \mathbf{R}, \quad a > 0, \quad a \neq 1$

4. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \quad (\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1$

5. $(\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbf{R}$

6. $(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbf{R}$

7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$

8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$

9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$

10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$

11. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbf{R}$

12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbf{R}$

13. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad x \in \mathbf{R}$

14. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad x \in \mathbf{R}$

15. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad x \in \mathbf{R}$

16. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

17. $(\operatorname{arsh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

18. $(\operatorname{arch} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1$

19. $(\operatorname{arth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1$

20. $(\operatorname{arcth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}, \quad |x| > 1$

FELADATOK

1. Határozzuk meg az $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ függvény deriváltját a definíció alapján.

Megoldás.

$$(2x^2 - 3x + 5)' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) + 5 - (2x^2 - 3x + 5)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x - 2x^2 + 3x - 5}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(4x + 2\Delta x - 3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x + 2\Delta x - 3}{1} = 4x - 3.$$

2. Határozzuk meg az $f(x) = x^3 + 1$ függvény deriváltját a definíció alapján.

Megoldás. Az $f(x) = x^3 + 1$ függvény deriváltját a definícó segítségével így számíthatjuk ki:

$$(x^3+1)' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 + 1 - x^3 - 1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2}{1} = 3x^2.$$

3. Határozzuk meg az $f(x) = 3\sqrt{2x-5}$ függvény deriváltját a definíció alapján.

Megoldás.

$$(3\sqrt{2x-5})' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\sqrt{2(x+\Delta x) - 5} - 3\sqrt{2x-5}}{\Delta x} =$$

$$= 3\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{2(x+\Delta x) - 5} - \sqrt{2x-5}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{2(x+\Delta x) - 5} + \sqrt{2x-5}}{\sqrt{2(x+\Delta x) - 5} + \sqrt{2x-5}} =$$

$$= 3\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x) - 5 - (2x-5)}{(\Delta x)(\sqrt{2(x+\Delta x) - 5} + \sqrt{2x-5})} =$$

$$= 3\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\sqrt{2(x+\Delta x) - 5} + \sqrt{2x-5}} = \frac{3}{\sqrt{2x-5}}.$$

Határozzuk meg a következő függvények deriváltját, alkalmazva az elemi függvények deriváltjainak táblázatát és a deriválási szabályokat.

4. $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 7x^2 + x - \pi$

Megoldás.

$$f'(x) = \left(x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 7x^2 + x - \pi\right)' =$$

$$= 5x^4 - 3\cdot 4x^3 + 2\cdot 3x^2 - 7\cdot 2x + 1 = 5x^4 - 12x^3 + 6x^2 - 14x + 1.$$

5. $f(x) = \dfrac{6}{x^2} - \dfrac{5}{x^3} + \dfrac{\sqrt{2}}{x^4}$

Megoldás.

$$f'(x) = \left(\frac{6}{x^2} - \frac{5}{x^3} + \frac{\sqrt{2}}{x^4}\right)' = \left(6x^{-2} - 5x^{-3} + \sqrt{2}x^{-4}\right)' =$$

$$= 6 \cdot (-2) \cdot x^{-3} - 5 \cdot (-3) \cdot x^{-4} + \sqrt{2} \cdot (-4) \cdot x^{-5} = -\frac{12}{x^3} + \frac{15}{x^4} - \frac{4\sqrt{2}}{x^5}.$$

6. $f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[4]{x}$

Megoldás.

$$f'(x) = \left(\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[4]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{3}} - 3x^{\frac{1}{4}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} - 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{4}\sqrt[4]{x^3}.$$

7. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \dfrac{3}{\sqrt[5]{x^4}}$

Megoldás.

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{\sqrt[5]{x^4}}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{4}{5}}\right)' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + 3 \cdot \frac{4}{5} \cdot x^{-\frac{1}{5}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{12}{5\sqrt[5]{x}}.$$

8. $f(x) = x\sqrt[3]{x^2\sqrt[4]{x^3}}$

Megoldás. Írjuk fel az irracionális kifejezést x hatványaként. Ekkor

$$f'(x) = \left(x\sqrt[3]{x^2\sqrt[4]{x^3}}\right)' = \left(x \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{12}}\right)' = \left(x^{\frac{23}{12}}\right)' = \frac{23}{12} \cdot x^{\frac{11}{12}} = \frac{23\sqrt[12]{x^{11}}}{12}.$$

9. $f(x) = \dfrac{a\sqrt{x} + \pi\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$, $a \in \mathbf{R}$

Megoldás. Bontsuk az adott függvényt két összeadandóra. Ekkor

$$f'(x) = \left(\frac{a\sqrt{x} + \pi\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' = \left(\frac{a\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{\pi\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' = \left(a \cdot x^{-\frac{1}{6}} + \pi x^{-\frac{1}{3}}\right)' =$$

$$= a \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot x^{-\frac{7}{6}} + \pi \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{a}{6x\sqrt[6]{x}} - \frac{\pi}{3x\sqrt[3]{x}}.$$

10. $f(x) = xe^x$

Megoldás. Alkalmazzuk a szorzat deriválási szabályát. Ekkor

$$f'(x) = (xe^x)' = (x)' \cdot e^x + x \cdot (e^x)' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (x+1)e^x.$$

11. $f(x) = \left(\sqrt{x} + 2\right) \sin x$

Megoldás.

$$f'(x) = \left(\left(\sqrt{x} + 2\right) \sin x\right)' = \left(\sqrt{x} + 2\right)' \sin x + \left(\sqrt{x} + 2\right) (\sin x)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin x + \left(\sqrt{x} + 2\right) \cdot \cos x = \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} + \left(\sqrt{x} + 2\right) \cos x.$$

12. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 + 5}$

Megoldás. Alkalmazzuk a hányados deriválási szabályát. Ekkor

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x^3 + 5}\right)' = \frac{(x^2)'(x^3 + 5) - x^2 \cdot (x^3 + 5)'}{(x^3 + 5)^2} =$$

$$= \frac{2x(x^3 + 5) - x^2 \cdot 3x^2}{(x^3 + 5)^2} = \frac{2x^4 + 10x - 3x^4}{(x^3 + 5)^2} = \frac{10x - x^4}{(x^3 + 5)^2} = \frac{x(10 - x^3)}{(x^3 + 5)^2}.$$

13. $f(x) = \dfrac{2 - \ln x}{2 + \ln x}$

Megoldás.

$$f'(x) = \left(\frac{2 - \ln x}{2 + \ln x}\right)' = \frac{(2 - \ln x)'(2 + \ln x) - (2 - \ln x)(2 + \ln x)'}{(2 + \ln x)^2} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{x}(2 + \ln x) - (2 - \ln x)\frac{1}{x}}{(2 + \ln x)^2} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{2 + \ln x + 2 - \ln x}{(2 + \ln x)^2} = -\frac{4}{x(2 + \ln x)^2}.$$

14. $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \operatorname{tg} x}$

Megoldás.

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{1 + \operatorname{tg} x}\right)' = \frac{(\sin x)'(1 + \operatorname{tg} x) - \sin x(1 + \operatorname{tg} x)'}{(1 + \operatorname{tg} x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x(1 + \operatorname{tg} x) - \sin x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{(1 + \operatorname{tg} x)^2} = \frac{\cos x + \sin x - \frac{\sin x}{\cos^2 x}}{\left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x}\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{\cos^3 x + \sin x \cos^2 x - \sin x}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^3 x + \sin x(\cos^2 x - 1)}{1 + \sin 2x} = \frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{1 + \sin 2x}.$$

15. Számítsuk ki mennyi $f'(x_0)$ értéke, ha $f(x) = \dfrac{a - x}{1 + x}$, $a \in \mathbf{R}$ és $x_0 = 1$.

Megoldás. Határozzuk meg először a függvény deriváltját:

$$f'(x) = \left(\frac{a - x}{1 + x}\right)' = \frac{(a - x)'(1 + x) - (a - x)(1 + x)'}{(1 + x)^2} =$$

$$= \frac{(-1) \cdot (1 + x) - (a - x) \cdot 1}{(1 + x)^2} = \frac{-1 - x - a + x}{(1 + x)^2} = -\frac{a + 1}{(1 + x)^2}.$$

Számoljuk most ki az f' függvény értékét 1-ben:

$$f'(1) = -\frac{a+1}{(1+1)^2} = -\frac{a+1}{4}.$$

Határozzuk meg a következő összetett függvények deriváltját.

16. $f(x) = (3x+4)^7$

Megoldás.

$$f'(x) = \left((3x+4)^7\right)' = 7 \cdot (3x+4)^6 \cdot (3x+4)' = 21(3x+4)^6.$$

17. $f(x) = \sqrt{3x^2+5x-4}$

Megoldás.

$$f'(x) = \left(\sqrt{3x^2+5x-4}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{3x^2+5x-4}} \cdot (3x^2+5x-4)' = \frac{6x+5}{2\sqrt{3x^2+5x-4}}.$$

18. $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2}{x}\right)$

Megoldás.

$$f'(x) = \left(\arcsin\left(\frac{2}{x}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2}}} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x\sqrt{x^2-4}}.$$

19. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$

Megoldás.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}\right)' = \left(\left(x+\sqrt{x}\right)^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}\left(x+\sqrt{x}\right)^{-\frac{4}{3}} \cdot \left(x+\sqrt{x}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\left(x+\sqrt{x}\right)^4}} \cdot \left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = -\frac{1+2\sqrt{x}}{6\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}\right)\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}.$$

20. $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

Megoldás.

$$f'(x) = \left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)' = \frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{(-1)\cdot(1+x)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2} =$$

$$= \frac{1+x}{1+x+1-x} \cdot \frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}} \cdot \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = \frac{-2\sqrt{1+x}}{4(1+x)\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

21. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)$

Megoldás.

$$f'(x) = \left(\ln\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)\right)' = \frac{1+\sin x}{1-\sin x}\cdot\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)' =$$

$$= \frac{1+\sin x}{1-\sin x}\cdot\frac{(-\cos x)(1+\sin x)-(1-\sin x)\cos x}{(1+\sin x)^2} =$$

$$= \frac{1}{1-\sin x}\cdot\frac{-\cos x-\sin x\cos x-\cos x+\sin x\cos x}{1+\sin x} =$$

$$= \frac{-2\cos x}{1-\sin^2 x} = \frac{-2\cos x}{\cos^2 x} = -\frac{2}{\cos x}.$$

22. $f(x) = \dfrac{2}{3}\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{1-x^2}$

Megoldás.

$$f'(x) = \left(\frac{2}{3}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{1-x^2}\right)' =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{1-x^2}\right)^2}\cdot\frac{1\cdot(1-x^2)-x(-2x)}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{2}{3(1+x^2)} + \frac{(1-x^2)^2}{1-2x^2+x^4+x^2}\cdot\frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{2}{3(1+x^2)} + \frac{1+x^2}{3(1-x^2+x^4)} = \frac{1+x^4}{1+x^6}.$$

23. $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \ln\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$

Megoldás.

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2+1} - \ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right)' =$$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot x - 1 - \sqrt{x^2+1}}{x^2} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{x^2-\sqrt{x^2+1}-x^2-1}{x\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x(1+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

24. $f(x) = \dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{1-x^2}$

Megoldás.

$$f'(x) = \left(\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{1-x^2}\right)' =$$

$$= \frac{\left(\arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\sqrt{1-x^2} - x\arcsin x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{(1-x^2)\arcsin x + x\sqrt{1-x^2} + x^2\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

25. Mutassuk meg, hogy az $y = \ln\frac{1}{1+x}$ függvény kielégíti az $xy' + 1 = e^y$ összefüggést.

Megoldás. Határozzuk meg először az adott függvény deriváltját, majd mutassuk meg, hogy az kielégíti a megadott összefüggést. Mivel

$$y' = \left(\ln\frac{1}{1+x}\right)' = (1+x)\cdot\left(-\frac{1}{(1+x)^2}\right) = -\frac{1}{1+x},$$

ezért behelyettesítve adódik, hogy

$$x\cdot\left(-\frac{1}{1+x}\right) + 1 = e^{\ln\frac{1}{1+x}},$$

majd rendezés után

$$\frac{-x+1+x}{1+x} = \frac{1}{1+x}, \quad \text{azaz} \quad \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}.$$

26. Mutassuk meg, hogy az $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ függvény kielégíti az $(1-x^2)y' - xy = 1$ összefüggést.

Megoldás. Mivel

$$y' = \left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\sqrt{1-x^2} - \arcsin x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} =$$

$$= \frac{1 + \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{\sqrt{1-x^2} + x\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}},$$

így ezt a megadott összefüggésbe helyettesítve a következőket kapjuk:

$$(1-x^2)\cdot\frac{\sqrt{1-x^2} + x\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} - x\cdot\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = 1,$$

$$\frac{\sqrt{1-x^2} + x\arcsin x - x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = 1, \quad \text{azaz} \quad 1 = 1.$$

27. Határozzuk meg az $f(x) = 4 - x^2$ parabola érintőjének és merőleges egyenesének egyenletét az x-tengellyel alkotott metszéspontjaiban.

Megoldás. Az f függvény és az x-tengely metszetei az f függvény nullái, azaz azok a pontok, melyek kielégítik a $4 - x^2 = 0$ egyenletet. Ezek az $x = -2$ és $x = 2$ pontok. Az f görbe érintőjének egyenlete az x_0 pontban

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

az f görbe merőleges egyenesének egyenlete az x_0 pontban pedig

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0).$$

Az f függvény első deriváltja $f'(x) = -2x$, így $f'(-2) = 4$ és $f'(2) = -4$.

Tehát a parabola érintőjének egyenlete a $(-2, 0)$ pontban $y = 4x+8$, a $(2, 0)$ pontban pedig $y = -4x + 8$. A parabola merőleges egyenesének egyenlete a $(-2, 0)$ pontban $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$, a $(2, 0)$ pontban pedig $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$.

28. Határozzuk meg az $f(x) = \ln x$ görbe azon pontjait, melyekben a görbe érintője párhuzamos az $y = 2x - 3$ egyenessel.

Megoldás. Az f görbe érintőjének iránytényezője az x_0 pontban $f'(x_0)$. Mivel a párhuzamos egyeneseknek egyenlő iránytényezőik vannak, így következik, hogy $f'(x_0) = 2$. Felhasználva, hogy $f'(x) = \frac{1}{x}$, az $\frac{1}{x_0} = 2$ egyenletből kapjuk, hogy $x_0 = \frac{1}{2}$, illetve a keresett pont $P\left(\frac{1}{2}, \ln\frac{1}{2}\right)$.

29. Milyen szög alatt metszi az $y = \sin x$ görbe az x-tengelyt?

Megoldás. A keresett szög a görbe x-tengellyel alkotott metszetéhez tartozó érintő és az x-tengely által alkotott szög. Az $y = \sin x$ görbe az x-tengelyt az $x = k\pi$ pontokban metszi, ahol $k \in \mathbf{Z}$. A görbe x_0 pontjához tartozó érintőjének és az x-tengely által közbezárt φ szögekre érvényes, hogy $\operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$, ebből

$$\operatorname{tg}\varphi = \cos(k\pi) = \begin{cases} 1, & \text{ha } k \text{ páros}, \\ -1, & \text{ha } k \text{ páratlan}, \end{cases}$$

illetve

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} 1, & \text{ha } k \text{ páros}, \\ \operatorname{arctg}(-1), & \text{ha } k \text{ páratlan}, \end{cases} = \begin{cases} \pi/4, & \text{ha } k \text{ páros}, \\ 3\pi/4, & \text{ha } k \text{ páratlan}. \end{cases}$$

Tehát a keresett szögek: $\frac{\pi}{4}$ és $\frac{3\pi}{4}$ nagyságúak.

30. Keressük meg az $f(x) = x^2 + 3x - 4$ parabolának azt az érintőjét, amely merőleges az $y = -\frac{1}{2}x - 1$ egyenesre.

Megoldás. Mivel az $y = -\frac{1}{2}x - 1$ egyenes iránytényezője $-\frac{1}{2}$, ezért a rá merőleges érintő iránytényezője 2. Ugyanakkor az érintő iránytényezője $f'(x_0) = 2x_0+3$, tehát $2x_0 + 3 = 2$, ahonnan $x_0 = -\frac{1}{2}$. A parabola $\left(-\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ pontbeli érintőjének egyenlete $y = f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right)$, illetve $y = 2x - \frac{17}{4}$.

4.1.4. A differenciál fogalma

4.4. Definíció. *Ha az f függvény differenciálható az x_0 pontban, akkor az $f'(x_0)(x-x_0)$ lineáris kifejezést az f függvény x_0 pontbeli differenciáljának nevezzük. Jelölése: $df|_{x=x_0}$ vagy röviden df, tehát*

$$df = f'(x_0)(x-x_0).$$

Speciálisan az $f(x) = x$ hozzárendelési szabállyal megadott f függvényre:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1$$

minden $x_0 \in D_f$-re, így

$$df = dx = 1(x-x_0),$$

azaz $dx = x - x_0$. Az $x - x_0$ különbség a független változó növekménye, jelölése pedig $\Delta x = x - x_0$. Az $f(x) - f(x_0)$ különbség a függvényérték növekménye, jelölése pedig $\Delta f = f(x) - f(x_0)$. Mondható tehát, hogy a független változó differenciálja megegyezik a növekményével, amíg a függvényérték differenciálja az x_0 helyen: $df = f'(x_0)dx$ általában nem egyezik meg a Δf-fel. Gyakran hasznos, ha ismerjük a derivált alábbi definícióját is, hiszen az x_0 helyhez tartozó df és Δf között a kapcsolatot pont ez a definíciója adja meg:

4.5. Definíció. *Legyen f függvény az x_0 valamely környezetében értelmezve. Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvény differenciálható x_0-ban, ha létezik olyan szám, hogy minden olyan x-re, amely eleme e környezetnek, az*

$$f(x) - f(x_0) = c(x-x_0) + h(x)(x-x_0)$$

összefüggés felírható, ahol $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = 0$. Ekkor $c = f'(x_0)$.

Igaz tehát, hogy

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + h(x)(x-x_0),$$

ahol $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = 0$, azaz felírható, hogy

$$\Delta f = f'(x_0)dx + h(x)dx, \quad \text{illetve} \quad \Delta f = df + h(x)dx,$$

ahonnan belátható, hogy

$$\lim_{x\to x_0} \Delta f = df.$$

Sőt a $\Delta f - df$ különbség elhanyagolhatóan kicsivé válik dx-hez képest, miközben $x \to x_0$, azaz

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\Delta f - df}{dx} = \lim_{x\to x_0} h(x) = 0.$$

A fent elmondottak geometriai jelentése a következő: df jelenti az f függvény ordinátaértékének megváltozását $f(x_0)$-tól az érintőig, míg Δf ugyancsak $f(x_0)$-tól, de a függvény görbéjéig, miközben az x_0 helyről áttérünk az $x_0 + \Delta x$ helyre. Viszont, ha $x \to x_0$ (azaz $dx \to 0$) df egyre inkább (sőt minden határon túl) megközelíti Δf-et, azaz $\Delta f \approx df$.

4.1.5. Magasabb rendű differenciálhányadosok

4.6. Definíció. *Ha az f és f' függvények differenciálhatók az x_0 pontban, akkor az f' függvény x_0 pontban vett deriváltját az f függvény x_0 pontban vett második deriváltjának nevezzük és $f''(x_0)$ szimbólummal jelöljük. A második deriváltnak ugyancsak gyakran használt jelölése:*

$$\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_0}.$$

Analóg módon jutunk el a magasabb rendű, illetve n-edrendű deriváltak fogalmához. Jelölésük:

$$f'(x_0),\ f''(x_0),\ f'''(x_0),\ f^{(4)}(x_0),\ \dots,\ f^{(n)}(x_0),\ \dots$$

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0},\ \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_0},\ \dots,\ \left.\frac{d^n f}{dx^n}\right|_{x=x_0},\ \dots$$

Ezek után definiáljuk a függvény magasabbrendű (n-edrendű) deriváltfüggvényét.

4.7. Definíció. *Ha az f függvény differenciálható a H_1 halmazon ($H_1 = D_f$) és az f' függvény differenciálható a H_2 halmazon ($H_2 \subset H_1$), akkor f' deriváltfüggvényét, amelyet f''-vel jeölünk, nevezzük az f függvény másodrendű deriváltfüggvényének. Hasonló módon jutunk el az n-edrendű deriváltfüggvény fogalmához. Jelölésük:*

$$f',\ f'',\ f''',\ f^{(4)},\ \dots,\ f^{(n)},\ \dots$$

vagy

$$\frac{df}{dx},\ \frac{d^2 f}{dx^2},\ \dots,\ \frac{d^n f}{dx^n},\ \dots$$

Szokás még az f függvény nulladik deriváltjáról is beszélni. A függvény nulladik deriváltja alatt magát a függvényt értjük, vagyis

$$f^{(0)}(x_0) = f(x_0), \quad \text{illetve} \quad f^{(0)} = f.$$

FELADATOK

1. Határozzuk meg az $f(x) = 3x^2 + 5x - 4$ függvény harmadik deriváltját.

Megoldás. $f'(x) = 6x + 5$, $f''(x) = 6$, $f'''(x) = 0$.

2. Létezik-e az $f(x) = x^4$ függvény századik deriváltja?

Megoldás. Mivel $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, $f'''(x) = 24x$, $f^{(4)}(x) = 24$, valamint $f^{(5)}(x) = 0$, így a függvény századik deriváltja is létezik és $f^{(100)}(x) = 0$.

3. Határozzuk meg az $f(x) = e^{2x}$ függvény n-edik deriváltját, ha $n \in \mathbf{N}$.

Megoldás. Számoljunk ki annyi deriváltat, amennyiből általánosíthatunk:

$$f'(x) = 2e^{2x}, \quad f''(x) = 4e^{2x} = 2^2 e^{2x}, \quad f'''(x) = 8e^{2x} = 2^3 e^{2x}.$$

Megállapíthatjuk, hogy $f^{(n)}(x) = 2^n \cdot e^{2x}$.

4. Határozzuk meg az $f(x) = \ln x$ függvény n-edik deriváltját, ha $n \in \mathbf{N}$.

Megoldás. Mivel

$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad f''(x) = -x^{-2} = -\frac{1!}{x^2}, \quad f'''(x) = -(-2)x^{-3} = \frac{2!}{x^3},$$
$$f^{(4)}(x) = 2\cdot(-3)x^{-4} = -\frac{3!}{x^4}, \quad f^{(5)}(x) = -6\cdot(-4)x^{-5} = \frac{4!}{x^5}.$$

Megállapíthatjuk, hogy $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\cdot\dfrac{(n-1)!}{x^n}$.

5. Határozzuk meg az $f(x) = \sin x$ függvény n-edik deriváltját, ha $n \in \mathbf{N}$.

Megoldás. Mivel

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x,$$
$$f^{(4)}(x) = \sin x, \quad f^{(5)}(x) = \cos x.$$

Megállapíthatjuk, hogy

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{n=4k,} \\ \cos x, & \text{n=4k+1,} \\ -\sin x, & \text{n=4k+2,} \\ -\cos x, & \text{n=4k+3,} \end{cases} \quad \text{azaz} \quad f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{n=4k,} \\ \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right), & \text{n=4k+1,} \\ \sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right), & \text{n=4k+2,} \\ \sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right), & \text{n=4k+3,} \end{cases}$$

vagyis $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.

4.2. A differenciálszámítás alkalmazása

4.2.1. A differenciálszámítás középértéktételei

4.9. Tétel. *(Fermat-tétel) Legyen a $(c-\delta, c+\delta)$ intervallum a $c \in \mathbf{R}$ pont δ-környezete, az $f : (c-\delta, c+\delta) \to \mathbf{R}$ függvény pedig differenciálható a c pontban. Ha az f függvénynek a c pontban helyi szélsőértéke van, akkor $f'(c) = 0$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az f függvénynek a c pontban helyi maximuma van, azaz legyen minden $x \in (c-\delta, c+\delta)$ esetén $f(x) \leq f(c)$. A derivált definíciója szerint

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c},$$

ahol a határérték nem függ attól, hogy az x jobbról vagy balról tart-e a c-hez. Ha $x > c$, akkor

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0,$$

s áttérve a határátmenetre ($x \to c+0$) azt kapjuk, hogy $f'(c) \leq 0$.
Ha viszont $x < c$, akkor

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0,$$

s kiszámítva a határértéket ($x \to c-0$) azt kapjuk, hogy $f'(c) \geq 0$. A differenciálhatóság miatt mindkét állítás igaz, s ez csak $f'(c) = 0$ mellett lehetséges, amit valójában szerettünk volna belátni. $\diamond$

4.10. Tétel. *(Rolle-tétel) Legyen az* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *függvény*
a) *folytonos az* $[a, b]$ *intervallumon,*
b) *differenciálható* (a, b) *intervallumon és*
c) $f(a) = f(b)$*, azaz az* $[a, b]$ *intervallum végpontjaiban a függvényértékek megegyeznek.*
Ekkor létezik legalább egy olyan $\xi \in (a, b)$*, ahol* $f'(\xi) = 0$*.*

Bizonyítás. Az *a)* feltételből és a megfelelő tételből következik, hogy folytonos függvény zárt intervallumon felveszi maximumát és minimumát, tehát van az $[a, b]$ intervallumon legalább egy olyan hely, ahol az f függvény felveszi legnagyobb M értékét, továbbá van legalább egy olyan hely, ahol az f függvény felveszi legkisebb m értékét. Két eset lehetséges.
I. A két abszolút szélsőérték közül legalább az egyiket a függvény az (a, b) intervallumon veszi fel, azaz $m < M$, s legyen ξ ez a pont, $a < \xi < b$. A ξ pont egyben helyi szélsőértéket is jelent, tehát a Fermat-tétel alapján $f'(\xi) = 0$.
II. Az f függvény abszolút minimumát és maximumát az $[a, b]$ intervallum végpontjaiban veszi fel. Ebben az esetben a *c)* feltétel miatt $m = M$. Ha most az f függvénynek megegyezik a legkisebb és legnagyobb értéke az $[a, b]$ intervallumon, akkor $f(x) = konstans$, $x \in [a, b]$, s így az (a, b) intervallum minden ξ, $a < \xi < b$ pontjára igaz, hogy $f'(\xi) = 0$.
Ezzel a Rolle-tételt bebizonyítottuk. $\diamond$

A Rolle tétel geometriai jelentése: az $f'(\xi) = 0$ azt jelenti, hogy a szóban forgó helyen a függvény görbéjéhez húzott érintő párhuzamos az x tengellyel.
A tételnek van egy, a szélsőérték-vizsgálatban nagyon lényeges következménye:

4.1. Következmény. *Ha egy függvény olyan pontban veszi fel a szélsőértékét, ahol differenciálható, akkor ott a derivált értéke zérus.*

Ez az állítás nem fordítható meg, azaz az első derivált zérus volta csak szükséges feltétele a szélsőérték létezésének.

4.24. Példa. Tekintsük az $f(x) = x^5$ függvényt az $x_0 = 0$ pontban. $f'(x) = 5x^4$, $f'(x_0) = f'(0) = 0$, és még sincs f-nek szélsőértéke $x_0 = 0$ pontban.

A fentiek nem azt jelentik, hogy csak differenciálható függvénynek létezik szélsőértéke.

4.25. Példa. Az $f(x) = |x|$ függvénynek az $x_0 = 0$ pontban minimuma van, holott a függvény itt nem differenciálható.

4.11. Tétel. *(Langrange-tétel) Legyen az* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *függvény*
a) *folytonos az* $[a, b]$ *intervallumon és*
b) *differenciálható az* (a, b) *intervallumon.*
Ekkor létezik legalább egy olyan $\xi \in (a, b)$*, ahol*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Bizonyítás. Legyen $y = g(x)$ az $y = f(x)$ görbe $P_1(a, f(a))$ és $P_2(b, f(b))$ pontjain áthaladó szelő egyenlete, ahol

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Definiáljuk a $h(x) = f(x) - g(x)$ segédfüggvényt és igazoljuk, hogy a h függvényre teljesülnek a Rolle-tétel feltételei.
a) A h függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon, mert az f és g függvények is folytonosak az $[a, b]$ intervallumon, így $f - g$ különbségük is folytonos.
b) A h függvény differenciálható az (a, b) intervallumon, mert az f és g függvények is differenciálhatók az $[a, b]$ intervallumon, így $f - g$ különbségük is differenciálható.
c) Mivel $h(a) = f(a) - g(a) = f(a) - f(a) = 0$ és $h(b) = f(b) - g(b) = f(b) - f(b) = 0$, ezért $h(a) = h(b)$, azaz teljesülnek a a Rolle-tétel feltételei. Ekkor létezik legalább egy olyan $\xi \in (a, b)$ pont, ahol $h'(\xi) = 0$. Mivel

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

így a Rolle-tétel állítása szerint

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0, \quad \text{azaz} \quad f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ezzel a Lagrange-tételt bebizonyítottuk. ◇

A tétel állítása geometriailag azt jelenti, hogy van olyan ξ pont, amelyhez tartozó érintő meredeksége megegyezik az a és b helyekhez tartozó pontokon átmenő szelő meredekségével. E tételből adódik a következő állítás:

4.12. Tétel. *Legyen az $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ függvény*
a) *folytonos az $[a, b]$ intervallumon,*
b) *differenciálható az (a, b) intervallumon,*
c) *tetszőleges $x \in (a, b)$ pontra $f'(x) = 0$.*
Ekkor $f(x) = const.$ a teljes $[a, b]$ intervallumon.

Ezt kézzelfoghatóbban úgy is megfogalmazhatjuk, hogy csak a konstans értékű függvény az a függvény, amelynek deriváltja azonosan zérus valamely intervallumon.

4.13. Tétel. *(Cauchy-tétel) Legyenek az $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ és a $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ függvények*
a) *folytonosak az $[a, b]$ intervallumon,*
b) *differenciálhatók az (a, b) intervallumon és*
c) *tetszőleges $x \in (a, b)$ pontra $g'(x) \neq 0$.*
Ekkor létezik legalább egy olyan $\xi \in (a, b)$, ahol

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Bizonyítás. Definiáljuk a $h(x) = f(x) + \lambda g(x)$ segédfüggvényt, ahol λ egy később megválasztandó konstans. Igazoljuk, hogy meg lehet adni a λ konstans olyan értékét, hogy a h függvényre teljesülnek a Rolle-tétel feltételei.
a) A h függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon, mert az f és g függvények is folytonosak az $[a, b]$ intervallumon, így $f + \lambda g$ lineáris kombinációjuk is folytonos.
b) A h függvény differenciálható az (a, b) intervallumon, mert az f és g függvények is differenciálhatók az $[a, b]$ intervallumon, így $f + \lambda g$ lineáris kombinációjuk is differenciálható.

c) $h(a) = f(a) + \lambda g(a)$ és $h(b) = f(b) + \lambda g(b)$ miatt $h(a) = h(b)$ akkor és csakis akkor teljesül, ha

$$f(a) + \lambda g(a) = f(b) + \lambda g(b), \quad \text{azaz} \quad \lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Természetesen $g(b) \neq g(a)$, mert különben a Rolle-tétel értelmében az (a, b) intervallumon a g' függvénynek lenne nullahelye, ami ellentmondana a Cauchy-tétel *c)* feltételének. Tehát létezik legalább egy olyan $\xi \in (a, b)$ pont, ahol $h'(\xi) = 0$, azaz $f'(\xi) + \lambda g'(\xi) = 0$, s ekkor

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = -\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Ezzel a Cauchy-tételt bebizonyítottuk. $\diamond$

Könnyű belátni, hogy a Cauchy-tétel a Langrange-tétel általánosítása, hiszen speciális esetben, amikor $g(x) = x$, akkor $g'(x) = 1$. Az is észrevehető, hogy a Langrange-tétel viszont a Rolle-tétel általánosítása.

A Rolle-, a Langrange- és a Cauchy-tétel mindegyike ún. egzisztencia tétel, azaz e tételek csak annyit állítanak, hogy létezik legalább egy - egy a szóban forgó tulajdonságokkal rendelkező hely az (a, b) intervallumban. E tételek azonban sem az ilyen tulajdonságú helyek számáról, sem arról, hogy ezek pontosan hol helyezkednek el az (a, b) intervallumban, nem adnak felvilágosítást.

4.2.2. A Taylor-formula

4.8. Definíció. *Legyen az f függvény az $x = x_0$ helyen legalább n-szer differenciálható. Ekkor a*

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

polinomot az f függvény $x = x_0$ helyhez tartozó n-edfokú Taylor-polinomjának nevezzük.

Ha n elég nagy, akkor a T_n polinom az $x = x_0$ hely környezetében jól közelíti az f függvényt.

Ha $x_0 = 0$, akkor a Taylor-polinomot Maclaurin-polinomnak mondjuk. Ennek alakja:

$$M_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

A Taylor-polinom szerkezetéből látható, hogy $T_n(x_0) = f(x_0)$. Ha viszont $x \neq x_0$, akkor már $T_n(x) \approx f(x)$. Jelölje $f(x)$ és $T_n(x)$ különbségét, azaz a maradéktagot $R_n(x)$, vagyis legyen

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x).$$

Belátható, hogy

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

ahol ξ az x_0 és x értékek között van. Itt nyilván azt feltételezzük, hogy f legalább $(n+1)$-szer differenciálható. Ha a maradéktag elég kicsi, akkor $T_n(x)$ értéke jó közelítést ad az $f(x)$ függvényértékre. Ez az állítás azért is nagy fontosságú, mert segítségével bonyolult függvényeket meg tudunk közelíteni könnyen kezelhető függvényekkel, nevezetesen polinomokkal, amelyek grafikonjai a megfigyelt pont környezetében hozzásimulnak a szóban forgó függvény grafikonjához.

FELADATOK

1. Határozzuk meg az $f(x) = e^x$ függvény n-edfokú Taylor-polinomját az $x_0 = 2$ pont környezetében.

Megoldás. Az f függvény n-edfokú Taylor-polinomját az $x_0 = 2$ pont környezetében a

$$T_n(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n$$

képlettel adott. Mivel

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x,$$

így

$$f'(2) = f''(2) = f'''(2) = \cdots = f^{(n)}(2) = e^2,$$

a keresett polinom pedig

$$T_n(x) = e^2 + \frac{e^2}{1!}(x-2) + \frac{e^2}{2!}(x-2)^2 + ... + \frac{e^2}{n!}(x-2)^n,$$

vagyis

$$T_n(x) = e^2\left(1 + \frac{(x-2)}{1!} + \frac{(x-2)^2}{2!} + ... + \frac{(x-2)^n}{n!}\right).$$

2. Határozzuk meg az $f(x) = \sin x$ függvény hetedfokú Taylor-polinomját az $x_0 = \pi$ pont környezetében.

Megoldás. Mivel

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x,$$

így a megfelelő függvényértékek

$$f'(\pi) = \cos\pi = -1,\ f''(\pi) = -\sin\pi = 0,\ f'''(\pi) = -\cos\pi = 1,\ f^{(4)}(\pi) = \sin\pi = 0.$$

Általánosítva a fenti esetekből adódik, hogy

$$f^{(n)}(\pi) = \begin{cases} 0, & \text{n=2k}, \\ (-1)^{k+1}, & \text{n=2k+1}, \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

a keresett függvény Taylor-polinomja pedig

$$T_7(x) = 0 + \frac{(-1)}{1!}(x-\pi) + 0 + \frac{1}{3!}(x-\pi)^3 + 0 + \frac{(-1)}{5!}(x-\pi)^5 + 0 + \frac{1}{7!}(x-\pi)^7,$$

illetve

$$T_7(x) = -(x-\pi) + \frac{1}{6}(x-\pi)^3 - \frac{1}{120}(x-\pi)^5 + 0 + \frac{1}{5040}(x-\pi)^7.$$

Megállapíthatjuk, hogy az $f(x) = \sin x$ függvény Taylor-polinomjában csak páratlan kitevőjű hatványok szerepelnek, ami biztosítja azt, hogy a megfelelő Taylor-polinom is páratlan legyen, mint maga a függvény.

3. Határozzuk meg az $f(x) = \cos x$ függvény hetedfokú Maclaurin-polinomját.

Megoldás. Mivel

$$f(x) = \cos x, \quad f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x, \quad f'''(x) = \sin x,$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x, \quad f^{(5)}(x) = -\sin x, \quad f^{(6)}(x) = -\cos x, \quad f^{(7)}(x) = \sin x,$$

így a megfelelő függvényértékek

$$f(0) = \cos 0 = 1,\ f'(0) = -\sin 0 = 0,\ f''(0) = -\cos 0 = -1,\ f'''(0) = \sin 0 = 0,$$

$$f^{(4)}(0) = \cos 0 = 1,\ f^{(5)}(0) = -\sin 0 = 0,$$
$$f^{(6)}(0) = -\cos 0 = -1,\ f^{(7)}(0) = \sin 0 = 0.$$

A keresett függvény Maclaurin-polinomja pedig

$$M_7(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6, \quad \text{illetve} \quad M_7(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6.$$

Megállapíthatjuk, hogy az $f(x) = \cos x$ függvény Maclaurin-polinomjában csak páros kitevőjű hatványok szerepelnek, ami biztosítja azt, hogy a megfelelő Taylor-polinom is páros legyen, mint maga a függvény.

4. Írjuk fel az $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ függvény ötödfokú Taylor-polinomját az $x_0 = 0$ pont környezetében.

Megoldás. Az f függvény ötödfokú Taylor-polinomja az $x_0 = 0$ pont környezetében nem más mint a függvény ötödfokú Maclaurin-polinomja

$$M_5(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5.$$

Az f függvény első öt deriváltja:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}(-x)') = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}(-x)') = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

$$f'''(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

Ezért $f(0) = f''(0) = f^{(4)}(0) = 1$ és $f'(0) = f'''(0) = f^{(5)}(0) = 0$, így

$$M_5(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4.$$

5. Határozzuk meg az $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ függvény Maclaurin-polinomját $n = 5$ esetén.

Megoldás. Az f függvény Maclaurin-formulája

$$M_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Mivel

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = ((1-x)^{-1})' = -(1-x)^{-2}(1-x)' = (1-x)^{-2},$$

$$f''(x) = ((1-x)^{-2})' = -2(1-x)^{-3}(1-x)' = 2(1-x)^{-3},$$

$$f'''(x) = (2(1-x)^{-3})' = -2\cdot 3(1-x)^{-4}(1-x)' = 3!(1-x)^{-4},$$

$$f^{(4)}(x) = (6(1-x)^{-4})' = -3!\cdot 4(1-x)^{-5}(1-x)' = 4!(1-x)^{-5},$$

$$f^{(5)}(x) = (24(1-x)^{-5})' = -4!\cdot 5(1-x)^{-5}(1-x)' = 5!(1-x)^{-5},$$

így $f(0) = 1$, $f'(0) = 1 = 1!$, $f''(0) = 2 = 2!$, $f'''(0) = 3!$, $f^{(4)}(0) = 4!$ és $f^{(5)}(0) = 5!$. Ekkor

$$M_5(x) = 1 + \frac{1!}{1!}x + \frac{2!}{2!}x^2 + \frac{3!}{3!}x^3 + \frac{4!}{4!}x^4 + \frac{5!}{5!}x^5,$$

illetve

$$M_5(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5.$$

4.2.3. L'Hospital-szabály

Gyakran előfordul, hogy két olyan függvény hányadosának a határértékét kell meghatározni, amelyeknek a határértéke egyaránt nulla vagy egyaránt végtelen. Az ilyen határértékek kiszámítására ad egyszerű módszert az alábbi tétel (szabály).

4.14. Tétel. *(L'Hospital-szabály) Legyenek f és g az $x = x_0$ hely környezetében differenciálható függvények. Ha*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0,$$

akkor

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

feltéve, hogy a jobb oldalon szereplő (véges vagy végtelen) határérték létezik.

A fenti határértéket $\frac{0}{0}$ határozatlan típusú határértéknek nevezzük.
A tétel akkor is érvényes, ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Ilyenkor $\frac{\infty}{\infty}$ határozatlan típusú határértékről beszélünk. A tétel akkor is alkalmazható, ha $x_0 = \infty$ vagy $x_0 = -\infty$.
A L'Hospital-szabállyal kiszámíthatók a $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0 és 1^∞ típusú határértékek is, ha azokat előzetesen sikerül $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ típusúra visszavezetni, s a segítségükkel egyszerűbben meghatározhatunk összetettebb határértékeket is.

FELADATOK

Számítsuk ki a következő határértékeket.

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$

Megoldás. A megadott határérték $\frac{0}{0}$ típusú határozatlan kifejezés. Alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt. Ekkor

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 4x - 1}{3x^2 - 7} = \frac{3 - 4 - 1}{3 - 7} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}.$$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

Megoldás. A megadott határérték $\frac{0}{0}$ típusú határozatlan kifejezés. Ugyanakkor tudjuk, hogy 1-gyel egyenlő, mivel alaphatárértékként alkalmaztuk a trigonometrikus függvények határérték számításánál. Mutassuk meg, hogy milyen egyszerű ennek a határértéknek a kiszámítása a L'Hospital-szabály alkalmazásával. Ekkor

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1.$$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cos x - \sin x}{x^3}$

Megoldás. A megadott határérték $\frac{0}{0}$ típusú határozatlan kifejezés. Alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt. Ekkor

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-x \sin x}{3x^2} = -\frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{3} \cdot 1 = -\frac{1}{3}.$$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x - 7^x}{x}$

Megoldás. Mivel $3^0 = 7^0 = 1$, így $\dfrac{0}{0}$ típusú határozatlan kifejezésről van szó. Alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt. Ekkor

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^x - 7^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3^x \ln 3 - 7^x \ln 7}{1} = \ln 3 - \ln 7 = \ln \frac{3}{7}.$$

5. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{x^2}$

Megoldás. A megadott határérték $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú határozatlan kifejezés. Alkalmazzuk rá kétszer a L'Hospital-szabályt. Ekkor

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty.$$

6. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{2^x}$

Megoldás. Mivel a határérték $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú határozatlan kifejezés, a L'Hospital-szabályt alkalmazva kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{2^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2^x \ln 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x 2^x \ln 2} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

7. $\lim\limits_{x\to +0} \left(x \ln^2 x\right)$

Megoldás. A határérték $0\cdot\infty$ típusú határozatlan kifejezés, ezért $\dfrac{0}{0}$ vagy $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú határozatlan kifejezésre kell hozni ahhoz, hogy alkalmazni lehessen a L'Hospital-szabályt. Ekkor

$$\lim_{x\to+0} \left(x \ln^2 x\right) = \lim_{x\to+0} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{2 \ln x}{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0} (2x) = 0.$$

8. $\lim\limits_{x\to 0} x e^{\frac{1}{x}}$

Megoldás. A határérték $0 \cdot \infty$ típusú határozatlan kifejezés, ezért átalakítjuk és alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt. Ekkor

$$\lim_{x\to 0} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} = e^{\infty} = \infty.$$

9. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$

Megoldás. A határérték $\infty - \infty$ típusú határozatlan kifejezés, amelyet közös nevezőre hozva átalakíthatunk $\frac{0}{0}$ típusúra. Ekkor már alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt. Így

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x - x\sin x}=\frac{0}{2}=0.$$

10. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{5}{x^2+x-6}\right)$

Megoldás. A határérték $\infty - \infty$ típusú határozatlan kifejezés, amelyet közös nevezőre hozva átalakíthatunk $\frac{0}{0}$ típusúra. Ekkor már alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt. Így

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{5}{x^2+x-6}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x+3-5}{(x-2)(x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{5}.$$

11. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$

Megoldás. A határérték $\infty - \infty$ típusú határozatlan kifejezés, amelyet közös nevezőre hozva átalakíthatunk $0\cdot\infty$, majd $\frac{0}{0}$ típusúra. Ilyen formában már alkalmazható a L'Hospital-szabály és

$$\lim_{x\to +\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to +\infty}x^2\left(\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}-\frac{x}{x+1}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1-\frac{x}{x+1}}{\frac{-2}{x}}=$$

$$=-\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{2(x+1)}=\frac{1}{2}.$$

12. $\lim\limits_{x\to +0}x^x$

Megoldás. A határérték 0^0 típusú határozatlan kifejezés. Legyen

$$\lim_{x\to +0}x^x=H.$$

Logaritmáljuk a fenti egyenlőség mindkét oldalát. Ekkor

$$\ln\left(\lim_{x\to +0}x^x\right)=\ln H.$$

Rendezve a baloldalt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to +0}(\ln x^x)=\ln H,\quad \text{azaz}\quad \lim_{x\to +0}(x\cdot\ln x)=\ln H.$$

A baloldali határérték most $0 \cdot \infty$ típusú határozatlan kifejezés, ezért átalakítjuk és alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt. Ekkor

$$\ln H = \lim_{x\to+0} (x \cdot \ln x) = \lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to+0} (-x) = 0,$$

ahonnan $H = e^0 = 1$, illetve a keresett határérték $\lim\limits_{x\to+0} x^x = 1$.

13. $\lim\limits_{x\to+0} (\cos 2x)^{\frac{5}{x}}$

Megoldás. 1^∞ típusú határozatlan kifejezésről van szó. Legyen

$$H = \lim_{x\to+0} (\cos 2x)^{\frac{5}{x}},$$

majd logaritmáljuk a fenti egyenlőség mindkét oldalát. Ekkor

$$\ln H = \ln\left(\lim_{x\to+0} (\cos 2x)^{\frac{5}{x}}\right) = \lim_{x\to+0}\left(\ln (\cos 2x)^{\frac{5}{x}}\right) = \lim_{x\to+0}\left(\frac{5}{x} \cdot \ln (\cos 2x)\right) =$$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{\ln\cos 2x}{x} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{\cos 2x} \cdot (-\sin 2x) \cdot 2}{1} = -10 \lim_{x\to+0} \operatorname{tg} 2x = -10 \cdot 0 = 0.$$

Ebből $H = e^0 = 1$, illetve $\lim\limits_{x\to+0} (\cos 2x)^{\frac{5}{x}} = 1$.

14. $\lim\limits_{x\to+0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$

Megoldás. A határérték ∞^0 típusú határozatlan kifejezés. Legyen most

$$H = \lim_{x\to+0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}},$$

majd logaritmáljuk a fenti egyenlőség mindkét oldalát. Hasonló eljárással, mint az előző két feladatban kapjuk, hogy

$$\ln H = \ln\left(\lim_{x\to+0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}\right) = \lim_{x\to+0}\left(\ln (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}\right) = \lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{\ln x} \cdot \ln (\operatorname{ctg} x)\right).$$

A kapott határérték most $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határozatlan kifejezés, ezért átalakítjuk és alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt.

$$\ln H = \lim_{x\to+0} \frac{\ln\operatorname{ctg} x}{\ln x} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} x} \cdot \frac{-1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}} =$$

$$= -\lim_{x\to+0} \frac{x}{\sin x \cos x} = -\lim_{x\to+0} \frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = -1.$$

Ezért $H = e^{-1} = \frac{1}{e}$, illetve $\lim\limits_{x\to+0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}} = \frac{1}{e}$.

15. Indokoljuk meg, hogy miért nem alkalmazható a L'Hospital-szabály a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sin x}{x}$ határérték kiszámítására.

Megoldás. A határérték $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú határozatlan kifejezés, s a L'Hospital-szabályt alkalmazva a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\cos x}{1}=\lim_{x\to+\infty}(1-\cos x)$$

határértéket kapjuk, amely nem létezik, hiszen nem tudjuk, hogy $\cos x$ a $[-1,1]$ intervallumból melyik értéket veszi fel.

4.2.4. A függvény monotonitása és szélsőértékei

Az alábbi állítás a Lagrange-tétel egyik következménye és a differenciálható függvények monotonitásának elégséges feltételét adja meg.

4.15. Tétel. *Ha az f differenciálható függvény növekszik (csökken) az (a,b) intervallumon, akkor $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$) minden $x\in(a,b)$ pontra.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az f függvény növekszik az (a,b) intervallumon. Legyen $x\in(a,b)$ tetszőleges pont. Ekkor $x+\Delta x\in(a,b)$ mellett igaz, hogy

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0,$$

attól függetlenül, hogy Δx pozitív vagy negatív. Ebből következik, hogy

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0.$$

Hasonlóan mutatható meg, hogy $f'(x)\leq 0$, amennyiben az f függvény csökken. $\diamond$

Ezen tétel és a konstans függvény differenciálhányadosának ($(const)'=0$) következményeként, megfogalmazhatjuk a deriválható függvény valamely intervallumon való szigorú monotonitásának szükséges és elégséges feltételét, amely jól használható a feladatok megoldása során.

4.2. Következmény. *Ha f az (a,b)-n differenciálható és minden $x\in(a,b)$ pontra $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$), akkor f az (a,b) intervallumon szigorúan növekvő (csökkenő).*

Most pedig rátérünk a differenciálható függvények lokális szélsőértékének vizsgálatára.
Ha $f'(x_0)=0$, akkor az f függvénynek x_0 pontban lehet, de nem biztos, hogy van szélsőértéke. Ha $f'(x_0)\neq 0$, akkor az f függvénynek x_0-ban nincs szélsőértéke. Az $f'(x)=0$ egyenlet megoldásait az f függvény stacionárius pontjainak nevezzük. Ez azt jelenti, hogy a differenciálható f függvény lokális szélsőérték helyeit az f függvény stacionárius pontjai között kell keresni.
A következőkben a differenciálható függvények szélsőértékének létezésére mondunk ki elégséges feltételeket.

4.16. Tétel. *Ha f differenciálható az x_0 valamely környezetében és $f'(x_0) = 0$, akkor ahhoz, hogy a függvénynek az x_0 helyen lokális szélsőértéke legyen elegendő, hogy az f' függvény az x_0 helyen előjelet váltson.*

Gyorsabb és kényelmesebb a helyi szélsőértéket a második derivált segítségével meghatározni. Ennek lehetőségét biztosítja a következő állítás.

4.17. Tétel. *Ha f az x_0 helyen kétszer differenciálható és $f'(x_0) = 0$, akkor az x_0 helyen való lokális maximum (minimum) létezéséhez elegendő, hogy $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$) legyen.*

Ha az f függvény olyan, hogy $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, akkor a lokális szélsőérték létezéséről e tételek alapján nem mondhatunk semmit. A következő tétel segít az ilyen jellegű problémák megoldásában.

4.18. Tétel. *Legyen az f függvény az x_0 helyen n-szer differenciálható és*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

továbbá $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Ekkor az f függvénynek az x_0 helyen akkor és csak akkor van helyi (lokális) szélsőértéke, ha n páros szám.

FELADATOK

1. Vizsgáljuk ki az $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ függvény monotonitását és határozzuk meg a helyi szélsőértékeit.

   Megoldás. Az f függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbf{R}$, és szélsőértékeit az $f'(x) = 0$ egyenlet megoldásai, a stacionárius pontok között kell keresni. A függvény első deriváltja

   $$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

   a megfelelő egyenlet pedig

   $$f'(x) = 0, \quad \text{azaz} \quad 3(x^2 - 4x + 3) = 0,$$

   amelynek megoldásai, illetve a stacionárius pontok $x_1 = 1$ és $x_2 = 3$. Hogy a stacionárius pontokban van-e a függvénynek szélsőértéke, az meghatározható a függvény monotonitási tulajdonságaiból is. Ezért az f' függvény előjelének vizsgálatával határozzuk meg az f függvény monotonitását. Foglaljuk táblázatba a kivizsgálást.

D_f	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$x - 1$	$-$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

   A mellékelt táblázat alapján az f függvény monoton növekvő a $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ intervallumon és monoton csökkenő az $(1, 3)$ intervallumon.

   A táblázatból azt is leolvashatjuk, hogy a monotonitási tulajdonság szerint az f függvénynek $x_1 = 1$-ben maximuma, $x_2 = 3$-ban pedig minimuma van. Ugyanakkor a megfelelő függvényértékek:

   $$f_{max}(1) = 0 \quad \text{és} \quad f_{min}(3) = -4.$$

2. Határozzuk meg az $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+1}$ függvény helyi szélsőértékeit.

Megoldás. Az f függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbf{R}$. A függvény első deriváltja

$$f'(x) = \frac{6(x^2+1) - 6x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{6x^2+6-12x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{6-6x^2}{(x^2+1)^2},$$

a függvény stacionárius pontjainak meghatározásához pedig oldjuk meg az $f'(x) = 0$ egyenletet. Ekkor

$$\frac{6(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = 0$$

akkor és csakis akkor, ha $1 - x^2 = 0$, tehát a stacionárius pontok $x_1 = -1$ és $x_2 = 1$. Vizsgáljuk ki most a szélsőértékek létezését, illetve típusát a függvény második deriváltja segítségével. A függvény második deriváltja:

$$f''(x) = \frac{-12x(x^2+1)^2 - (6-6x^2) \cdot 2 \cdot (x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{-12x(x^2+1) - (6-6x^2) \cdot 4x}{(x^2+1)^3} = \frac{-12x^3 - 12x - 24x + 24x^2}{(x^2+1)^3} =$$

$$= \frac{-12x^3 + 24x^2 - 36x}{(x^2+1)^3} = \frac{-12x(x^2-2x+3)}{(x^2+1)^3}.$$

Mivel

$$f''(-1) = \frac{-12 \cdot (-1)((-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 3)}{((-1)^2+1)^3} = \frac{12 \cdot 6}{8} > 0,$$

ezért az $x_1 = -1$ pontban a függvénynek helyi minimuma van, a megfelelő függvényérték $f_{min}(-1) = -3$ és a görbe minimumpontja $P_{min}(-1, -3)$. Mivel

$$f''(1) = \frac{-12 \cdot 1(1^2 - 2 \cdot 1 + 3)}{(1^2+1)^3} = \frac{-12 \cdot 2}{8} < 0,$$

ezért az $x_2 = 1$ pontban a függvénynek helyi maximuma van, a megfelelő függvényérték $f_{max}(1) = 3$, a görbe maximumpontja pedig $P_{max}(1, 3)$.

3. Vizsgáljuk ki az $f(x) = x^4 \ln \dfrac{1}{x}$ függvény monotonitását és határozzuk meg a helyi szélsőértékeit.

Megoldás. Az f függvény értelmezési tartománya most $D_f = (0, \infty)$. A függvény első deriváltja

$$f'(x) = 4x^3 \ln \frac{1}{x} + x^4 \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = x^3 \left(4 \ln \frac{1}{x} - 1\right).$$

$f'(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha

$$x^3 \left(4 \ln \frac{1}{x} - 1\right) = 0.$$

Innen vagy $x^3 = 0$, ahonnan $x_0 = 0$ adódik, de $0 \notin D_f$, vagy pedig $4 \ln \dfrac{1}{x} - 1 = 0$, ahonnan $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$ az egyetlen stacionárius pont. Az f' függvény előjelének vizsgálatával határozzuk meg az f függvény monotonitását. Foglaljuk táblázatba a kivizsgálást.

D_f	$\left(0, \frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}}, \infty\right)$
x^3	$+$	$+$
$4 \ln \frac{1}{x} - 1$	$+$	$-$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

A mellékelt táblázat alapján az f függvény monoton növekvő a $\left(0, \dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}\right)$ intervallumon és monoton csökkenő az $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}, \infty\right)$ intervallumon.

A táblázatból azt is leolvashatjuk, hogy a monotonitási tulajdonság szerint az f függvénynek az $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$ pontban maximuma van. A megfelelő függvényérték, illetve a görbe maximumpontja:

$$f_{max}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right) = \frac{1}{4e}, \quad \text{illetve} \quad P_{max}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}}, \frac{1}{4e}\right).$$

4. Vizsgáljuk ki az $f(x) = \operatorname{arctg}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ függvény monotonitását és határozzuk meg a helyi szélsőértékeit.

Megoldás. Az f függvény értelmezési tartománya most $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, a függvény első deriváltja pedig

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2}{2x^2 + 2x + 1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2x^2 + 2x + 1}.$$

Mivel $f'(x) \neq 0$, ezért a függvénynek nincs stacionárius pontja, sígy szélsőértéke sem. Az f' függvény előjele a $P(x) = 2x^2 + 2x + 1$ másodfokú polinom előjelétől függ, amelyről megállapítható, hogy a diszkriminánsa $D = 4 - 8 < 0$, a főegyütthatója pedig pozitív, így a P polinomfüggvény minden értéke szigorúan pozitív, tehát az f' függvény értéke szigorúan negatív a teljes értelmezési tartományán. Ez azt jelenti, hogy az f függvény szigorúan monoton csökkenő a teljes értelmezési tartományán.

5. Bontsuk szét az A pozitív számot két összeadandóra úgy, hogy az egyik összeadandó négyzetének és a másik összeadandó köbének összege a lehető legkisebb legyen.

Megoldás. Keressük egy összeg legkisebb értékét, azaz ha függvényként kezeljük, akkor keressük egy függvény minimumát. Ha az A számot két összeadandóra bontjuk, akkor jelöljük közülük az egyiket x-szel, a másikat pedig $A-x$-szel. A feladatban megfogalmazott összeget ekkor az $f(x) = (A - x)^2 + x^3$ függvény írja le, s ennek a függvénynek a minimumát kell meghatározni. Alkalmazzuk a már ismert eljárást. Mivel

$$f'(x) = 2(A - x) + 3x^2 = 3x^2 - 2x + 2A,$$

a $3x^2 - 2x + 2A = 0$ egyenletet kell megoldani, amelynek gyökei

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{1+6A}}{3} > 0 \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{1+6A}}{3} < 0.$$

Mivel pozitív összeadandókat keresünk, ezért a negatív x_2 gyök nem lehet számunkra jó megoldás, csakis x_1 jöhet számításba. Igazoljuk, hogy erre az összeadandóra valóban a legkisebb összeget kapjuk, azaz hogy $f''(x_1) > 0$. A függvény második deriváltja $f''(x) = 6x + 2$ és

$$f''(x_1) = f''\left(\frac{-1+\sqrt{1+6A}}{3}\right) = 6 \cdot \frac{-1+\sqrt{1+6A}}{3} + 2 = +2\sqrt{1+6A} > 0,$$

tehát az állítást igazoltuk.

6. $2m^2$ bádogból készítsünk lehető legnagyobb térfogatú fedél nélküli négyzet alapú dobozt. Mekkora lesz ez a térfogat?

Megoldás. Fejezzük ki a négyzet alapú doboz térfogatát függvényként, s keressük a maximumát. Legyen a négyzet oldala x, a doboz magasssága pedig H. A $2m^2$ bádog a fedél nélküli doboz felszínével egyezik meg, ezért

$$x^2 + 4xH = 2, \quad \text{ahonnan} \quad H = \frac{2-x^2}{4x}.$$

A doboz térfogata viszont

$$V = x^2 \cdot H, \quad \text{ahonnan} \quad V(x) = x^2 \cdot \frac{2-x^2}{4x} = \frac{x}{4}\left(2-x^2\right),$$

s ennek a függvénynek keressük a maximumát. Mivel

$$V'(x) = \frac{1}{4}\left(2-x^2\right) + \frac{x}{4} \cdot (-2x) = \frac{1}{2} - \frac{3x^2}{4},$$

az

$$\frac{1}{2} - \frac{3x^2}{4} = 0$$

egyenlet megoldásai, azaz a stacionárius pontok $x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ és $x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$. Mivel a négyzet oldala csak pozitív lehet, ezért x_1 az egyetlen elfogadható stacionárius pont. Mutassuk meg, hogy az $x = \sqrt{\frac{2}{3}}m$ értékre valóban a lehető legnagyobb térfogatot kapjuk. A függvény második deriváltja

$$V''(x) = -\frac{3x}{2} \quad \text{és} \quad V''\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} < 0,$$

tehát a V függvénynek az $x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ pontban valóban maximuma van, a keresett térfogat pedig

$$V\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \text{vagyis} \quad V_{max} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}m^3.$$

7. Adott R sugarú gömbbe írjunk lehető legnagyobb térfogatú hengert. Határozzuk meg a henger magasságát, valamint a keresett maximális térfogatot.

Megoldás. Készítsük el a gömb és a henger keresztmetszetének vázlatát. Legyen r a henger alapjának sugara és H a henger magassága. Mivel $r^2 = R^2 - \dfrac{H^2}{4}$, akkor a henger térfogata

$$V(r,H) = r^2\pi H, \quad \text{illetve} \quad V(H) = \left(R^2 - \frac{H^2}{4}\right)\pi H = R^2\pi H - \frac{\pi}{4}H^3.$$

Határozzuk meg a fenti függvény maximumát. A függvény első deriváltja:

$$V'(H) = R^2\pi - \frac{3\pi}{4}H^2,$$

az

$$R^2\pi - \frac{3\pi}{4}H^2 = 0$$

egyenlet megoldásai pedig $H_1 = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ és $H_2 = -\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$, amelyek közül csak $H_1 = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ az egyetlen elfogadható stacionárius pont, hiszen a henger magassága pozitív szám kell legyen. $H_1 = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ esetén

$$r^2 = R^2 - \frac{1}{4}\cdot\frac{4R^2}{3} = \frac{2R^2}{3}.$$

Mutassuk meg, hogy ez az érték valóban maximális térfogatot ad. Mivel

$$V''(H) = -\frac{3\pi}{2}H, \quad \text{ezért} \quad V''\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{3\pi}{2}\cdot\frac{2R}{\sqrt{3}} < 0,$$

így valóban maximumról beszélünk, s a lehető legnagyobb térfogatú henger sugara $r = R\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, magassága $H = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$, térfogata pedig $V = \dfrac{4R^3\pi}{3\sqrt{3}}$.

8. Adott R sugarú gömbbe írjunk lehető legnagyobb térfogatú kúpot.

Megoldás. Készítsük el a gömb és a kúp keresztmetszetének vázlatát. Legyen r a kúp alapjának sugara, H pedig a kúp magassága. A kúp térfogata ekkor

$$V(r,H) = \frac{1}{3}r^2\pi H.$$

Az ábráról leolvashatjuk, hogy $r^2 = R^2 - (H-R)^2 = 2RH - H^2$, ezért

$$V(H) = \frac{1}{3}\left(2RH - H^2\right)\pi H = \frac{\pi}{3}\left(2RH^2 - H^3\right).$$

Keressük meg a fenti térfogatfüggvény maximumát. Mivel

$$V'(H) = \frac{\pi}{3}\left(4RH - 3H^2\right) = \frac{\pi}{3}H\left(4R - 3H\right),$$

és $V'(H) = 0$ kell teljesüljön, ezért a $H\,(4R - 3H) = 0$ egyenlet megoldásai lehetnek a stacionárius pontok. A $H_0 = 0$ az egyik megoldás, de ennek most nincs értelme, a másik megoldás $H_1 = \frac{4}{3}R$ viszont stacionárius pont, amelyre $r^2 = \frac{8R^2}{3} - \frac{16R^2}{9} = \frac{8}{9}R^2$. Mutassuk meg, hogy ezekkel az értékekkel valóban maximális térfogatot kapunk. A térfogatfüggvény második deriváltja

$$V''(H) = \frac{\pi}{3}\,(4R - 6H) \quad \text{és} \quad V''(H) = \frac{\pi}{3}\left(4R - 6\cdot\frac{4}{3}R\right) = \frac{\pi}{3}\,(4R - 8R) < 0,$$

tehát valóban a maximális térfogatot kaptuk, amelynek értéke:

$$V_{max} = \frac{1}{3}\cdot\frac{8}{9}R^2\pi\cdot\frac{4}{3}R = \frac{32}{81}R^3\pi.$$

9. *Adott területű és alapú háromszögek közül melyiknek legkisebb a kerülete?

Megoldás. Legyen az adott háromszög alapja a, másik két oldala b és c, területe pedig T. Ekkor $T = \frac{ah}{2}$, ahonnan $h = \frac{2T}{a}$. Ha a h magasság az a alapot x és $a - x$ részekre bontja fel, akkor a derékszögű háromszögekből

$$b^2 = h^2 + x^2, \quad \text{illetve} \quad b = \sqrt{h^2 + x^2}$$

és

$$c^2 = h^2 + (a - x)^2, \quad \text{illetve} \quad c = \sqrt{h^2 + (a - x)^2}$$

adódik, a keresett kerület pedig $K = a + b + c$, illetve

$$K(x, h) = a + \sqrt{h^2 + x^2} + \sqrt{h^2 + (a - x)^2}.$$

Mivel $h = \frac{2T}{a}$, így

$$K(x) = a + \sqrt{\frac{4T^2}{a^2} + x^2} + \sqrt{\frac{4T^2}{a^2} + (a - x)^2}$$

és

$$K'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{\frac{4T^2}{a^2} + x^2}} + \frac{-2(a - x)}{2\sqrt{\frac{4T^2}{a^2} + (a - x)^2}}.$$

$K'(x) = 0$ akkor és csakis akkor teljesül, ha

$$\frac{x}{\sqrt{\frac{4T^2}{a^2} + x^2}} = \frac{a - x}{\sqrt{\frac{4T^2}{a^2} + (a - x)^2}},$$

innen pedig

$$x\sqrt{\frac{4T^2}{a^2} + (a - x)^2} = (a - x)\sqrt{\frac{4T^2}{a^2} + x^2}.$$

Négyzetre emelés és rendezés után azt kapjuk, hogy $x^2 = (a-x)^2$, ahonnan $x^2 = a^2 - 2ax + x^2$, s ebből $x = \frac{a}{2}$, ami azt jelenti, hogy a háromszögnek egyenlőszárúnak kell lennie. Mivel

$$K''(x) = \frac{\sqrt{\frac{4T^2}{a^2}+x^2} - x\cdot\frac{x}{\sqrt{\frac{4T^2}{a^2}+x^2}}}{\frac{4T^2}{a^2}+x^2} - \frac{-\sqrt{\frac{4T^2}{a^2}+(a-x)^2} - (a-x)\cdot\frac{-2(a-x)}{\sqrt{\frac{4T^2}{a^2}+(a-x)^2}}}{\frac{4T^2}{a^2}+(a-x)^2} =$$

$$= \frac{\frac{4T^2}{a^2}+x^2-x^2}{\left(\frac{4T^2}{a^2}+x^2\right)\sqrt{\frac{4T^2}{a^2}+x^2}} + \frac{\frac{4T^2}{a^2}+(a-x)^2-(a-x)^2}{\left(\frac{4T^2}{a^2}+(a-x)^2\right)\sqrt{\frac{4T^2}{a^2}+(a-x)^2}} =$$

$$= \frac{4T^2}{a^2}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{4T^2}{a^2}+x^2\right)^3}} + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{4T^2}{a^2}+(a-x)^2\right)^3}}\right),$$

és

$$K''\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{4T^2}{a^2}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{4T^2}{a^2}+\frac{a^2}{4}\right)^3}} + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{4T^2}{a^2}+\frac{a^2}{4}\right)^3}}\right) > 0,$$

ezért az adott területű háromszögek közül valóban az egyenlőszárú háromszög a legkisebb kerületű.

10. *Határozzuk meg az adott palástterületű kúpok közül azt, amelyiknek lehető legnagyobb a térfogata.

Megoldás. Legyen r a kúp alapjának sugara, s az alkotója, H pedig a magassága. A feltételek szerint a kúp palástjának M területe állandó és ismert. Mivel $M = r\pi s$, ezért $s = \frac{M}{r\pi}$, és ugyanakkor $H = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{\frac{M^2}{r^2\pi^2} - r^2}$. A kúp térfogata

$$V(r,H) = \frac{1}{3}r^2\pi H,$$

illetve egy változóval kifejezve

$$V(r) = \frac{1}{3}r^2\pi\sqrt{\frac{M^2}{r^2\pi^2} - r^2} = \frac{1}{3}r^2\pi\frac{1}{r\pi}\sqrt{M^2 - r^4\pi^2} = \frac{1}{3}r\sqrt{M^2 - \pi^2 r^4}.$$

A térfogatfüggvény első deriváltja

$$V'(r) = \frac{1}{3}\sqrt{M^2-\pi^2r^4} + \frac{1}{3}r\frac{-4\pi^2r^3}{2\sqrt{M^2-\pi^2r^4}} = \frac{1}{3}\sqrt{M^2-\pi^2r^4} - \frac{1}{3}\frac{2\pi^2r^4}{\sqrt{M^2-\pi^2r^4}}.$$

Mivel $V'(r) = 0$ kell teljesüljön, ezért meg kell oldani az

$$\frac{1}{3}\sqrt{M^2-\pi^2r^4} = \frac{1}{3}\frac{2\pi^2r^4}{\sqrt{M^2-\pi^2r^4}}$$

egyenletet. Rendezés után adódik, hogy

$$M^2 - \pi^2r^4 = 2\pi^2r^4, \quad \text{ahonnan} \quad M^2 = 3\pi^2r^4,$$

ebből pedig megkapjuk, hogy a megoldások $r_1 = \sqrt{\frac{M}{\pi\sqrt{3}}}$ és $r_2 = -\sqrt{\frac{M}{\pi\sqrt{3}}}$. A negatív megoldásnak nincs értelme a feladat szempontjából, ezért r_1 az egyetlen stacionárius pont. A második derivált

$$V''(r) = \frac{1}{3} \cdot \frac{-2\pi^2 r^3}{\sqrt{M^2 - \pi^2 r^4}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{4\pi^2 r^3 \sqrt{M^2 - \pi^2 r^4} - 2\pi^2 r^4 \frac{-2\pi^2 r^3}{\sqrt{M^2 - \pi^2 r^4}}}{M^2 - \pi^2 r^4} =$$

$$= -\frac{2}{3} \cdot \frac{\pi^2 r^3}{\sqrt{M^2 - \pi^2 r^4}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{4\pi^2 r^3 M^2 - 4\pi^4 r^7 + 4\pi^4 r^7}{(M^2 - \pi^2 r^4)\sqrt{M^2 - \pi^2 r^4}} =$$

$$= -\frac{2}{3} \cdot \frac{\pi^2 r^3}{\sqrt{M^2 - \pi^2 r^4}} \left(1 + \frac{4M^2}{M^2 - \pi^2 r^4}\right).$$

Mivel

$$\pi^2 r^4 = \frac{M^2}{3} \quad \text{és} \quad M^2 - \pi^2 r^4 = M^2 - \frac{M^2}{3} = \frac{2}{3}M^2,$$

ezért

$$V''\left(\sqrt{\frac{M}{\pi\sqrt{3}}}\right) < 0,$$

tehát az $r_1 = \sqrt{\frac{M}{\pi\sqrt{3}}}$ alapsugarú kúpnak a legnagyobb a térfogata, mégpedig

$$V_{max} = \frac{M}{3}\sqrt{\frac{20}{3\pi\sqrt{3}}}.$$

4.2.5. A függvény konvexitása és inflexiós pontjai

A konvex függvényeknek sok jelentős tulajdonsága van. Belátható például, hogy az adott intervallumon konvex függvények folytonosak is az adott intervallumon. Legfontosabbnak mégis a konvex függvények deriváltakkal kapcsolatos tulajdonságait tartjuk, ezért ezzel kapcsolatban fogalmazunk meg néhány állítást.

4.19. Tétel. *Az f differenciálható függvény akkor és csakis akkor konvex (konkáv) az $[a, b]$ intervallumon, ha f' növekvő (csökkenő) az $[a, b]$ intervallumon.*

4.20. Tétel. *Az $[a, b]$ intervallumon kétszer differenciálható f függvény akkor és csak akkor szigorúan konvex (konkáv) az $[a, b]$ intervallumon, ha $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) minden $x \in [a, b]$ pontra.*

Ezek után megfogalmazzuk a differenciálható függvény inflexiós pontja létezésének feltételeit. Elsőként szükséges feltételt mondunk ki.

4.21. Tétel. *Ha az x_0 pont valamely környezetében kétszer differenciálható f függvénynek az x_0 pontban inflexiós pontja van, akkor $f''(x_0) = 0$.*

A továbbiakban az inflexiós pont létezésére vonatkozó elegendő feltételeket adunk meg.

4.22. Tétel. *Ha f az x_0 pont valamely környezetében kétszer differenciálható és igaz, hogy $f''(x_0) = 0$, valamint az f'' függvény az x_0 pontban előjelet vált, akkor f-nek az x_0 pontban inflexiós pontja van.*

4.23. Tétel. *Ha f az x_0 pontban háromszor differenciálható, valamint $f''(x_0) = 0$ és $f'''(x_0) \neq 0$, akkor f-nek az x_0 pontban inflexiós pontja van.*

Ha az f függvény olyan, hogy $f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$, akkor az inflexiós pont létezéséről e tételek alapján nem mondhatunk semmit. A következő tétel segít az ilyen jellegű problémák megoldásában.

4.24. Tétel. *Legyen x_0 helyen n-szer differenciálható f függvény deriváltjaira igaz, hogy*

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

és $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Ekkor az f függvénynek az x_0 pontban akkor és csakis akkor van inflexiós pontja, ha n páratlan szám.

4.26. Példa. Az $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x$ függvénynek $f'(x) = x^2 - 6x + 8$ az első deriváltja, $f''(x) = 2x - 6$ pedig a második deriváltja. Mivel $f''(x) = 0$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $2x - 6 = 0$, azaz $x = 3$ esetén, ezért a függvénynek itt lehet inflexiós pontja. Vizsgáljuk ki a második derivált előjelét! Mivel $f''(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $2x - 6 > 0$, azaz $x > 3$ esetén és $f''(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $2x - 6 < 0$, azaz $x < 3$ esetén, ezért levonhatjuk azt a következtetést, hogy az f függvény konvex a $(3, \infty)$ intervallumon és konkáv a $(-\infty, 3)$ intervallumon. Az itt leírt eredményeket táblázatba is foglalhatjuk.

D_f	$(-\infty, 3)$	$(3, \infty)$
$x - 3$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\bigcap$	$\bigcup$

Mivel az f függvény az $x = 3$ pontban konkávitásból konvexitásba megy át, tehát görbületet vált, ezért ebben a pontban az f függvénynek inflexiós pontja van. A függvény értéke az inflexiós pontjában $f_{inf}(3) = 6$, az inflexiós pont koordinátái pedig $P_{inf}(3, 6)$.

Az inflexiós pont létezését az f függvény harmadik deriváltja segítségével is ellenőrizhetjük. Mivel a harmadik derivált $f'''(x) = 2$, ezért $f'''(3) = 2 \neq 0$ is igaz, tehát az $x = 3$ pontban az f függvénynek inflexiós pontja van.

4.27. Példa. Az $f(x) = 2x^4 + 3x + 4$ függvénynek $f'(x) = 8x^3 + 3$ az első deriváltja, $f''(x) = 24x^2$ pedig a második deriváltja. Mivel $f''(x) = 0$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $x = 0$, ezért itt van a függvénynek lehetséges inflexiós pontja. Viszont $f'''(x) = 48x$ és $f'''(0) = 0$, ezért tovább kell számolni a függvény deriváltjait ahhoz, hogy el lehessen dönteni vajon itt inflexiós pontja lesz-e a függvénynek vagy sem. Mivel $f^4(x) = 48$ és $f^4(0) = 48 \neq 0$ teljesül, azaz páros deriváltra lesz először nullától különböző függvényérték az $x = 0$ pontban, így ebben a pontban a függvénynek nem inflexiós pontja van, hanem szélsőértéke. $f^4(0) = 48 > 0$ miatt ez az f függvény egy minimumpontja.
Másik indoklás: mivel $f''(x) = 24x^2 \geq 0$ a teljes értelmezési tartományon, ezért az f függvény konvex a teljes értelmezési tartományon, vagyis nem vált görbületet az $x = 0$ pontban, ezért az $x = 0$ pont nem inflexiós pont.

4.2.6. Függvénykivizsgálás

A függvénykivizsgálás vázlata:

1. ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY: $D_f \subseteq \mathbf{R}$. Érdemes az értelmezési tartományt intervallumként, illetve intervallumok uniójaként felírni és kivizsgálni a függvény viselkedését az intervallumok végpontjaiban, s így a függőleges és vízszintes aszimptotákat is megkapjuk, ha vannak.

2. PARITÁS: Kivizsgáljuk, hogy a függvény páros vagy páratlan, vagy esetleg egyik tulajdonsággal sem rendelkezik.

3. NULLAHELY: Meghatározzuk az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásait, mert ezekben a pontokban metszi a függvény grafikonja az x-tengelyt.

4. ELŐJEL: Meghatározzuk az $f(x) > 0$ és az $f(x) < 0$ egyenlőtlenségek megoldáshalmazait, mert az így kapott intervallumokon lesz a függvény grafikonja az x-tengely felett, illetve alatt.

5. ASZIMPTOTÁK
a) FÜGGŐLEGES ASZIMPTOTA: Az $x = a$ egyenes az $y = f(x)$ függvénygörbe függőleges aszimptotája, ha

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \pm\infty \quad \text{vagy} \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty.$$

b) VÍZSZINTES ASZIMPTOTA: Az $y = f(x)$ függvénygörbe vízszintes aszimptotája az olyan $y = b$ egyenes, amelyre

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad \text{vagy} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

c) FERDE ASZIMPTOTA: Az $y = kx + n$ egyenes az $y = f(x)$ függvénygörbe ferde aszimptotája, amennyiben

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{és} \quad n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx), \quad k \neq 0, \quad k, n \neq \pm\infty.$$

6. SZÉLSŐÉRTÉKEK: Az $f'(x) = 0$ egyenlet megoldásai adják a stacionárius pontokat, amelyekben a függvénynek lehetnek szélsőértékei, mégpedig maximuma, amennyiben ott a függvény monoton növekedésből monoton csökkenésbe vált, illetve minimuma, amennyiben ott a függvény monoton csökkenésből monoton növekedésbe vált.

7. MONOTONITÁS: Azokon az intervallumokon, ahol $f'(x) > 0$, ott a függvény szigorúan monoton növekszik, s ahol $f'(x) < 0$, ott a függvény szigorúan monoton csökken.

8. INFLEXIÓS PONTOK: Az $f''(x) = 0$ egyenlet megoldásaiban lehetnek a függvénynek inflexiós pontjai, amennyiben ott a függvény görbületet vált, azaz konvexitásból konkávitásba megy át, vagy fordítva.

9. KONVEXITÁS: Azokon az intervallumokon, ahol $f''(x) > 0$, ott a függvény konvex, s ahol $f''(x) < 0$, ott a függvény konkáv.

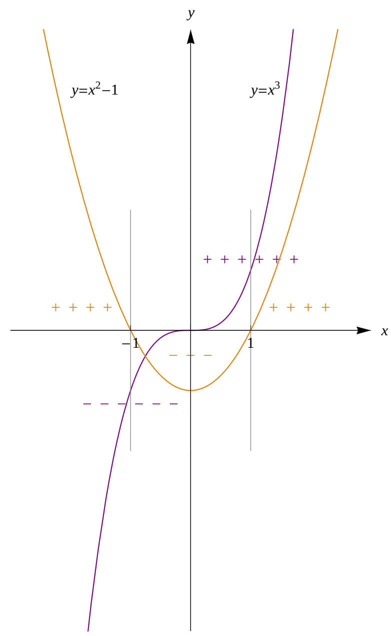
10. A FÜGGVÉNY GRAFIKONJA: A koordinátarendszerben bejelöljük a kivizsgált adatokat, majd a jellegzetes pontok (nullahelyek, szélsőértékek, inflexiós pontok) összekötésével megrajzoljuk a függvény grafikonját.

4.28. Példa. Vizsgáljuk ki az $f(x) = x^3(x^2-1)$ függvényt és rajzoljuk le a grafikonját.

1. ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY: Az f függvény polinom, tehát $D_f = \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$.
2. PARITÁS: A függvény értelmezési tartománya az origóra szimmetrikus intervallum, így van értelme vizsgálni a paritást. Mivel

$$f(-x) = (-x)^3((-x)^2-1) = -x^3(x^2-1) = -f(x),$$

ez azt jelenti, hogy a függvény páratlan, tehát grafikonja középpontosan szimmetrikus az origóra.



3. NULLAHELY: $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x^3(x^2-1) = 0$, azaz $x^3(x-1)(x+1) = 0$. A kapott egyenlet megoldásai az $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ és $x_3 = 1$, ez pedig azt jelenti, hogy a függvény görbéje a $(-1, 0)$, $(0, 0)$ és $(1, 0)$ pontokban metszi az x-tengelyt.

4. ELŐJEL: Az f függvény előjelét meghatározhatjuk a tényezőit alkotó függvények grafikonjainak segítségével, vagyis az $y = x^3$ és $y = x^2-1$ függvények grafikonjainak ábrázolásával. Mivel a függvények előjelei megegyeznek az $(-1, 0)$ és $(1, \infty)$ intervallumon, különböznek a $(-\infty, -1)$ és $(0, 1)$ intervallumon, ezért
$f(x) > 0$ ha $x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$ és
$f(x) < 0$ ha $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

5. ASZIMPTOTÁK
a) FÜGGŐLEGES ASZIMPTOTA: Mivel az f függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, a függvénynek nincs függőleges aszimptotája.
b) VÍZSZINTES ASZIMPTOTA: A függvénynek nincs vízszintes aszimptotája, mert

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^3(x^2-1) = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3(x^2-1) = -\infty.$$

c) FERDE ASZIMPTOTA: Mivel

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3(x^2-1)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x^2(x^2-1) = \infty,$$

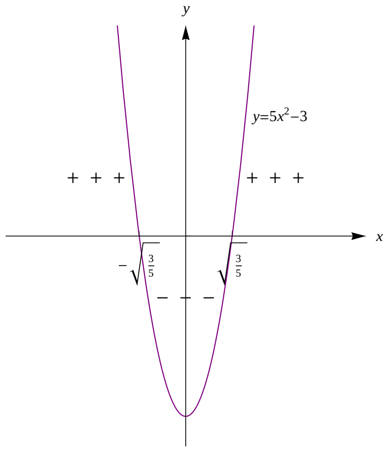
ezért a függvénynek nincs ferde aszimptotája.

6. SZÉLSŐÉRTÉKEK: A függvény első deriváltja

$$f'(x) = 3x^2(x^2-1) + x^3 \cdot 2x = x^2(3x^2-3+2x^2) = x^2(5x^2-3).$$

Mivel $f'(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x^2(\sqrt{5}x - \sqrt{3})(\sqrt{5}x + \sqrt{3}) = 0$, ezért az f függvény stacionárius pontjai $x_2 = 0$, $x_4 = -\dfrac{\sqrt{15}}{5} \approx -0,77$ és $x_5 = \dfrac{\sqrt{15}}{5} \approx 0,77$.

7. MONOTONITÁS: Az f' függvény előjelének meghatározására alkalmazzuk az $f'(x) = x^2(5x^2 - 3)$ alakot.
Mivel $x^2 > 0$ ha $x \neq 0$, az $y = 5x^2 - 3$ parabola grafikonja alapján megállapítjuk, hogy $5x^2 - 3 > 0$, ha $x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{15}}{5}) \cup (\frac{\sqrt{15}}{5}, \infty)$ és $5x^2 - 3 < 0$, amennyiben $x \in (-\frac{\sqrt{15}}{5}, \frac{\sqrt{15}}{5})$.
Ebből az következik, hogy $f'(x) > 0$, azaz az f függvény növekszik a $(-\infty, -\frac{\sqrt{15}}{5}) \cup (\frac{\sqrt{15}}{5}, \infty)$ intervallumon és $f'(x) < 0$, azaz az f függvény csökken az $(-\frac{\sqrt{15}}{5}, 0) \cup (0, \frac{\sqrt{15}}{5})$ intervallumon.



Az f' függvény előjelet vált az $x_4 = -\frac{\sqrt{15}}{5}$, illetve az $x_5 = \frac{\sqrt{15}}{5}$ pontban, így ezekben a pontokban a függvénynek szélsőértéke van. Pontosabban, x_4-ben a függvénynek maximuma van, mert ott a függvénygörbe növekedésből csökkenésbe vált, x_5-ben pedig a függvénynek minimuma van, mert ott csökkenésből vált növekedésbe. Ugyanakkor $f_{max}(x_4) \approx 0,18$ és $f_{min}(x_5) \approx -0,18$.

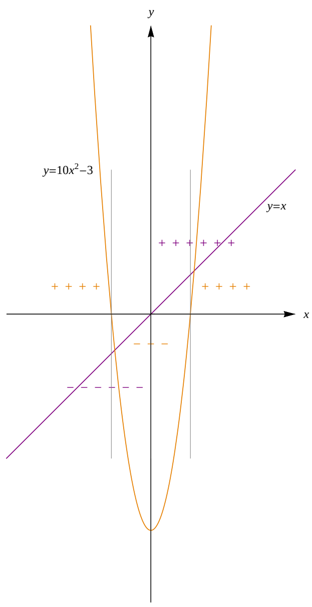
8. INFLEXIÓS PONTOK: A függvény második deriváltja

$$f''(x) = 2x(5x^2 - 3) + x^2 \cdot 10x = 2x(10x^2 - 3).$$

$f''(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $2x(\sqrt{10}x - \sqrt{3})(\sqrt{10}x + \sqrt{3}) = 0$. A kapott egyenlet megoldásai, s egyben a lehetséges inflexiós pontok

$$x_2 = 0, \quad x_6 = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{30}}{10} \quad \text{és} \quad x_7 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

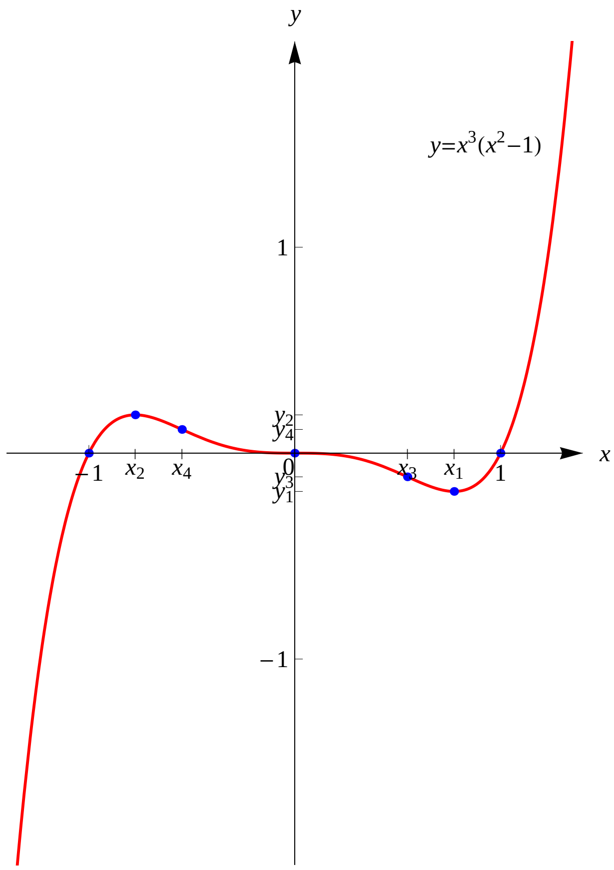
9. KONVEXITÁS: Az $f''(x) = 2x(10x^2 - 3)$ függvény előjele az $y = x$ és $y = 10x^2 - 3$ függvények grafikonjai alapján így alakul:
$f''(x) > 0$ ha $x \in \left(-\frac{\sqrt{30}}{10}, 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{30}}{10}, \infty\right)$,
$f''(x) < 0$ ha $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{30}}{10}\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{30}}{10}\right)$.
Tehát az f függvény konvex az $\left(-\frac{\sqrt{30}}{10}, 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{30}}{10}, \infty\right)$ intervallumon és konkáv a $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{30}}{10}\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{30}}{10}\right)$ intervallumon.
Mivel az f'' függvény előjelet vált a nullahelyeiben, ezért az $x_2 = 0$, $x_6 = -\frac{\sqrt{30}}{10}$ és $x_7 = \frac{\sqrt{30}}{10}$ pontokban az f függvénynek inflexiós pontjai vannak.



Az inflexiós pontoknak megfelelő függvényértékek:

$$f_{inf}(x_6) \approx 0,12 \quad \text{és} \quad f_{inf}(x_7) \approx -0,12.$$

10. FÜGGVÉNY GRAFIKONJA:



4.29. Példa. Vizsgáljuk ki az $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 10}{-x^2 + 5x + 14}$ függvényt és rajzoljuk le a grafikonját.

1. ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY: A számláló és a nevező tényezőkre bontása után kapjuk, hogy $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-5)}{(7-x)(x+2)}$, vagyis az $x+2$ binommal tudunk egyszerűsíteni, ha $x+2 \neq 0$. Ezáltal a függvény az $f(x) = \dfrac{x-5}{7-x}$ formát veszi fel, ahol $x \neq -2$. Mivel a nevező nem lehet nulla, ezért $7 - x \neq 0$. Tehát $x \neq 7$ és $x \neq -2$, így

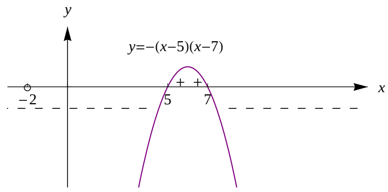
$$D_f = \mathbf{R} \setminus \{-2, 7\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 7) \cup (7, \infty).$$

2. PARITÁS: A függvény értelmezési tartománya nem szimmetrikus intervallum az origóra, így a függvény se nem páros se nem páratlan.

3. NULLAHELY: $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x - 5 = 0$. Az egyenlet megoldása $x = 5$, tehát $x = 5$ a függvény nullahelye, s a függvény görbéje illeszkedik az $(5, 0)$ pontra.

4. ELŐJEL: Az f függvény előjele megegyezik a $P(x) = (x-5)(7-x) = -(x-5)(x-7)$ polinom előjelével az értelmezési tartományon.

A P polinom konvex, mert a főegyütthatója $-1 < 0$ és metszi az x-tengelyt az $x = 5$ és $x = 7$ pontokban. A P polinom grafikonja alapján megállapítjuk, hogy $P(x) > 0$, ha $x \in (5, 7)$ és $P(x) < 0$ ha $x \in (-\infty, 5) \cup (7, \infty)$.



Tehát, $f(x) > 0$ ha $x \in (5, 7)$ és $f(x) < 0$ ha $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 5) \cup (7, \infty)$.

5. ASZIMPTOTÁK

a) FÜGGŐLEGES ASZIMPTOTA:

$$\lim_{x\to -2-0} f(x) = \lim_{x\to -2-0} \frac{x-5}{7-x} = \frac{-7}{9} \quad \text{és} \quad \lim_{x\to -2+0} f(x) = \lim_{x\to -2+0} \frac{x-5}{7-x} = \frac{-7}{9}$$

miatt az f függvénynek nincs függőleges aszimptotája az $x = -2$ pontban.
Mivel

$$\lim_{x\to 7-0} f(x) = \lim_{x\to 7-0} \frac{x-5}{7-x} = \frac{2}{+0} = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 7+0} f(x) = \lim_{x\to 7+0} \frac{x-5}{7-x} = \frac{2}{-0} = -\infty$$

ezért $x = 7$ az f függvény függőleges aszimptotája.

b) VÍZSZINTES ASZIMPTOTA:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x-5}{7-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(1-\frac{5}{x})}{x(\frac{7}{x}-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{5}{x}}{\frac{7}{x}-1} = -1$$

és

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-5}{7-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(1-\frac{5}{x})}{x(\frac{7}{x}-1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{5}{x}}{\frac{7}{x}-1} = -1,$$

tehát $y = -1$ vízszintes aszimptotája a függvénynek.

c) FERDE ASZIMPTOTA: Mivel a függvénynek van vízszintes aszimptotája, ezért $y = kx+n$ egyenletű ferde aszimptotája nincs, amit számítással is igazolhatunk:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-5}{x(7-x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(1-\frac{5}{x})}{x(7-x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{5}{x}}{7-x} = 0,$$

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-5}{x(7-x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(1-\frac{5}{x})}{x(7-x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{5}{x}}{7-x} = 0.$$

6. SZÉLSŐÉRTÉKEK: Az első derivált $f'(x) = \dfrac{7-x-(x-5)(-1)}{(7-x)^2} = \dfrac{2}{(7-x)^2}$.
Mivel $f'(x) = 0$ nem lehetséges, ezért az f függvénynek nincs stacionárius pontja, s így nincs szélsőértéke sem.

7. MONOTONITÁS: Minden $x \in D_f$ esetén érvényes, hogy $f'(x) > 0$, amiből következik, hogy az f függvény növekszik a $(-\infty, -2) \cup (-2, 7) \cup (7, \infty)$ intervallumon.

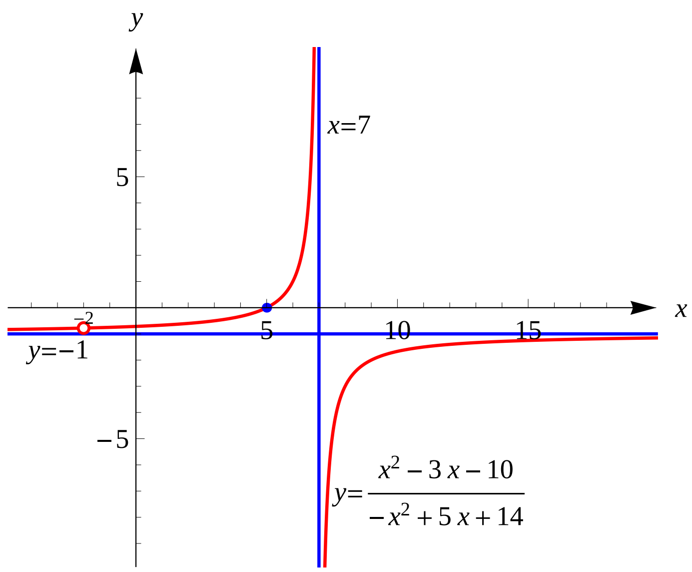
8. INFLEXIÓS PONTOK: Az f függvény második deriváltja

$$f''(x) = \left(2(7-x)^{-2}\right)' = -4(7-x)^{-3} \cdot (-1) = \frac{4}{(7-x)^3}.$$

Mivel $f''(x) = 0$ nem lehetséges, a függvénynek nincs inflexiós pontja.

9. KONVEXITÁS: Vizsgáljuk ki az f'' függvény előjelét. $f''(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $7 - x > 0$ és $f''(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $7 - x < 0$, ezért $f''(x) > 0$, ha $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 7)$ és $f''(x) < 0$, ha $x \in (7, \infty)$. Az f függvény konvex a $(-\infty, -2) \cup (-2, 7)$ intervallumon és konkáv a $(7, \infty)$ intervallumon.

10. A FÜGGVÉNY GRAFIKONJA:



4.30. Példa. Vizsgáljuk ki az $f(x) = x\sqrt{1-x}$ függvényt és rajzoljuk le a grafikonját.

1. ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY: $D_f = (-\infty, 1]$, mert $1 - x \geq 0$, ahonnan $x \leq 1$.

2. PARITÁS: A függvény értelmezési tartománya nem szimmetrikus intervallum az origóra, így a függvény se nem páros se nem páratlan.

3. NULLAHELY: $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x\sqrt{1-x} = 0$. A kapott egyenlet megoldásai $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$, s ezek egyben az f függvény nullahelyei.

4. ELŐJEL: Mivel $\sqrt{1-x} > 0$ a teljes értelmezési tartományon, ezért $f(x) > 0$ ha $x > 0$ és $f(x) < 0$ ha $x < 0$.

5. ASZIMPTOTÁK: A függvénynek se függőleges, se ferde, se vízszintes aszimptotája nincs, mert

$$\lim_{x \to 1-0} x\sqrt{1-x} = (1-0)\sqrt{+0} = +0, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{1-x} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x\sqrt{1-x} = -\infty.$$

6. SZÉLSŐÉRTÉKEK: Az első derivált $f'(x) = \sqrt{1-x} - \dfrac{x}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$, $x \neq 1$.

$f'(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $2 - 3x = 0$, azaz $x_3 = \dfrac{2}{3}$, és ez egyben az f függvény stacionárius pontja.

7. MONOTONITÁS: $f'(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $2 - 3x > 0$, azaz $x < \frac{2}{3}$ esetén. $f'(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $2-3x < 0$, azaz $x > \frac{2}{3}$ esetén. Ebből megállapíthatjuk, hogy az f függvény szigorúan monoton növekvő a $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ intervallumon, a $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ intervallumon pedig szigorúan monoton csökkenő. A monotonitás alapján az f függvénynek $x_3 = \frac{2}{3}$-ban maximuma van és $f_{max}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$.

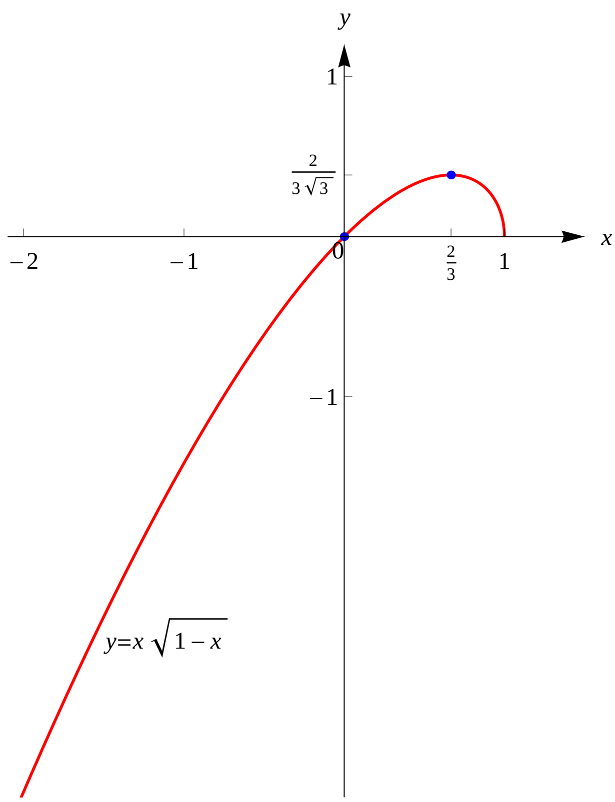
8. INFLEXIÓS PONTOK: Az f függvény második deriváltja

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-3\sqrt{1-x} + (2-3x)\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{1-x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-6(1-x) + (2-3x)}{2(1-x)\sqrt{1-x}} = \frac{3x-4}{4(1-x)\sqrt{1-x}}.$$

$f''(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $3x - 4 = 0$, azaz $x_4 = \frac{4}{3}$ esetén. Mivel $x_4 \notin D_f$, ezért az f függvénynek nincs inflexiós pontja.

9. KONVEXITÁS: $f''(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $3x-4 > 0$, azaz $x > \frac{4}{3}$ esetén. Mivel ez az intervallum nincs benne az értelmezési tartományban, így az f függvény második deriváltja nem lehet pozitív. $f''(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $3x - 4 < 0$, azaz $x < \frac{4}{3}$ esetén. Ez a tulajdonság érvényes a D_f értelmezési tartományon, tehát az f függvény konkáv, ha $x \in D_f$.

10. A FÜGGVÉNY GRAFIKONJA:



4.31. Példa. Vizsgáljuk ki az $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$ függvényt és rajzoljuk le a grafikonját.

1. ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY: $D_f = \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$.

2. PARITÁS: Mivel $f(-x) = -xe^{-\frac{-x}{2}} = -xe^{\frac{x}{2}} \neq \pm f(x)$, ezért a függvény se nem páros, se nem páratlan.

3. NULLAHELY: $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $xe^{-\frac{x}{2}} = 0$. Az egyenlet megoldása $x_1 = 0$, s ez az f függvény nullahelye.

4. ELŐJEL: Mivel az exponenciális függvény mindig pozitív, ezért $f(x) > 0$, ha $x > 0$, illetve $f(x) < 0$, ha $x < 0$.

5. ASZIMPTOTÁK
a) FÜGGŐLEGES ASZIMPTOTA: Nincs, mert a függvény minden valós számra értelmezett.
b) VÍZSZINTES ASZIMPTOTA: $y = 0$ pozitív irányban vízszintes aszimptota, mert

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} xe^{-\frac{x}{2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\frac{x}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}} = \frac{1}{+\infty} = +0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{-\frac{x}{2}} = -\infty \cdot \infty = -\infty.$$

c) FERDE ASZIMPTOTA: Csak negatív irányban kell kivizsgálni, mert pozitív irányban van vízszintes aszimptota. Mivel

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{x}{2}} = +\infty,$$

ezért ferde aszimptota nincs.

6. SZÉLSŐÉRTÉKEK: Az első derivált $f'(x) = e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}xe^{-\frac{x}{2}} = \left(1 - \frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$.
$f'(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $\left(1 - \frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} = 0$, vagyis ha $1 - \frac{x}{2} = 0$. A kapott egyenlet megoldása $x_2 = 2$, az f függvény stacionárius pontja.

7. MONOTONITÁS: $f'(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $1 - \frac{x}{2} > 0$, azaz $x < 2$ esetén. $f'(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $1 - \frac{x}{2} < 0$, azaz $x > 2$ esetén. Ebből megállapíthatjuk, hogy az f függvény szigorúan monoton növekvő a $(-\infty, 2)$ intervallumon, a $(2, +\infty)$ intervallumon pedig szigorúan monoton csökkenő. A monotonitás alapján az f függvénynek $x_2 = 2$-ben maximuma van és $f_{max}(2) = \frac{2}{e}$.

8. INFLEXIÓS PONTOK: Az f függvény második deriváltja

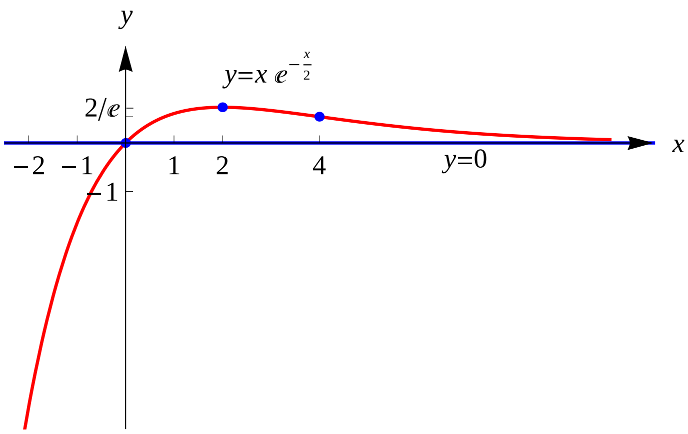
$$f''(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} = \left(-1 + \frac{x}{4}\right) e^{-\frac{x}{2}}.$$

$f''(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $-1 + \frac{x}{4} = 0$. Az f függvény lehetséges inflexiós pontja ezért $x_3 = 4$-ben van.

9. KONVEXITÁS: $f''(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $-1 + \frac{x}{4} > 0$, azaz $x > 4$ esetén. $f'(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $-1 + \frac{x}{4} < 0$, azaz $x < 4$ esetén. Ebből megállapíthatjuk, hogy az f függvény konvex az $(-\infty, 4)$ intervallumon, a $(4, +\infty)$ intervallumon pedig

konkáv. Mivel x_3-ban az f'' függvény előjelet vált, ezért ott az f függvénynek inflexiós pontja van és $f_{inf}(4) = \dfrac{4}{e^2}$.

10. A FÜGGVÉNY GRAFIKONJA:



4.32. Példa. Vizsgáljuk ki az $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$ függvényt és rajzoljuk le a grafikonját.

1. ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY: A logaritmus függvény csak pozitív értékekre értelmezett és a nevező nem lehet nulla, azaz $x > 0$ és $x \neq 0$ kell, hogy teljesüljön. Tehát

$$D_f = \mathbf{R}^+ = (0, +\infty).$$

2. PARITÁS: Mivel az értelmezési tartomány nem szimmetrikus az origóra, ezért a függvény nem lehet se páros, se páratlan.

3. NULLAHELY: $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $1+\ln x = 0$, azaz $x_1 = e^{-1}$ a nullahely.

4. ELŐJEL: $f(x) > 0$, ha $\dfrac{1+\ln x}{x} > 0$ és $f(x) < 0$, ha $\dfrac{1+\ln x}{x} < 0$. Mivel $x > 0$ teljesül az értelmezési tartományon, ezért f pozitív, ha $1 + \ln x > 0$, azaz $x > e^{-1}$ és f negatív, ha $1 + \ln x < 0$, vagyis $0 < x < e^{-1}$.

5. ASZIMPTOTÁK

a) FÜGGŐLEGES ASZIMPTOTA: Az $x = 0$ egyenes függőleges aszimptota, mert

$$\lim_{x\to+0} \frac{1+\ln x}{x} = -\infty.$$

b) VÍZSZINTES ASZIMPTOTA: Az $y = 0$ egyenes vízszintes aszimptota, mert a L'Hospital szabály alkalmazása után kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = +0.$$

c) FERDE ASZIMPTOTA: Mivel van vízszintes aszimptota, ezért ferde nem lehet.

6. SZÉLSŐÉRTÉKEK: Az első derivált

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - (1+\ln x)}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}.$$

$f'(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $\ln x = 0$. Az egyenlet megoldása $x_2 = 1$, és ez az f függvény stacionárius pontja.

7. MONOTONITÁS: $f'(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $\ln x < 0$, azaz $0 < x < 1$ esetén. $f'(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $\ln x > 0$, azaz $x > 1$ esetén. Ebből megállapíthatjuk, hogy az f függvény szigorúan monoton növekvő a $(0, 1)$ intervallumon, és szigorúan monoton csökkenő az $(1, +\infty)$ intervallumon. A monotonitás alapján az f függvénynek $x_2 = 1$-ben maximuma van és $f_{max}(1) = 1$.

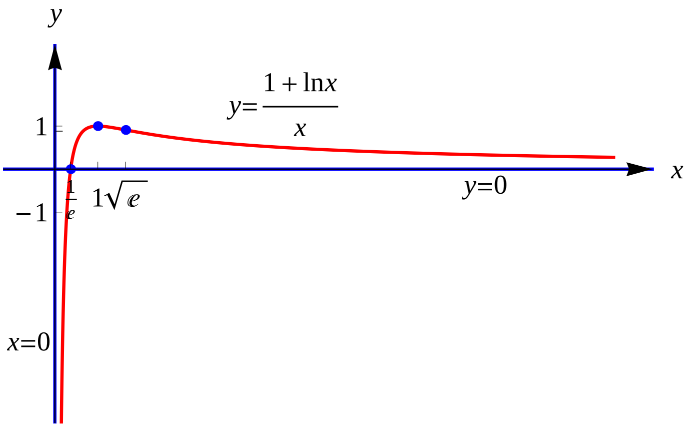
8. INFLEXIÓS PONTOK: Az f függvény második deriváltja

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 + (\ln x) \cdot (2x)}{x^4} = \frac{x(2\ln x - 1)}{x^4} = \frac{2\ln x - 1}{x^3}.$$

$f''(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $2\ln x - 1 = 0$, vagyis $x_3 = \sqrt{e}$ a lehetséges inflexiós pont.

9. KONVEXITÁS: $f''(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $2\ln x - 1 > 0$, azaz $x > \sqrt{e}$ esetén. $f''(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $2\ln x - 1 < 0$, azaz $0 < x < \sqrt{e}$ esetén. Ebből megállapíthatjuk, hogy az f függvény konvex az $(0, \sqrt{e})$ intervallumon, a $(\sqrt{e}, +\infty)$ intervallumon pedig konkáv. Mivel x_3-ban az f'' függvény előjelet vált, ezért ott az f függvénynek inflexiós pontja van és $f_{inf}(\sqrt{e}) = \dfrac{3}{2\sqrt{e}}$.

10. A FÜGGVÉNY GRAFIKONJA:



FELADATOK.

Vizsgáljuk ki a következő függvényeket és rajzoljuk le grafikonjaikat.

1. $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 4$

Megoldás.

1. ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY: $D_f = \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$, mert f polinomfüggvény.

2. PARITÁS: Mivel $f(-x) = 2(-x)^4 - 4(-x)^2 + 4 = 2x^4 - 4x^2 + 4 = f(x)$, ezért a függvény páros. Ez azt jelenti, hogy a függvény grafikonja tengelyesen szimmetrikus az y koordinátatengelyhez viszonyítva.

3. NULLAHELY: $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x^4 - 2x^2 + 2 = 0$. $x^2 = t$ behelyettesítés után kapjuk a $t^2 - 2t + 2 = 0$ másodfokú egyenletet, amelynek diszkriminánsa $D = 4 - 8 < 0$. Ebből következik, hogy se a másodfokú egyenletnek, se az eredeti negyedfokú egyenletnek nincs valós megoldása, tehát a függvény grafikonja nem metszi az x-tengelyt.

4. ELŐJEL: $f(x) > 0$, ha $x^4 - 2x^2 + 2 > 0$. Mivel ez a tulajdonság a teljes értelmezési tartományon teljesül, ezért az f függvény szigorúan pozitív az értelmezési tartomány minden pontjára.

5. ASZIMPTOTÁK: A függvénynek nincsenek aszimptotái, viszont

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(2x^4 - 4x^2 + 4\right) = +\infty.$$

6. SZÉLSŐÉRTÉKEK: Az első derivált $f'(x) = 2\left(4x^3 - 4x\right) = 8x\left(x^2 - 1\right)$.
$f'(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $(x+1)x(x-1) = 0$. A függvény stacionárius pontjai tehát $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ és $x_3 = 1$.

7. MONOTONITÁS: $f'(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $(x+1)x(x-1) > 0$, valamint $f'(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $(x+1)x(x-1) < 0$.

D_f	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

A mellékelt táblázat alapján a függvény szigorúan monoton növekvő a $(-1,0) \cup (1,\infty)$ intervallumon és szigorúan monoton csökkenő a $(-\infty,-1) \cup (0,1)$ intervallumon.

A táblázatból leolvashatjuk, hogy a monotonitási tulajdonság szerint az f függvénynek $x_1 = -1$-ben minimuma van, $x_2 = 0$-ban maximuma van és $x_3 = 1$-ben minimuma van. Számítással adódik, hogy a megfelelő függvényértékek:

$$f_{min}(-1) = f_{min}(1) = 2 \quad \text{és} \quad f_{max}(0) = 4.$$

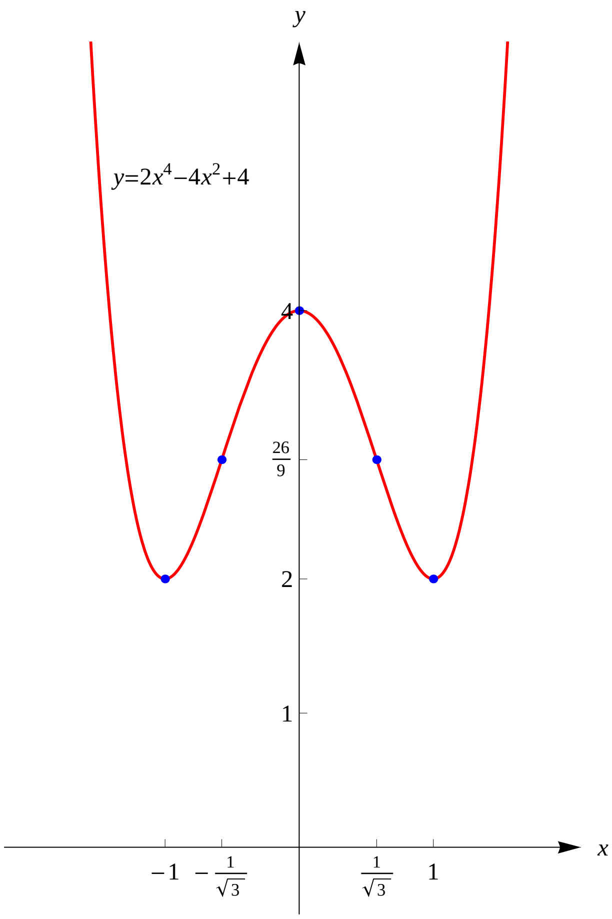
8. INFLEXIÓS PONTOK: Az f függvény második deriváltja $f''(x) = 8\left(3x^2 - 1\right)$.
$f''(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $3x^2 - 1 = 0$. A lehetséges inflexiós pontok tehát $x_4 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ és $x_5 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

9. KONVEXITÁS: $f''(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $3x^2 - 1 > 0$ teljesül, azaz $x < -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ és $x > \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ esetén. $f''(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $3x^2 - 1 < 0$, azaz $-\dfrac{\sqrt{3}}{3} < x < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ esetén. Ebből megállapíthatjuk, hogy a $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$ intervallumon az f függvény konvex, a $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ intervallumon pedig konkáv.

Mivel x_4-ben és x_5-ben az f'' függvény előjelet vált, ezért ott az f függvénynek inflexiós pontjai vannak. A megfelelő függvényértékek az inflexiós pontokban:

$$f_{inf}(x_4) = f_{inf}(x_5) = \frac{26}{9}.$$

10. A FÜGGVÉNY GRAFIKONJA:



2. $f(x) = \frac{1}{2}\left(0,3x^5 - 2,5x^3 + 6x\right)$

Megoldás.

1. ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY: $D_f = \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$.

2. PARITÁS: A függvény páratlan, mivel

$$f(-x) = \frac{1}{2}\left(0,3(-x)^5 - 2,5(-x)^3 + 6(-x)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-0,3x^5 + 2,5x^3 - 6x\right) = -\frac{1}{2}\left(0,3x^5 - 2,5x^3 + 6x\right) = -f(x).$$

3. NULLAHELY: $f(x) = \frac{1}{20}x\left(3x^4 - 25x^2 + 60\right)$, ezért $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x\left(3x^4 - 25x^2 + 60\right) = 0$. Mivel az $x^2 = t$ helyettesítés után kapott $3t^2 - 25t + 60$

másodfokú trinom mindig pozitív (mert diszkriminánsa $25^2 - 12 \cdot 60 = 625 - 720 < 0$ és főegyütthatója pozitív), ezért $x_1 = 0$ az egyetlen nullahely.

4. ELŐJEL: $f(x) > 0$ ha $x\left(3x^4 - 25x^2 + 60\right) > 0$, azaz $x > 0$ esetén, és $f(x) < 0$ ha $x\left(3x^4 - 25x^2 + 60\right) < 0$, vagyis $x < 0$ esetén.

5. ASZIMPTOTÁK: A függvénynek nincsenek aszimptotái, viszont

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{2}\left(0,3x^5 - 2,5x^3 + 6x\right) = \pm\infty.$$

6. SZÉLSŐÉRTÉKEK: Az első derivált

$$f'(x) = \frac{1}{20}\left(15x^4 - 75x^2 + 60\right) = \frac{3}{4}\left(x^4 - 5x^2 + 4\right) = \frac{3}{4}\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - 4\right).$$

$f'(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) = 0$, s eszerint az f függvény stacionárius pontjai $x_2 = -2$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$ és $x_5 = 2$.

7. MONOTONITÁS: $f'(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) > 0$, valamint $f'(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) < 0$.

D_f	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

A táblázatból látható, hogy a függvény szigorúan monoton növekvő a $(-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, \infty)$ intervallumon és szigorúan monoton csökkenő a $(-2, -1) \cup (1, 2)$ intervallumon.

A táblázatból leolvashatjuk, hogy a monotonitás alapján az f függvénynek $x_2 = -2$-ben maximuma van, $x_2 = -1$-ben minimuma van, $x_3 = 1$-ben maximuma van és $x_4 = 2$-ben minimuma van, valamint $f_{max}(-2) = -0,8$, $f_{min}(-1) = -1,7$, $f_{max}(1) = 1,7$ és $f_{min}(2) = 0,8$.

8. INFLEXIÓS PONTOK: Az f függvény második deriváltja

$$f''(x) = \frac{3}{4}\left(4x^3 - 10x\right) = \frac{3}{2}x\left(2x^2 - 5\right).$$

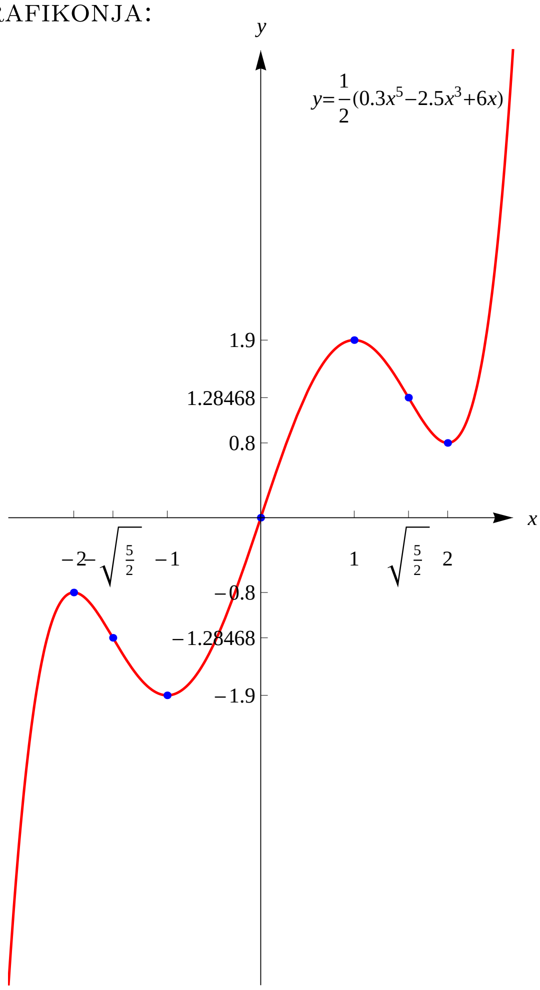
$f''(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x\left(2x^2 - 5\right) = 0$. Az egyenlet megoldásai, és egyben a lehetséges inflexiós pontok, $x_6 = -\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ és $x_7 = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

9. KONVEXITÁS: $f''(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $x\left(2x^2 - 5\right) > 0$, valamint $f''(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $x\left(2x^2 - 5\right) < 0$.

D_f	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}, 0\right)$	$\left(0, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \infty\right)$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$2x^2-5$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\bigcap$	$\bigcup$	$\bigcap$	$\bigcup$

A fenti táblázatból megállapíthatjuk, hogy a $\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \infty\right)$ intervallumon az f függvény konvex, a $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ intervallumon pedig konkáv. Mivel x_6-ban és x_7-ben az f'' függvény előjelet vált, ezért ott az f függvénynek inflexiós pontjai vannak és $f_{inf}(x_6) = -\frac{13\sqrt{10}}{2}$, illetve $f_{inf}(x_7) = \frac{13\sqrt{10}}{2}$.

10. A FÜGGVÉNY GRAFIKONJA:



3. $f(x) = \frac{4}{x} - x$

Megoldás.

1. ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY: A nevező nem lehet nulla, ezért az értelmezési tartomány $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

2. PARITÁS: Mivel $f(-x) = \frac{4}{-x} - (-x) = -\left(\frac{4}{x} - x\right) = -f(x)$, ezért a függvény páratlan, azaz a függvény grafikonja középpontosan szimmetrikus az origóra.

3. NULLAHELY: $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $\frac{4 - x^2}{x} = 0$, azaz $4 - x^2 = 0$. Ennek alapján az egyenlet megoldása és egyben a függvény nullahelyei $x_1 = -2$ és $x_2 = 2$.

4. ELŐJEL: $f(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{4-x^2}{x} > 0$ és $f(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{4-x^2}{x} < 0$.

D_f	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$4-x^2$	$-$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$

A mellékelt táblázatból látható, hogy a függvény pozitív a $(-\infty,-2)\cup(0,2)$ intervallumon és negatív a $(-2,0)\cup(2,\infty)$ intervallumon.

5. ASZIMPTOTÁK

a) FÜGGŐLEGES ASZIMPTOTA: Az $x=0$ egyenes függőleges aszimptota, mivel

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \frac{4-x^2}{x} = \frac{4-(+0)^2}{+0} = \frac{4}{+0} = +\infty$$

és

$$\lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{x\to-0} \frac{4-x^2}{x} = \frac{4-(-0)^2}{-0} = \frac{4}{-0} = -\infty.$$

b) VÍZSZINTES ASZIMPTOTA: Vízszintes aszimptota nincs, mert

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{4}{x} - x\right) = \mp\infty.$$

c) FERDE ASZIMPTOTA: Ha $y = kx+n$ alakban keresünk ferde aszimptotát, akkor

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4-x^2}{x^2} = -1$$

és

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{4-x^2}{x} + x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{4}{x}\right) = 0,$$

tehát a függvénynek $y=-x$ ferde aszimptotája.

6. SZÉLSŐÉRTÉKEK: Az első derivált $f'(x) = \dfrac{-2x\cdot x-(4-x^2)}{x^2} = -\dfrac{x^2+4}{x^2} \neq 0$. Mivel az f' függvénynek nincs nullahelye, ezért az f függvénynek nincs stacionárius pontja és így szélsőértéke sem.

7. MONOTONITÁS: $f'(x) = -\dfrac{x^2+4}{x^2} < 0$ minden $x \in D_f$ esetén, ezért a függvény értelmezési tartományának minden pontjában szigorúan monoton csökkenő.

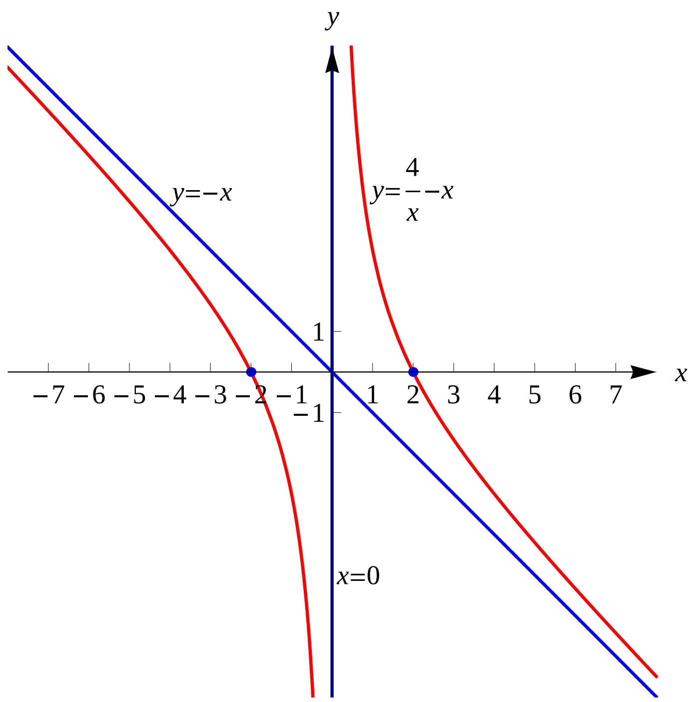
8. INFLEXIÓS PONTOK: Az f függvény második deriváltja

$$f''(x) = -\frac{2x\cdot x^2-(x^2+4)\cdot 2x}{x^4} = -\frac{x\cdot(2x^2-2x^2-8)}{x\cdot x^3} = \frac{8}{x^3} \neq 0.$$

Mivel az f'' függvénynek nincs nullahelye, ezért az f függvénynek nincs inflexiós pontja.

9. KONVEXITÁS: $f''(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{8}{x^3} > 0$, azaz $x > 0$ esetén, valamint $f''(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{8}{x^3} < 0$, azaz $x < 0$ esetén. Ez azt jelenti, hogy a $(-\infty, 0)$ intervallumon az f függvény konkáv, a $(0, \infty)$ intervallumon pedig konvex.

10. A FÜGGVÉNY GRAFIKONJA:



4. $f(x) = \dfrac{x^2}{(x+1)^2}$

Megoldás.

1. ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY: Mivel $x + 1 = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x = -1$, és a nevező nem lehet nulla, ezért $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.

2. PARITÁS: Az értelmezési tartomány nem szimmetrikus az origóra, tehát a függvény se nem páros, se nem páratlan.

3. NULLAHELY: $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{x^2}{(x+1)^2} = 0$, vagyis $x^2 = 0$ esetén. Eszerint $x_1 = 0$ a függvény nullahelye.

4. ELŐJEL: $f(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{x^2}{(x+1)^2} > 0$, azaz minden $x \in D_f$ esetén, tehát az f függvény pozitív a teljes értelmezési tartományon.

5. ASZIMPTOTÁK

a) FÜGGŐLEGES ASZIMPTOTA: $x = -1$ függőleges aszimptota, mert

$$\lim_{x \to -1 \pm 0} f(x) = \lim_{x \to -1 \pm 0} \frac{x^2}{(x+1)^2} = \frac{(-1 \pm 0)^2}{(-1 \pm 0 + 1)^2} = \frac{1}{+0} = +\infty.$$

b) VÍZSZINTES ASZIMPTOTA: $y = 1$ vízszintes aszimptota, mert

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{(x+1)^2} = 1.$$

c) FERDE ASZIMPTOTA: A vízszintes aszimptota létezése miatt ferde aszimptota nincs.

6. SZÉLSŐÉRTÉKEK: Az első derivált

$$f'(x) = \frac{2x(x+1)^2 - x^2 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2x(x+1) - 2x^2}{(x+1)^3} = \frac{2x}{(x+1)^3}.$$

$f'(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{2x}{(x+1)^3} = 0$, vagyis, ha $2x = 0$. Eszerint az f függvény nullahelye $x_1 = 0$, és ez egyben stacionárius pont is.

7. MONOTONITÁS: $f'(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{2x}{(x+1)^3} > 0$, azaz ha $x(x+1) > 0$, valamint $f'(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{2x}{(x+1)^3} < 0$, azaz akkor és csakis akkor, ha $x(x+1) < 0$. Az $y = x(x+1)$ parabola $x = -1$-ben és $x = 0$-ban metszi az x-tengelyt, s mivel minimuma van, pozitív $x < -1$ és $x > 0$ esetén, illetve negatív $-1 < x < 0$ esetén. Ez azt jelenti, hogy az f függvény szigorúan monoton növekvő a $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ intervallumon és szigorúan monoton csökkenő a $(-1, 0)$ intervallumon. A monotonitási tulajdonságból következik, hogy $x_1 = 0$ pontban a függvénynek minimuma van, így a megfelelő függvényérték

$$f_{min}(0) = 0.$$

8. INFLEXIÓS PONTOK: Az f függvény második deriváltja

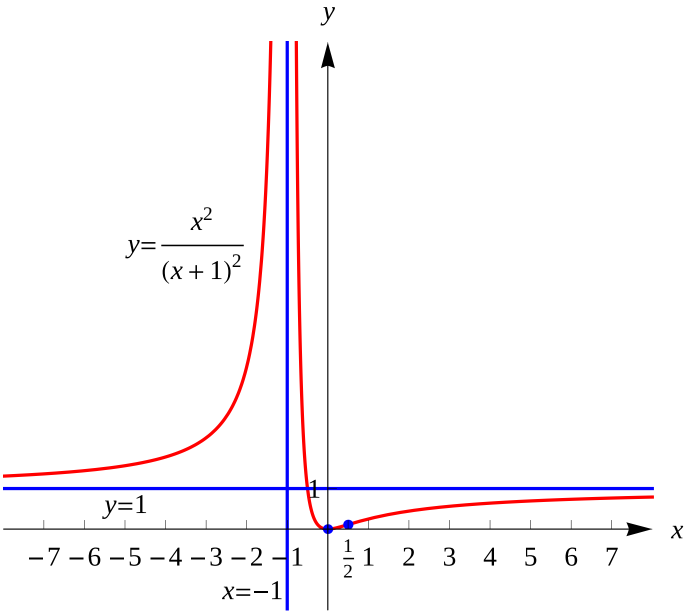
$$f''(x) = \frac{2(x+1)^3 - 2x \cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{2(x+1) - 6x}{(x+1)^4} = \frac{2 - 4x}{(x+1)^4} = \frac{2(1-2x)}{(x+1)^4}.$$

$f''(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{2(1-2x)}{(x+1)^4} = 0$, azaz $1 - 2x = 0$, illetve $x_2 = \dfrac{1}{2}$ esetén. Ezért x_2 lehetséges inflexiós pont.

9. KONVEXITÁS: $f''(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{2(1-2x)}{(x+1)^4} > 0$, azaz akkor és csakis akkor, ha $1 - 2x > 0$, illetve $x < \dfrac{1}{2}$ esetén. $f''(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{2(1-2x)}{(x+1)^4} < 0$, azaz akkor és csakis akkor, ha $1 - 2x < 0$, illetve $x > \dfrac{1}{2}$ esetén. Ezért az f függvény konvex a $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$ intervallumon és konkáv az $\left(\dfrac{1}{2}, \infty\right)$ intervallumon. Mivel az f'' függvény $x_2 = \dfrac{1}{2}$-ben előjelet vált, ezért $x_2 = \dfrac{1}{2}$ az f függvény inflexiós pontja, a megfelelő függvényérték pedig

$$f_{inf}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{9}.$$

10. A FÜGGVÉNY GRAFIKONJA:



5. $f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$

Megoldás.

1. ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY: $D_f = \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$.

2. PARITÁS: A függvény páros, mert

$$f(-x) = \sqrt[3]{1-(-x)^2} = \sqrt[3]{1-x^2} = f(x).$$

3. NULLAHELY: $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $\sqrt[3]{1-x^2} = 0$, azaz ha $1-x^2 = 0$. Az egyenlet megoldása és egyben az f függvény nullahelyei $x_1 = -1$ és $x_2 = 1$.

4. ELŐJEL: $f(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $\sqrt[3]{1-x^2} > 0$, azaz $1-x^2 > 0$, valamint $f(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $\sqrt[3]{1-x^2} < 0$, azaz $1-x^2 < 0$. Az $y = 1-x^2$ parabola $x = -1$-ben és $x = 1$-ben metszi az x-tengelyt, s mivel maximuma van, pozitív $-1 < x < 1$ esetén, negatív $x < -1$ és $x > 1$ esetén.

5. ASZIMPTOTÁK: A függvénynek nincs semmilyen aszimptotája, viszont

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{1-x^2} = -\infty.$$

6. SZÉLSŐÉRTÉKEK: Az első derivált $f'(x) = \dfrac{-2x}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$. $f'(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $-2x = 0$, tehát $x_3 = 0$ a stacionárius pont. Vegyük észre, hogy az f' deriváltfüggvény nem értelmezett az a D_f értelmezési tartomány $x = 1$ és $x = -1$ pontjaiban.

7. MONOTONITÁS: $f'(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{-2x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} > 0$, azaz ha $x < 0$, valamint $f'(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{-2x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} < 0$, azaz ha $x > 0$.

Eszerint az f függvény szigorúan monoton növekvő a $(-\infty, 0)$ intervallumon és szigorúan monoton csökkenő a $(0, \infty)$ intervallumon. A monotonitási tulajdonságból következik, hogy $x_3 = 0$-ban a függvénynek maximuma van és $f_{max}(0) = 1$.

8. INFLEXIÓS PONTOK: Az f függvény második deriváltja

$$f''(x) = -\frac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{(1-x^2)^2} - x \cdot \frac{2(-2x)}{3\sqrt[3]{1-x^2}}}{\sqrt[3]{(1-x^2)^4}} \cdot \frac{3\sqrt[3]{1-x^2}}{3\sqrt[3]{1-x^2}} =$$

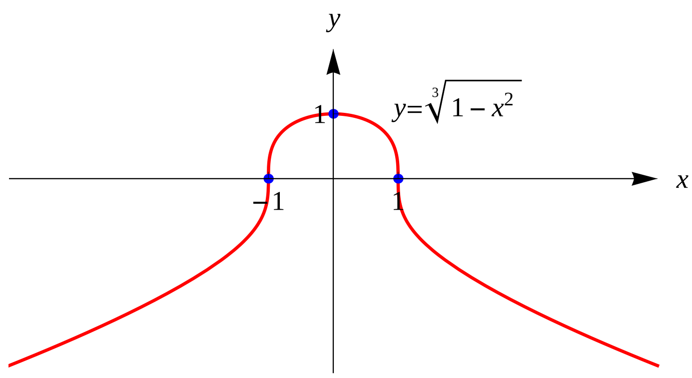
$$= -\frac{2}{3}\frac{3(1-x^2)+4x^2}{3(1-x^2)\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} = -\frac{2}{9}\frac{3+x^2}{(1-x^2)\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} = -\frac{2}{9}\frac{(3+x^2)\sqrt[3]{1-x^2}}{(1-x^2)^2}.$$

$f''(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $1 - x^2 = 0$, azaz a nullahelyekben, de ezekben a pontokban sem az f' függvény, sem az f'' függvény nem értelmezett.

9. KONVEXITÁS: $f''(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $1 - x^2 < 0$, azaz $x < -1$ és $x > 1$ esetén. $f''(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $1 - x^2 < 0$, azaz $-1 < x < 1$ esetén. Ezért az f függvény konvex a $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ intervallumon és konkáv a $(-1, 1)$ intervallumon.

Mivel az f'' függvény $x_1 = -1$ és $x_2 = 1$ pontokban előjelet vált, ezért itt az f függvénynek olyan inflexiós pontjai vannak, amelyekben a az f függvény nem differenciálható, azaz az f függvény grafikonjához nem húzható érintő. Ugyanakkor $f_{inf}(-1) = f_{inf}(1) = 0$

10. A FÜGGVÉNY GRAFIKONJA:



6. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Megoldás.

1. ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY: $D_f = \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$.

2. PARITÁS: A függvény páratlan, mert

$$f(-x) = \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2+1}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = -f(x).$$

3. NULLAHELY: $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 0$, tehát $x_1 = 0$ a függvény nullahelye.

4. ELŐJEL: $f(x) > 0$ ha $x > 0$, illetve $f(x) < 0$ ha $x < 0$.

5. ASZIMPTOTÁK

a) FÜGGŐLEGES ASZIMPTOTA: Nincs, mert a függvény minden valós számra értelmezett.

b) VÍZSZINTES ASZIMPTOTA: $y = 1$ és $y = -1$ vízszintes aszimptota, mert

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$$

és

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1.$$

c) FERDE ASZIMPTOTA: Nincs, mert van vízszintes aszimptota.

6. SZÉLSŐÉRTÉKEK: Az első derivált

$$f'(x) = \frac{1\cdot\sqrt{x^2+1} - x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

Mivel $f'(x) \neq 0$, az f függvénynek nincs stacionárius pontja, tehát szélsőértéke sem.

7. MONOTONITÁS: $f'(x) > 0$ minden $x \in D_f$ esetén, ezért az f függvény szigorúan monoton növekvő a teljes értelmezési tartományon.

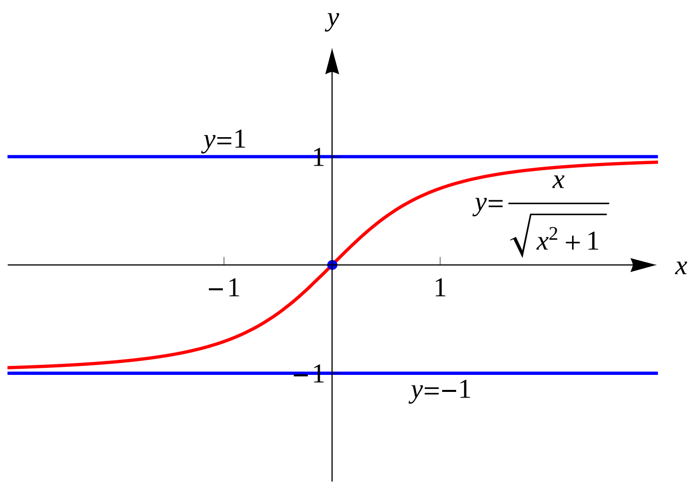
8. INFLEXIÓS PONTOK: Az f függvény második deriváltja

$$f''(x) = \left(\left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}\right)' = -\frac{3}{2}\left(x^2+1\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x = \frac{-3x}{(x^2+1)^2\sqrt{x^2+1}}.$$

$f''(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $-3x = 0$, tehát $x_1 = 0$ az f függvény lehetséges inflexiós pontja.

9. KONVEXITÁS: $f''(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $x < 0$, valamint $f''(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $x > 0$. Ezek szerint az f függvény konvex a $(-\infty, 0)$ intervallumon és konkáv a $(0, \infty)$ intervallumon.

10. A FÜGGVÉNY GRAFIKONJA:



7. $f(x) = x^2 e^{-x^2} = \dfrac{x^2}{e^{x^2}}$

Megoldás.

1. ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY: $D_f = \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$.

2. PARITÁS: A függvény páros, mert $f(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)^2} = x^2 e^{-x^2} = f(x)$.

3. NULLAHELY: $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x^2 e^{-x^2} = 0$, tehát $x_1 = 0$ az egyetlen nullahely.

4. ELŐJEL: $f(x) \geq 0$ ha $x \in D_f$.

5. ASZIMPTOTÁK

a) FÜGGŐLEGES ASZIMPTOTA: Nincs, mert a függvény minden valós számra értelmezett.

b) VÍZSZINTES ASZIMPTOTA: $y = 0$ vízszintes aszimptota, mert

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0.$$

c) FERDE ASZIMPTOTA: Nincs, mert van vízszintes aszimptota.

6. SZÉLSŐÉRTÉKEK: Az első derivált

$$f'(x) = \left(x^2 e^{-x^2}\right)' = 2xe^{-x^2} + x^2(-2x)e^{-x^2} = 2x\left(1 - x^2\right)e^{-x^2}.$$

$f'(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x(1-x)(1+x) = 0$, tehát $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ és $x_3 = 1$ a stacionárius pontok.

7. MONOTONITÁS: $f'(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $x(1-x)(1+x) > 0$, illetve $f'(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $x(1-x)(1+x) < 0$.

D_f	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$1+x$	$-$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	$+$	$-$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

A mellékelt táblázatból leolvasható, hogy a függvény szigorúan monoton növekvő a $(-\infty,-1) \cup (0,1)$ intervallumon és szigorúan monoton csökkenő a $(-1,0) \cup (1,\infty)$ intervallumon.

A táblázatból láthatjuk azt is, hogy a monotonitás alapján az f függvénynek $x_1 = 0$-ban minimuma van, $x_2 = -1$-ben és $x_3 = 1$-ben pedig maximuma van, a megfelelő függvényértékek pedig

$$f_{min}(0) = 0 \quad \text{és} \quad f_{max}(-1) = f_{max}(1) = e^{-1}.$$

8. INFLEXIÓS PONTOK: Az f függvény második deriváltja

$$f''(x) = \left(\left(2x - 2x^3\right)e^{-x^2}\right)' = \left(2 - 6x^2\right)e^{-x^2} - 2x\left(2x - 2x^3\right)e^{-x^2} =$$

$$= \left(2 - 10x^2 + 4x^4\right)e^{-x^2} = 2\left(1 - 5x^2 + 2x^4\right)e^{-x^2}.$$

$f''(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $2x^4 - 5x^2 + 1 = 0$. $x^2 = t$ behelyettesítés után kapjuk a $2t^2 - 5t + 1 = 0$ másodfokú egyenletet, amelynek megoldásai

$$t_1 = \frac{5+\sqrt{17}}{4} \approx 2,28 \quad \text{és} \quad t_2 = \frac{5-\sqrt{17}}{4} \approx 0,22.$$

A visszahelyettesítés után azt kapjuk, hogy a lehetséges inflexiós pontok

$$x_4 = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{4}} \approx -1,51, \quad x_5 = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{4}} \approx -0,47,$$

$$x_6 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{4}} \approx 0,47, \quad x_7 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{4}} \approx 1,51.$$

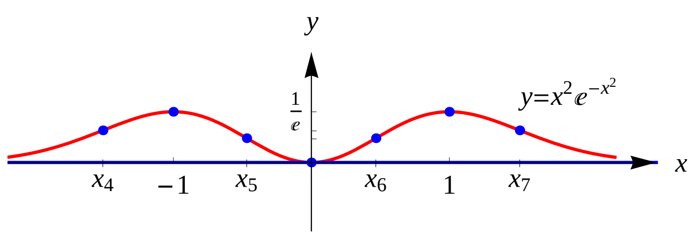
9. KONVEXITÁS: $f''(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $2x^4 - 5x^2 + 1 > 0$, illetve $f''(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $2x^4 - 5x^2 + 1 < 0$. Készítsünk táblázatot, felhasználva az előbbi jelöléseket.

D_f	$(-\infty, x_4)$	(x_4, x_5)	(x_5, x_6)	(x_6, x_7)	(x_7, ∞)
$x^2 - t_1$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x^2 - t_2$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\bigcup$	$\bigcap$	$\bigcup$	$\bigcap$	$\bigcup$

A táblázatból megállapíthatjuk, hogy a $(-\infty, x_4) \cup (x_5, x_6) \cup (x_7, \infty)$ intervallumon az f függvény konvex, az $(x_4, x_5) \cup (x_6, x_7)$ intervallumon pedig konkáv. Mivel x_4-ben, x_5-ben, x_6-ban és x_7-ben az f'' függvény előjelet vált, ezért ott az f függvénynek inflexiós pontjai vannak. Egyszerű helyettesítéssel kiszámítható, hogy

$$f_{inf}(x_4) = f_{inf}(x_7) \approx 0,23 \quad \text{és} \quad f_{inf}(x_5) = f_{inf}(x_6) \approx 0,18.$$

10. A FÜGGVÉNY GRAFIKONJA:



8. $f(x) = \left(x - \frac{1}{5}\right) e^{\frac{1}{x}}$

Megoldás.

1. ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY: Mivel az exponenciális függvény kitevőjében levő nevező nem lehet nulla, ezért $x \neq 0$, s így $D_f = R \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

2. PARITÁS: A függvény se nem páros, se nem páratlan, mivel

$$f(-x) = \left(-x - \frac{1}{5}\right) e^{\frac{1}{-x}} = \left(-x - \frac{1}{5}\right) e^{-\frac{1}{x}} \neq \pm f(x).$$

3. NULLAHELY: $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x - \frac{1}{5} = 0$, tehát $x_1 = \frac{1}{5}$ a függvény nullahelye.

4. ELŐJEL: Mivel az exponenciális függvény mindig pozitív, ezért $f(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $x - \frac{1}{5} > 0$, és $f(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $x - \frac{1}{5} < 0$. Az f függvény tehát pozitív $x > \frac{1}{5}$ esetén és negatív $x < \frac{1}{5}$ esetén.

5. ASZIMPTOTÁK

a) FÜGGŐLEGES ASZIMPTOTA: Az $x = 0$ egyenes csak egyoldali függőleges aszimptota, mert

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} \left(x - \frac{1}{5}\right) e^{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{5} \cdot e^{-\infty} = -\frac{1}{5} \cdot 0 = 0,$$

tehát balról nézve nem függőleges aszimptota, viszont jobbról nézve igen, mert

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} \left(x - \frac{1}{5}\right) e^{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{5} \cdot e^{+\infty} = -\infty.$$

b) VÍZSZINTES ASZIMPTOTA: Nincs, mert

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(x - \frac{1}{5}\right) e^{\frac{1}{x}} = \pm\infty.$$

c) FERDE ASZIMPTOTA: Ha $y = kx + n$ alakban keresünk ferde aszimptotát, akkor

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x - \frac{1}{5}}{x} e^{\frac{1}{x}} = 1,$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\left(x - \frac{1}{5}\right) e^{\frac{1}{x}} - x\right) =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) - \frac{1}{5} \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} - \frac{1}{5} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{5} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{5} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

Az $y = x + \frac{4}{5}$ egyenes az f függvény ferde aszimptotája.

6. SZÉLSŐÉRTÉKEK: Az első derivált

$$f'(x) = \left(\frac{5x - 1}{5} e^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(1 - \frac{1}{5x^2}(5x - 1)\right) e^{\frac{1}{x}} = \frac{5x^2 - 5x + 1}{5x^2} e^{\frac{1}{x}}.$$

$f'(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $5x^2 - 5x + 1 = 0$, tehát az f függvény stacionárius pontjai $x_2 = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}$ és $x_3 = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$.

7. MONOTONITÁS: $f'(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $5x^2 - 5x + 1 > 0$, valamint $f'(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $5x^2 - 5x + 1 < 0$. Az f függvény eszerint szigorúan monoton növekvő a $(-\infty, 0) \cup (0, x_2) \cup (x_3, \infty)$ intervallumon és szigorúan monoton csökkenő az (x_2, x_3) intervallumon.

8. INFLEXIÓS PONTOK: Az f függvény második deriváltja

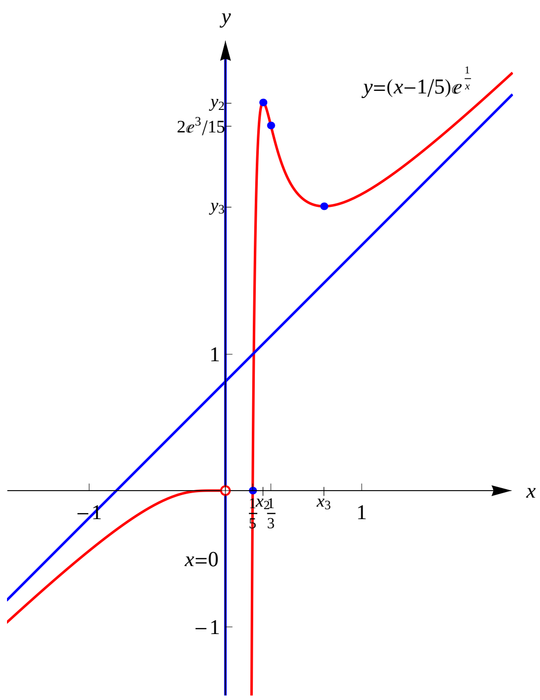
$$f''(x) = \left(\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{5x^2}\right) e^{\frac{1}{x}}\right)' =$$

$$= \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{5x^3}\right) e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{5x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} = \frac{3x-1}{5x^4} e^{\frac{1}{x}}.$$

$f''(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $3x - 1 = 0$, azaz $x_4 = \dfrac{1}{3}$ a lehetséges inflexiós pont.

9. KONVEXITÁS: $f''(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $3x - 1 > 0$, azaz ha $x > \dfrac{1}{3}$, valamint $f''(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $3x - 1 < 0$, azaz ha $x < \dfrac{1}{3}$. Az f függvény tehát konvex a $\left(\dfrac{1}{3}, \infty\right)$ intervallumon és konkáv a $\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right)$ intervallumon. $x_4 = \dfrac{1}{3}$-ban az f'' második deriváltfüggvény előjelet vált, így ez a pont az f függvény inflexiós pontja és $f_{inf}\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2e^3}{3}$.

10. A FÜGGVÉNY GRAFIKONJA:



9. $f(x) = \ln \dfrac{x+1}{x-1}$

Megoldás.

1. ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY: A logaritmus függvény csak pozitív értékekre értelmezett, tehát $\dfrac{x+1}{x-1} > 0$ kell teljesüljön.

D_f	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{x+1}{x-1}$	$+$	$-$	$+$

A mellékelt táblázatból leolvasható, hogy a megoldáshalmaz $x < -1$ és $x > 1$. Ez azt jelenti, hogy

$$D_f = (-\infty,-1) \cup (1,\infty).$$

2. PARITÁS: A függvény páratlan, mert

$$f(-x) = \ln \frac{-x+1}{-x-1} = \ln \frac{x-1}{x+1} = \ln \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-1} = -\ln \frac{x+1}{x-1} = -f(x).$$

3. NULLAHELY: $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{x+1}{x-1} = 1$, azaz $\dfrac{2}{x-1} = 0$. A kapott egyenletnek nincs megoldása, így a függvénynek nincs nullahelye.

4. ELŐJEL: $f(x) > 0$ ha $\dfrac{x+1}{x-1} > 1$, azaz $\dfrac{2}{x-1} > 0$, illetve $f(x) < 0$ ha $\dfrac{x+1}{x-1} < 1$, azaz $\dfrac{2}{x-1} < 0$. A függvény előjele tehát $x-1$ előjelétől függ, így az f függvény akkor pozitív, ha $x > 1$ és akkor negatív, ha $x < -1$.

5. ASZIMPTOTÁK

a) FÜGGŐLEGES ASZIMPTOTA: $x = -1$ balról nézve, $x = 1$ pedig jobbról nézve függőleges aszimptotája a függvénynek, mert

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0} \ln \frac{x+1}{x-1} = \ln \frac{-1-0+1}{-1-0-1} = \ln \frac{-0}{-2-0} = \ln \frac{0}{2+0} = -\infty$$

és

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \ln \frac{x+1}{x-1} = \ln \frac{1+0+1}{1+0-1} = \ln \frac{2+0}{+0} = +\infty.$$

b) VÍZSZINTES ASZIMPTOTA: $y = 0$ vízszintes aszimptota, mert

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \ln \frac{x+1}{x-1} = \ln \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{x-1} = \ln 1 = 0.$$

c) FERDE ASZIMPTOTA: Nincs, mert van vízszintes aszimptota.

6. SZÉLSŐÉRTÉKEK: Az első derivált

$$f'(x) = \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{1\cdot(x-1) - 1\cdot(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{x^2-1} = \frac{2}{1-x^2} \neq 0.$$

Az f' függvénynek nincs nullahelye, így az f függvénynek nincs stacionárius pontja.

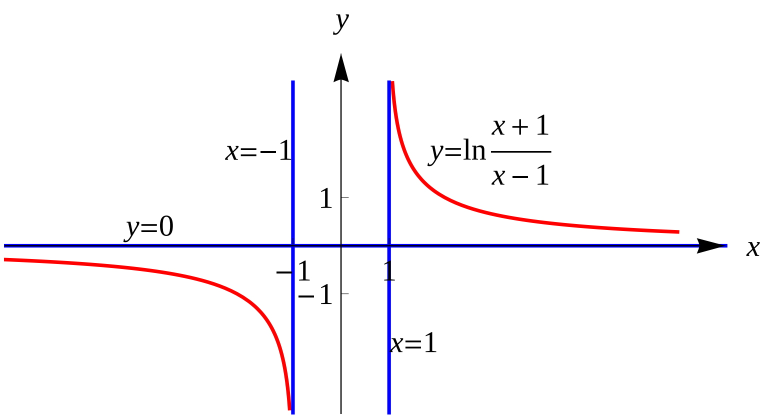
7. MONOTONITÁS: $f'(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $1 - x^2 < 0$. Mivel ez a tulajdonság a teljes értelmezési tartományon teljesül, így az f függvény mindehol szigorúan monoton csökkenő.

8. INFLEXIÓS PONTOK: A második derivált $f''(x) = \dfrac{-2 \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = \dfrac{4x}{(1-x^2)^2}$.

$f''(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $4x = 0$, azaz $x = 0$, de ez a pont nincs benne az f függvény értelmezési tartományában, tehát a függvénynek nincs inflexiós pontja.

9. KONVEXITÁS: $f''(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $4x > 0$, illetve $f''(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $4x < 0$. Ez azt jelenti, hogy az f'' függvény pozitív $x > 0$ esetén, és negatív $x < 0$ esetén, vagyis az f függvény konvex az $(1, \infty)$ intervallumon és konkáv a $(-\infty, -1)$ intervallumon.

10. A FÜGGVÉNY GRAFIKONJA:



10. $f(x) = x \ln^2 x = x (\ln x)^2$

Megoldás.

1. ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY: A logaritmus függvény csak pozitív értékekre értelmezett, tehát $D_f = (0, \infty)$.

2. PARITÁS: A függvény se nem páros se nem páratlan, mert a függvény értelmezési tartománya nem szimmetrikus az origóra.

3. NULLAHELY: $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $\ln x = 0$, azaz $x_1 = 1$ az egyetlen nullahely, hiszen $x = 0$ lenne a másik, de az nem eleme az értelmezési tartománynak.

4. ELŐJEL: $f(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $x (\ln x)^2 > 0$, ez pedig teljesül az értelmezési tartomány minden pontjára.

5. ASZIMPTOTÁK: A függvénynek se függőleges, se vízszintes, se ferde aszimptotája nincs, viszont

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x (\ln x)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} x (\ln x)^2 = \lim_{x\to 0+0} \frac{(\ln x)^2}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{2}{x}\ln x}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{2\ln x}{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+0} 2x = +0.$$

6. SZÉLSŐÉRTÉKEK: Az első derivált $f'(x) = (\ln x)^2 + x \cdot \frac{2}{x} \ln x = \ln x\,(\ln x + 2)$.

$f'(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $\ln x\,(\ln x + 2) = 0$. A kapott egyenlet megoldásai $x_1 = 1$ és $x_2 = e^{-2}$ a lehetséges stacionárius pontok.

7. MONOTONITÁS: $f'(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $\ln x\,(\ln x + 2) > 0$, ugyanakkor $f'(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $\ln x\,(\ln x + 2) < 0$.

D_f	$(0, e^{-2})$	$(e^{-2}, 1)$	$(1, \infty)$
$\ln x$	$-$	$-$	$+$
$\ln x + 2$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

A mellékelt táblázatból leolvashatjuk a következőket: a függvény szigorúan monoton növekvő a $(0, e^{-2}) \cup (1, \infty)$ intervallumon és szigorúan monoton csökkenő az $(e^{-2}, 1)$ intervallumon.

A táblázatból láthatjuk azt is, hogy a monotonitás alapján az f függvénynek $x_1 = 1$-ben minimuma van, $x_2 = e^{-2}$-ban pedig maximuma van. Számítással kapjuk, hogy $f_{min}(1) = 0$ és $f_{max}\left(e^{-2}\right) = 4e^{-2}$.

8. INFLEXIÓS PONTOK: Az f függvény második deriváltja

$$f''(x) = \frac{2}{x} \ln x + \frac{2}{x} = \frac{2}{x} (\ln x + 1)\,.$$

$f''(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $\ln x + 1 = 0$, azaz $x_3 = e^{-1}$ a lehetséges inflexiós pont.

9. KONVEXITÁS: $f''(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $\ln x + 1 > 0$, illetve $f''(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $\ln x + 1 < 0$. Eszerint az f függvény konvex az $\left(e^{-1}, \infty\right)$ intervallumon, az f függvény pedig konkáv a $\left(-\infty, e^{-1}\right)$ intervallumon. Eszerint $x_3 = e^{-1}$ a függvény inflexiós pontja és $f_{inf}(e^{-1}) = e^{-1}$.

10. A FÜGGVÉNY GRAFIKONJA: