3. Egyváltozós valós függvények

3.1. Valós függvényekkel kapcsolatos alapfogalmak

3.1.1. A függvények megadása

Az első fejezetben általánosan értelmeztük a függvényt. Most csak olyan függvényekkel foglalkozunk, amelyeknek értelmezési tartománya és képtartománya is valós számokból áll. Az ilyen $f : A \subset \mathbf{R} \to B \subset \mathbf{R}$ függvényeket egyváltozós valós függvényeknek nevezzük, s a latin vagy a görög ábécé betűivel jelöljük, például: f, g, h,..., φ, ψ, ϑ stb.
Az A halmazt az f függvény *értelmezési tartományának (domenjének)* nevezzük és D_f-fel jelöljük, míg a B halmazt az f függvény *értékkészletének (kodomenjének)* nevezzük és R_f-fel jelöljük. Valós függvényeknél általában a független változó jelölésére az x, a függő változó jelölésére az y betűt használjuk, de ha szükséges, akkor más betűket is használhatunk. A függvény jelölésénél sokszor az $y = f(x)$ szimbólumot használjuk, ami azt jelenti, hogy *y valamilyen függvénye x-nek.*
Ha $x_0 \in D_f$, akkor az f függvény x_0 ponthoz rendelt értékét $f(x_0)$-lal jelöljük, és az f függvény x_0 pontban felvett *helyettesítési értékének* nevezzük. Ha $f(x_0) = 0$, akkor x_0 az f függvény *zérushelye* vagy *nullahelye.*
A valós függvény megadásához nem elég csak az értelmezési tartományt és az értékkészletet megadni, azt is tudnunk kell, hogyan találhatjuk meg a független változó egyes értékeihez tartozó függvényértéket, vagyis ismernünk kell a *hozzárendelési törvényt.* A hozzárendelési törvény megadása sokféleképpen történhet. A függvény hozzárendelési törvényét például megadhatjuk *táblázattal.* Ez abban áll, hogy kiírjuk a független változó számos értékét, s melléírjuk a nekik megfelelő függvényértéket. A függvények táblázattal való megadásának fő hiányossága a nagy terjedelem és a szemléletesség hiánya, de ettől függetlenül igen elterjedt megadási mód a természettudományokban és a műszaki tudományokban.
A függvény megadásának legfontosabb módja a *képlettel* (*formulával*) való megadás. Ekkor megadunk egy olyan képletet, amely az x független változón kívül csupa adott számot tartalmaz. Ha képlettel adjuk meg a függvényt, akkor az értelmezési tartományt mindazok a valós számok alkotják, amelyre a képletben szereplő műveletek mindegyike elvégezhető és a képlet valós értéket vesz fel.
Adott f és g valós függvényekből képzett összetett függvények értelmezési tartományának meghatározásakor figyelembe kell venni a következőket:

1. $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ esetén $g(x) \neq 0$.

2. $y = \sqrt[2n]{f(x)}$ esetén $f(x) \geq 0$ $(n \in \mathbf{N})$.

3. $y = \log_a f(x)$ esetén $f(x) > 0$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

4. $y = \operatorname{tg} f(x)$ esetén $f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $(k \in \mathbf{Z})$.

5. $y = \operatorname{ctg} f(x)$ esetén $f(x) \neq k\pi$, $(k \in \mathbf{Z})$.

6. $y = \arcsin f(x)$ és $y = \arccos f(x)$ esetén $-1 \leq f(x) \leq 1$.

3.1. Példa. Az $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3-4x^2}$ függvény racionális törtfüggvény, ezért a nevezője nem lehet nulla. Keressük meg tehát a nevező nullahelyeit és zárjuk ki azokat az értelmezési tartományból. $x^3 - 4x^2 = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x(x-2)(x+2) = 0$, innen pedig megkapjuk, hogy a nevező nulla, ha $x = 0$, vagy ha $x = 2$, vagy ha $x = -2$. Ezért az értelmezési tartomány $D_f = R \setminus \{-2, 0, 2\}$, vagy más felírásban

$$D_f = (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 2) \cup (2, \infty).$$

3.2. Példa. Az $f(x) = \sqrt{x^2-16}$ függvény páros gyökkitevőjű irracionális függvény, ezért a gyök alatti mennyiség nem lehet negatív, vagyis teljesülnie kell az $x^2 - 16 \geq 0$, illetve $(x-4)(x+4) \geq 0$ egyenlőtlenségnek. Oldjuk meg táblázattal ezt a másodfokú egyenlőtlenséget.

D_f	$(-\infty, -4)$	$(-4, 4)$	$(4, \infty)$
$x-4$	$-$	$-$	$+$
$x+4$	$-$	$+$	$+$
x^2-16	$+$	$-$	$+$

A táblázatból kiolvashatjuk, hogy az f függvény csak a $(-4, 4)$ intervallumon negatív, tehát

$$D_f = (-\infty, -4] \cup [4, \infty).$$

3.3. Példa. Mivel minden logaritmusfüggvény csak pozitív értékekre értelmezett, ezért az $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-4x+3}\right)$ függvény csak akkor értelmezett, ha az $\dfrac{x^2+1}{x^2-4x+3} > 0$ egyenlőtlenség teljesül. Mivel $x^2 + 1 > 0$ minden valós számra, ezért a törtfüggvény előjele csak a nevezőtől függ. Bontsuk tényezőkre a nevezőt és oldjuk meg táblázattal az így kapott $(x-1)(x-3) > 0$ egyenlőtlenséget.

D_f	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
x^2-4x+3	$+$	$-$	$+$

A táblázatból kiolvashatjuk, hogy az f függvény csak az $[1, 3]$ intervallumon nempozitív, tehát

$$D_f = (-\infty, 1) \cup (3, \infty).$$

3.4. Példa. Az $f(x) = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$ függvény nem értelmezett azokban a pontokban, ahol

$$\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z},$$

illetve $x \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. A keresett értelmezési tartomány tehát

$$D_f = R \setminus \{(2k+1)\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

3.5. Példa. Az $f(x) = \arcsin \dfrac{6x}{x^2+9}$ függvény csak akkor értelmezett, ha a

$$-1 \leq \frac{6x}{x^2+9} \leq 1$$

egyenlőtlenségrendszer teljesül. Mivel a $\dfrac{6x}{x^2+9}$ nevezője minden valós számra pozitív, ezért mindkét egyenlőtlenséget szorozhatjuk x^2+9-cel. Ekkor $-x^2-9<6x<x^2+9$, azaz a

$$-x^2-9 \le 6x \quad \text{és} \quad 6x \le x^2+9$$

egyenlőtlenségeknek kell teljesülniük, azaz megoldáshalmazaik metszete adja az f függvény értelmezési tartományát. Mivel a fenti egyenlőtlenségrendszer ekvivalens az

$$-x^2-6x-9 \le 0 \quad \text{és} \quad x^2-6x+9 \ge 0,$$

illetve az

$$(x+3)^2 \ge 0 \quad \text{és} \quad (x-3)^2 \ge 0$$

egyenlőtlenségrendszerekkel, így látható, hogy mindkettő megoldáshalmaza az $\mathbf{R}$ halmaz, tehát metszetük is az, és így $D_f = \mathbf{R}$.

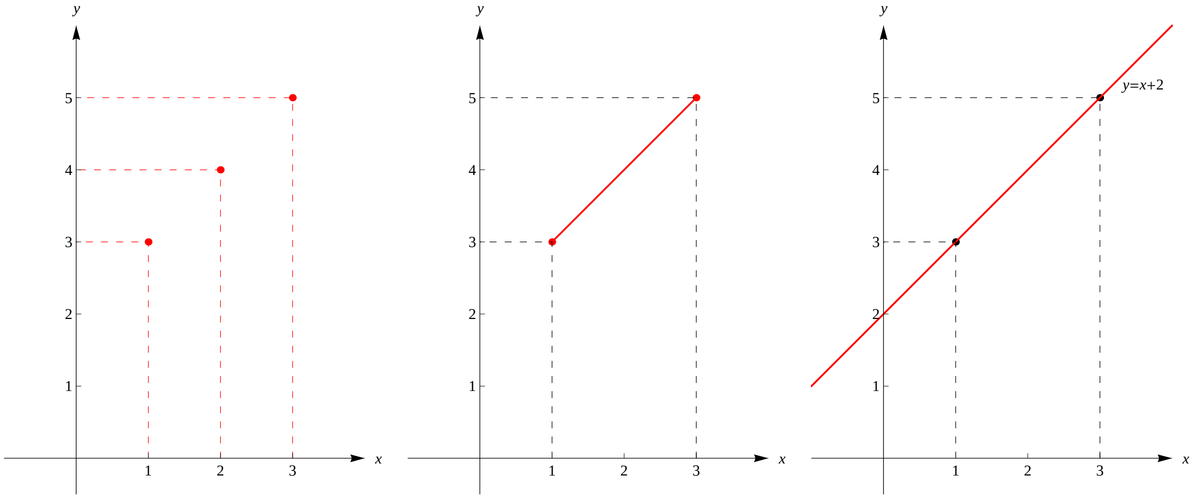
A függvény *grafikonja* vagy *görbéje* a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer által meghatározott síkban az olyan $(x, f(x))$ pontok halmaza, amelyek abszcisszái az x független változó értékei, ahol $x \in D_f$, ordinátái pedig az ezeknek megfelelő függvényértékek, azaz $y = f(x)$, s ezt az egyenletet nevezzük a függvénygörbe egyenletének. A függvény *grafikus megadása* azt jelenti, hogy a függvény grafikonját adjuk meg, és a független változó x_0 értékéhez tartozó $f(x_0)$ függvényérték a görbe x_0 abszcisszájú pontjának ordinátája. Gyakran előfordul, hogy a függvény grafikonja csak néhány pontból áll, mégis általánosan elterjedt, hogy a függvény grafikonját görbének nevezzük, s így a függvény és a görbe fogalma szorosan összefügg. Egy függvény megadása egy görbe, a függvény grafikonjának megadását jelenti, és fordítva: egy görbe megadásával egy függvényt is megadunk, azt a függvényt, amelynek a megadott görbe a grafikonja. Természetesen csak olyan görbét adhatunk meg függvény grafikonjaként, amely esetében az y-tengellyel párhuzamos egyenesek a görbét legfeljebb egy pontban metszhetik.

3.6. Példa. A mellékelt táblázattal megadott f függvény grafikonja mindössze három pontból áll, az $(1,3)$, $(2,4)$ és $(3,5)$ pontokból, mivel $D_f = \{1,2,3\}$.

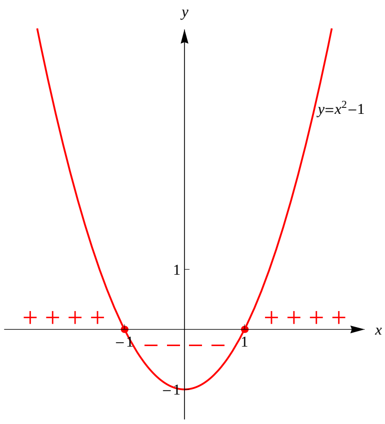
x	1	2	3
$f(x)$	3	4	5

3.7. Példa. Legyen az $f(x) = x+2$ függvény értelmezési tartománya $D_f = [1,3]$. Az f függvény grafikonja most az $y = x+2$ görbe $[1,3]$ intervallumhoz tartozó darabja, azaz az $(1,3)$ és $(3,5)$ pontokat összekötő szakasz.

3.8. Példa. Legyen az $f(x) = x+2$ függvény értelmezési tartománya most $D_f = \mathbf{R}$. Az f függvény grafikonja most az $y = x+2$ egyenes.



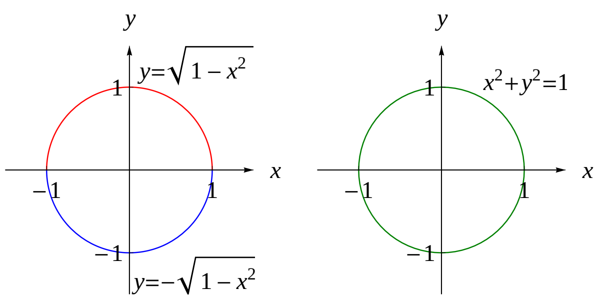
A függvény grafikonja a *függvény nullahelyében* metszi át az x-tengelyt. A függvény értelmezési tartományának azon pontjaiban, ahol a *függvényértékek pozitívak*, a függvény grafikonja az x-tengely felett van, az értelmezési tartomány azon pontjaiban pedig, ahol a *függvényértékek negatívak*, a függvény grafikonja az x-tengely alatt van.



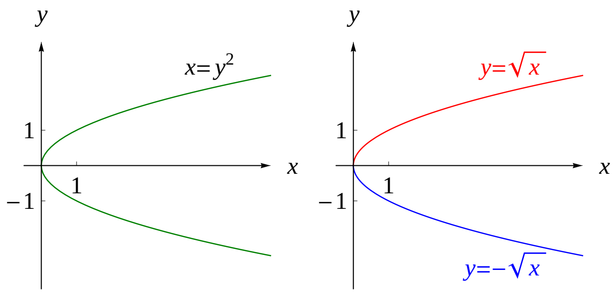
3.9. Példa. Az $f(x) = x^2 - 1$ függvény nullahelyei az $f(x) = 0$, illetve az $x^2 - 1 = 0$ egyenlet megoldásai, azaz $x_1 = 1$ és $x_2 = -1$. Az $y = x^2 - 1$ parabola tehát a $(-1, 0)$ és $(1, 0)$ pontokban metszi át az x-tengelyt, s mivel főegyütthatója pozitív, minimuma van. A függvény előjelét leolvashatjuk a grafikonról: $f(x) > 0$, ha $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, és $f(x) < 0$, ha $x \in (-1, 1)$.

A függvény $y = f(x)$ megadási módjára azt mondjuk, hogy a függvény *explicit alakban* van megadva. Ha használjuk ezt a jelölést, akkor az $F(x, y) = 0$ egyenlet is értelmezhet (egy vagy több) függvényt. Ekkor azt mondjuk, hogy $F(x, y) = 0$ egy *implicit alakban* megadott függvény.

3.10. Példa. $x^2 + y^2 - 1 = 0$ az egységsugarú körvonal implicit alakú megadása. Mivel ebből $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, ezért $x^2 + y^2 - 1 = 0$ jelentheti az $f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ függvényt, de az $f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ függvényt is. Az f_1 függvény grafikonja az egységsugarú körvonal felső, pozitív félsíkhoz tartozó félköríve, az f_2 függvény grafikonja pedig az egységsugarú körvonal alsó, negatív félsíkhoz tartozó félköríve.



3.11. Példa. A parabola $x - y^2 = 0$ implicit alakú megadása, $y = \pm\sqrt{x}$ miatt jelentheti az $f_1(x) = \sqrt{x}$ függvényt, de az $f_2(x) = -\sqrt{x}$ függvényt is. Az f_1 függvény grafikonja a parabolagörbe felső, pozitív félsíkhoz tartozó íve, az f_2 függvény grafikonja pedig a parabolagörbe alsó, negatív félsíkhoz tartozó íve.



FELADATOK.

Határozzuk meg a következő függvények értelmezési tartományát.

1. $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+5}$

Megoldás. Mivel a racionális törtfüggvény nevezője nem nulla, hiszen $x^2 + 5 > 0$, ezért a függvény minden valós számra értelmezett, azaz $D_f = \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$.

2. $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^3+6x^2+8x}$

Megoldás. A racionális törtfüggvény nevezője nem lehet nulla, azaz

$$x^3 + 6x^2 + 8x = x(x+4)(x+2) \neq 0$$

kell teljesüljön, amely feltétel akkor és csakis akkor igaz, ha $x \neq 0$ és $x \neq -4$ és $x \neq -2$. Az értelmezési tartomány tehát

$$D_f = \mathbf{R} \setminus \{-4, -2, 0\} = (-\infty, -4) \cup (-4, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, \infty).$$

3. $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}}$

Megoldás. Páratlan gyökkitevőjű a függvény, tehát minden valós számra értelmezett, ezért most csak az alatta levő tört nevezőjére kell feltenni, hogy ne legyen nulla, azaz $x \neq 0$, így $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

4. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5x - x^2}}$

Megoldás. A tört miatt a nevező nem lehet nulla, a páros gyökkitevőjű függvény alatti kifejezés pedig nem lehet negatív, így megállapíthatjuk, hogy a két feltétel összesítve az $5x - x^2 = x(5 - x) > 0$ feltételhez vezet. Oldjuk meg táblázattal ezt a másodfokú egyenlőtlenséget.

D_f	$(-\infty, 0)$	$(0, 5)$	$(5, \infty)$
x	$-$	$+$	$+$
$5 - x$	$+$	$+$	$-$
$5x - x^2$	$-$	$+$	$-$

A táblázatból kiolvashatjuk, hogy az $5x - x^2$ másodfokú kifejezés csak a $(0, 5)$ intervallumon pozitív, tehát az f függvény értelmezési tartománya $D_f = (0, 5)$.

5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5+x}} + \sqrt{-x}$

Megoldás. Figyelembe véve a törtet és a páros gyökkitevőjű függvényeket, a következő kikötéseket kell tennünk: $5 + x > 0$ és $-x \geq 0$. Az egyenlőtlenségek megoldáshalmazai $x > -5$ és $x \leq 0$, amelyek egyidőben $-5 < x \leq 0$ valós számokra teljesülnek, tehát $D_f = (-5, 0]$.

6. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+5}{5-x}\right)$

Megoldás. A logaritmusfüggvény csak szigorúan pozitív értékekre értelmezett és a nevező nem lehet nulla, ezért az

$$\frac{x+5}{5-x} > 0$$

egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. Táblázatba foglalva a számláló és nevező tulajdonságait, a következőket kapjuk:

D_f	$(-\infty,-5)$	$(-5,5)$	$(5,\infty)$
$x+5$	$-$	$+$	$+$
$5-x$	$+$	$+$	$-$
$\dfrac{x+5}{5-x}$	$-$	$+$	$-$

A táblázatból látható, hogy az $\dfrac{x+5}{5-x}$ törtkifejezés csak a $(-5, 5)$ intervallumon pozitív, tehát az f függvény értelmezési tartománya $D_f = (-5, 5)$.

7. $f(x) = \ln x^2$

Megoldás. A logaritmusfüggvény csak szigorúan pozitív értékekre értelmezett és $x^2 \geq 0$ minden valós számra. Ez azt jelenti, hogy csupán a nullát kell kizárni az értelmezési tartományból, azaz $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

8. $f(x) = \log_2 (\cos x)$

Megoldás. A logaritmusfüggvény csak szigorúan pozitív értékekre értelmezett, ezért teljesülnie kell a $\cos x > 0$ feltételnek, ami azt jelenti, hogy az f függvény értelmezési tartománya azoknak az intervallumoknak az uniójából áll, amelyekben az $y = \cos x$ függvénygörbe az x-tengely fölött helyezkedik el. Ezért

$$D_f = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right).$$

9. $f(x) = \sqrt{\ln (x - x^2)}$

Megoldás. Vegyük figyelembe a logaritmusfüggvény és a páros gyökkitevőjű irracionális függvény értelmezettségét is. Ekkor teljesülnie kell a következő feltételeknek:

$$x - x^2 > 0 \quad \text{és} \quad \ln\left(x - x^2\right) \geq 0.$$

Az $\ln\left(x - x^2\right) \geq 0$ egyenlőtlenség akkor és csakis akkor igaz, ha $x - x^2 \geq 1$, vagyis az $x^2 - x + 1 \leq 0$ másodfokú egyenlőtlenség is teljesül. Az $x^2 - x + 1$ másodfokú trinomról megállapíthatjuk, hogy determinánsa $D = 1^2 - 4 = -3 < 0$, tehát az $y = x^2 - x + 1$ parabolának nincs valós nullahelye, viszont a főegyütthatója $a = 1 > 0$, vagyis konvex és minimuma van, ami azt jelenti, hogy minden valós számra szigorúan pozitív értéket vesz fel. Ezért az $x^2 - x + 1 \leq 0$ másodfokú egyenlőtlenség egyetlen egy valós számra sem teljesül, tehát $D_f = \emptyset$.

10. $f(x) = \sqrt{\ln(\sin x)}$

Megoldás. A logaritmusfüggvény és a páros gyökkitevőjű irracionális függvény értelmezettségét is figyelembe véve kikötjük, hogy teljesülnie kell a

$$\sin x > 0 \quad \text{és} \quad \ln(\sin x) \geq 0$$

feltételeknek, illetve az ezzel ekvivalens

$$\sin x > 0 \quad \text{és} \quad \sin x \geq 1$$

egyenlőtlenségrendszernek. Az egyenlőtlenségrendszer megoldását a $\sin x \geq 1$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza, illetve a $|\sin x| \leq 1$ feltétellel összesítve a $\sin x = 1$ egyenlet megoldáshalmaza adja meg. Ezért

$$D_f = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

11. $f(x) = \arccos \dfrac{2}{2 + \sin x}$

Megoldás. Vegyük észre, hogy a tört nevezőjében szereplő $2+\sin x$ kifejezés mindig szigorúan pozitív, tehát nem lehet nulla. Ezért csupán a

$$-1 \leq \frac{2}{2+\sin x} \leq 1, \quad \text{illetve} \quad \left(\frac{2}{2+\sin x} \geq -1 \quad \text{és} \quad \frac{2}{2+\sin x} \leq 1 \right)$$

egyenlőtlenségrendszert kell megoldani. Mivel $2 + \sin x > 0$ minden valós számra, ezért mindkét egyenlőtlenség beszorozható $(2 + \sin x)$-szel, s így a

$$2 \geq -2 - \sin x \quad \text{és} \quad 2 \leq 2 + \sin x,$$

illetve a

$$\sin x \geq -4 \quad \text{és} \quad \sin x \geq 0$$

egyenlőtlenségeket kapjuk, amelyek közül az első mindig teljesül, a második megoldáshalmaza pedig minden olyan intervallum uniója, ahol az $y = \sin x$ függvénygörbe nem az x-tengely alatt van, tehát

$$D_f = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi].$$

12. $f(x) = \sqrt{3x} + \log(4 - x) + \sqrt[3]{\dfrac{x}{x-2}}$

Megoldás. Vegyük figyelembe mindhárom összeadandó értelmezési tartományát és keressük meg ezek metszetét. Kikötéseink a következők:

$$3x \geq 0 \quad \text{és} \quad 4 - x > 0 \quad \text{és} \quad x - 2 \neq 0,$$

$$\text{illetve} \quad x \geq 0 \quad \text{és} \quad x < 4 \quad \text{és} \quad x \neq 2.$$

A keresett értelmezési tartomány így $D_f = [0, 2) \cup (2, 4)$.

13. $f(x) = e^{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{\arcsin \dfrac{1}{x^2+1}} + \operatorname{arctg}\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)$

Megoldás. Vegyük figyelembe, hogy az exponenciális függvény kitevőjében levő tört nevezője nem lehet nulla, azaz $x+1 \neq 0$, illetve $x \neq -1$ kell, hogy teljesüljön. A négyzetgyök alatti kifejezés nem lehet negatív, tehát kikötjük, hogy

$$\arcsin \frac{1}{x^2+1} \geq 0$$

teljesüljön, ami akkor és csak akkor lehetséges, ha $0 \leq \dfrac{1}{x^2+1} \leq 1$ teljesül. Mivel $x^2+1>0$, ezért a kapott egyenletrendszer ekvivalens a $0 \leq 1 \leq x^2+1$ egyenletrendszerrel, amelynek megoldáshalmaza a valós számok halmaza. Az $y = \operatorname{arctg} x$ függvény minden valós számra értelmezett, tehát itt nincs kikötés, a logaritmusfüggvény viszont csak szigorúan pozitív értékekre értelmezett, és az x^2+1 kifejezés teljesíti ezt a feltételt. Összegezve a fenti feltételek mindegyikét azt kapjuk, hogy az adott függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, azaz

$$D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty).$$

14. $f(x) = \left(x^2 - x - 2\right)^{x^2+1}$

Megoldás. Az exponenciális függvény alapja csak 1-től különböző pozitív valós szám lehet, így teljesülnie kell az

$$x^2 - x - 2 > 0 \quad \text{és} \quad x^2 - x - 2 \neq 1,$$

illetve az

$$(x-2)(x+1) > 0 \quad \text{és} \quad x^2 - x - 3 \neq 0$$

feltételeknek. Az első egyenlőtlenség megoldása az $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ intervallum, a második megoldása pedig: $x \neq \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$. Ezért a megadott függvény értelmezési tartománya

$$D_f = \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, -1\right) \cup \left(2, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \infty\right).$$

15. $f(x) = \log_{3x-3}\left(4 - x^2\right)$

Megoldás. A logaritmusfüggvény csak pozitív értékekre értelmezett, alapja pedig csak 1-től különböző pozitív valós szám lehet, ezért kikötéseink most:

$$3x - 3 > 0 \quad \text{és} \quad 3x - 3 \neq 1 \quad \text{és} \quad 4 - x^2 > 0.$$

Mivel a fenti egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmazát az $x > 1$, az $x \neq \dfrac{4}{3}$, valamint a $-2 < x < 2$ tulajdonságok egyidőben történő megvalósulása adja meg, ezért az f függvény értelmezési tartománya

$$D_f = \left(1, \frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}, 2\right).$$

Határozzuk meg a következő függvények értelmezési tartományát, nullahelyeit, majd vizsgáljuk ki az előjelüket, azaz határozzuk meg mely intervallumokon pozitívak és mely intervallumokon negatívak.

16. $f(x) = 6x - 3$

Megoldás. Mivel f lineáris függvény, ezért $D_f = \mathbf{R}$. A függvény nullahelye az $f(x) = 0$ függvény megoldása, ebben az esetben a $6x - 3 = 0$ egyenlet gyöke, azaz $x = \dfrac{1}{2}$. Ez azt jelenti, hogy az f függvény görbéje az $N\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ pontban metszi az x-tengelyt. Az f függvény akkor és csakis akkor pozitív, ha $f(x) > 0$, azaz $6x-3 > 0$, tehát $x > \dfrac{1}{2}$ esetén. Az f függvény akkor és csakis akkor negatív, ha $f(x) < 0$, azaz $6x - 3 < 0$, tehát $x < \dfrac{1}{2}$ esetén. Ezeket a tulajdonságokat táblázatban is összefoglalhatjuk.

D_f	$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$
$f(x)$	$-$	$+$

Az f függvény pozitív az $\left(\dfrac{1}{2}, \infty\right)$ intervallumon, és negatív a $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$ intervallumon.

17. $f(x) = 25 - x^2$

Megoldás. A függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbf{R}$, mert f másodfokú függvény. $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $25 - x^2 = 0$, azaz $x = -5$ vagy $x = 5$ esetén, tehát a függvény grafikonja $N_1(-5, 0)$ és $N_2(5, 0)$ pontokban metszi az x-tengelyt. Felhasználva, hogy a függvény $f(x) = (5 - x)(5 + x)$ alakban is felírható, az előjellel kapcsolatos tulajdonságokat táblázatban foglaljuk össze.

D_f	$(-\infty, -5)$	$(-5, 5)$	$(5, \infty)$
$5 - x$	$+$	$+$	$-$
$5 + x$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$

Megállapíthatjuk, hogy az f függvény pozitív a $(-5, 5)$ intervallumon, és negatív a $(-\infty, -5) \cup (5, \infty)$ intervallumon.

18. $f(x) = x^3 + x^2 + 2x$

Megoldás. f polinomfüggvény, tehát az értelmezési tartománya $D_f = \mathbf{R}$. $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x(x^2 + x + 2) = 0$, azaz csupán $x = 0$ esetén, mert $x^2 + x + 2 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4} > 0$. A függvény grafikonja tehát csak az $N(0, 0)$ pontban metszi az x-tengelyt. Az f függvény előjele így csak x-től függ, vagyis $f(x) > 0$, ha $x \in (0, \infty)$, és $f(x) < 0$, ha $x \in (-\infty, 0)$.

19. $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 9}$

Megoldás. f racionális törtfüggvény, így a nevező nem lehet nulla, azaz $x^2 - 9 \neq 0$, ami azt jelenti, hogy $x \neq 3$ és $x \neq -3$. Az értelmezési tartomány ennek alapján $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$, illetve intervallumos alakban $D_f = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$. $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha a számláló nulla, vagyis $x(x - 1)(x - 2) = 0$. A kapott egyenlet megoldásai $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ és $x_3 = 2$, tehát a függvény grafikonja az $N_1(0, 0)$, $N_2(1, 0)$ és $N_3(2, 0)$ pontokban metszi az x-tengelyt. Végezzük táblázattal az előjel vizsgálatát.

D_f	$(-\infty,-3)$	$(-3,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,3)$	$(3,\infty)$
x	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2-3x+2	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$
x^2-9	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Megállapíthatjuk, hogy
$f(x)>0$, ha $x\in(-3,0)\cup(1,2)\cup(3,\infty)$ és
$f(x)<0$, ha $x\in(-\infty,-3)\cup(0,1)\cup(2,3)$.

20. $f(x)=2^x-4$

Megoldás. Az exponenciális függvény minden valós számra értelmezett, ezért az értelmezési tartomány $D_f=\mathbf{R}$. A függvény nullahelyét az $f(x)=0$ egyenletből számíthatjuk ki. $2^x-4=0$ akkor és csakis akkor, ha $2^x=2^2$, amelyből $x=2$, vagyis az f függvény grafikonja egyetlen pontban metszi át az x-tengelyt, ez pedig $N(2,0)$. A függvény előjelének kivizsgálásához exponenciális egyenlőtlenségeket kell megoldani. $f(x)>0$ akkor és csakis akkor, ha $2^x-4>0$, azaz $2^x>2^2$, amelyből következik, hogy $x>2$. $f(x)<0$ akkor és csakis akkor, ha $2^x<2^2$, ahonnan $x<2$. Összefoglalva,
az f függvény pozitív, ha $x\in(2,\infty)$ és
az f függvény negatív, ha $x\in(-\infty,2)$.

21. $f(x)=\dfrac{15-3x}{\sqrt{x-6}}$

Megoldás. A nevező nem lehet nulla és a gyök alatti kifejezés nem lehet negatív, ezért $x-6>0$ esetén lesz csak értelmezett a függvény, ami azt jelenti, hogy az értelmezési tartomány $D_f=(6,\infty)$. $f(x)=0$ akkor és csakis akkor, ha $15-3x=0$, azaz $x=5$ esetében, de mivel $5\notin D_f$, ezért a függvénynek nincs nullahelye. Az előjel kivizsgálásánál vegyük észre, hogy $\sqrt{x-6}>0$ az értelmezési tartomány minden pontjára, tehát a függvény előjele csak a számláló előjelétől függ. Ezért $f(x)>0$ akkor és csakis akkor, ha $15-3x>0$, vagyis $x<5$ esetén, ami nem lehetséges, mert ez az intervallum nincs benne az értelmezési tartományban. $f(x)<0$ akkor és csakis akkor, ha $15-3x<0$, vagyis $x>5$ esetén. Ez azt jelenti, hogy az f függvény a teljes értelmezési tartományon negatív.

22. $f(x)=\dfrac{\ln x}{1-\ln x}$

Megoldás. A logaritmusfüggvény csak pozitív értékekre értelmezett, ezért az egyik kikötésünk az, hogy $x>0$. A nevező nem lehet nulla, ezért a másik kikötésünk az $\ln x\neq 1$, vagyis $x\neq e$. Ezért a függvény értelmezési tartománya $D_f=(0,e)\cup(e,\infty)$. $f(x)=0$ akkor és csakis akkor, ha $\ln x=0$, ez pedig $x=1$ esetén teljesül, tehát a függvénygrafikon az $N(1,0)$ pontban metszi át az abszcissza tengelyt. Foglaljuk táblázatba a függvény előjelének kivizsgálását.

D_f	$(0,1)$	$(1,e)$	(e,∞)
$\ln x$	$-$	$+$	$+$
$1-\ln x$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$

A táblázatból megállapíthatjuk, hogy
$f(x)>0$, ha $x\in(1,e)$, és
$f(x)<0$, ha $x\in(0,1)\cup(e,\infty)$.

23. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x+2}{x-3}$

Megoldás. Az f függvény akkor és csakis akkor értelmezett, ha $\dfrac{x+2}{x-3} > 0$. Készítsük el a kapott egyenlőtlenség megoldásának táblázatát.

x	$(-\infty,-2)$	$(-2,3)$	$(3,\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{x+2}{x-3}$	$+$	$-$	$+$

A táblázatból megállapíthatjuk, hogy a függvény értelmezési tartománya

$$D_f = (-\infty,-2) \cup (3,\infty).$$

$f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{x+2}{x-3} = 1$, azaz $x+2 = x-3$ esetén, e ennek az egyenletnek nincs megoldása, így a függvénynek nincs nullahelye. $f(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $0 < \dfrac{x+2}{x-3} < 1$, azaz akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{x+2-x+3}{x-3} < 0$. A kapott egyenlőtlenség megoldása $\dfrac{5}{x-3} < 0$, illetve $x-3 < 0$ megoldásával ekvivalens, ami azt jelenti, hogy az f függvény pozitív $x < 3$ esetén, tehát a $(-\infty,-2)$ intervallumon. $f(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{x+2}{x-3} > 1$, azaz akkor és csakis akkor, ha $\dfrac{5}{x-3} > 0$. A kapott egyenlőtlenség megoldása $x-3 > 0$ megoldásával ekvivalens, ami azt jelenti, hogy az f függvény negatív a $(3,\infty)$ intervallumon.

24. $f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{x}}$

Megoldás. Mivel az exponenciális függvény kitevőjében levő nevező nem lehet nulla, ezért $x \neq 0$, s így $D_f = R \setminus \{0\} = (-\infty,0) \cup (0,\infty)$.
$f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x-2 = 0$, tehát $x = 2$ a függvény nullahelye. Ez azt jelenti, hogy a függvénygrafikon az $N(2,0)$ pontban metszi az x-tengelyt. Mivel az exponenciális függvény mindig pozitív, ezért $f(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $x-2 > 0$, és $f(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $x-2 < 0$. Az f függvény tehát pozitív $x > 2$-re, azaz $x \in (2,\infty)$ esetén, és negatív $x < 2$-re, azaz $x \in (-\infty,2)$ esetén.

25. $f(x) = \cos 2x - \sin x$

Megoldás. Az f függvényben szereplő két trigonometrikus függvény minden valós számra értelmezett, tehát az f függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbf{R}$.
Alkalmazva a trigonometriai azonosságokat átalakíthatjuk az f függvényt:

$$f(x) = \cos 2x - \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x - \sin x = 1 - 2\sin^2 x - \sin x.$$

Ekkor $f(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$. Bevezetve a $\sin x = t$ helyettesítést az egyenlet a $2t^2 + t - 1 = 0$ másodfokú egyenletre vezetődik vissza, amelynek megoldásai $t_1 = \dfrac{1}{2}$ és $t_2 = -1$. Visszahelyettesítve az eredeti változót a

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \sin x = -1$$

egyenleteket kapjuk, amelyek megoldásai

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{és} \quad x_3 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Mivel az f függvény

$$f(x) = -2\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)(\sin x + 1)$$

alakban is felírható és $\sin x + 1 \geq 0$, ezért $f(x) > 0$ akkor és csakis akkor, ha $\sin x - \frac{1}{2} < 0$, illetve $f(x) < 0$ akkor és csakis akkor, ha $\sin x - \frac{1}{2} > 0$.
Összegezve a fentieket megállapíthatjuk, hogy az f függvény pozitív, ha
$x \in \left(0 + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) \bigcup \left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) \bigcup \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \frac{13\pi}{6} + 2k\pi\right)$,

illetve az f függvény negatív, ha $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)$.

3.1.2. Valós függvények tulajdonságai

A következőkben felsoroljuk azokat a legegyszerűbb fogalmakat, amelyek a függvények vizsgálata során leggyakrabban előfordulnak.

3.1. Definíció. *Az f függvényt felülről (alulról) korlátosnak nevezzük, ha van olyan K (k) szám, hogy minden $x \in D_f$ pontra $f(x) < K$ ($k < f(x)$). Az f függvény korlátos, ha alulról és felülről is korlátos, ekkor*

$$|f(x)| \leq \max\{|k|, |K|\}, \quad \text{azaz} \quad k \leq f(x) \leq K.$$

Azt mondjuk, hogy K az f függvény egy felső, k pedig az f függvény egy alsó korlátja.

Fontos kihangsúlyozni, hogy ha a függvénynek van egy felső korlátja vagy egy alsó korlátja, akkor ezekből végtelen sok is van. Tehát a felső és alsó korlát fogalma nem egyértelmű. Lehet definiálni korlátos függvény legkisebb felső korlátját, mint a függvény szuprémumát, vagy korlátos függvény legnagyobb alsó korlátját, mint a függvény infimmumát, de a korlátosság szempontjából ezek nem a legfontosabb fogalmak.

3.12. Példa. *a)* Az $f(x) = -x^2 + 2$ függvény felülről korlátos, egy felső korlátja a 2, tehát a függvény grafikonja az $y = 2$ egyenes alatt helyezkedik el.

b) Az $f(x) = \frac{1}{x^2}$ függvény alulról korlátos, egy alsó korlátja a 0, tehát a függvény grafikonja az $y = 0$ egyenes felett helyezkedik el.

c) Az $f(x) = \cos x$ függvény korlátos, egy felső korlátja az 1, egy alsó korlátja a -1, tehát a függvény grafikonja az $y = -1$ és az $y = 1$ egyenesek között helyezkedik el.

d) Az $f(x) = x^3$ függvény sem alulról, sem felülről nem korlátos.

3.2. Definíció. *Az f függvényt szigorúan monoton növekvőnek (csökkenőnek) nevezzük, ha az értelmezési tartomány bármely két olyan pontjára, amelyekre $x_1 < x_2$, az*

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2))$$

reláció teljesül. Az f függvényt monoton nemcsökkenőnek (nemnövekvőnek) mondjuk, ha $x_1 < x_2$ esetén az teljesül, hogy

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2)).$$

A szigorúan monoton növekvő, szigorúan monoton csökkenő, monoton nemcsökkenő és monoton nemnövekvő függvényeket közös néven monoton függvényeknek nevezzük. A szigorúan monoton növekvő és szigorúan monoton csökkenő függvényekre azt mondjuk, hogy szigorúan monotonak.

3.13. Példa. *a)* Az $f(x) = 2^{-x}$ függvény szigorúan monoton csökkenő.

b) Az $f(x) = \ln x$ függvény szigorúan monoton növekvő.

c) Az $f(x) = 2$ függvény monoton nemcsökkenő és monoton nemnövekvő is.

A monotonitás definiálható az értelmezési tartomány valamely részintervallumán is. Ekkor a szóban forgó intervallumon monoton függvényről beszélünk.

3.14. Példa. *a)* Az $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ függvény a $(-\infty, 0)$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, a $(0, \infty)$ intervallumon pedig szigorúan monoton csökkenő, de a teljes értelmezési tartományon vizsgálva nem monoton.

b) Az $f(x) = x^2 - 2x + 3$ függvény a $(-\infty, 1)$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, a $(1, \infty)$ intervallumon pedig szigorúan monoton növekvő, de a teljes értelmezési tartományon vizsgálva nem monoton.

3.3. Definíció. *Legyen x_0 az f függvény értelmezési tartományának egy pontja. Az f függvénynek az x_0 pontban helyi (vagy lokális) maximuma (minimuma) van, ha megadható az x_0 pontnak olyan környezete, hogy az ebbe eső $x \in D_f$, de $x \neq x_0$ pontokra igaz, hogy*

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)) \, .$$

Azt az x_0 pontot, ahol az f függvény eléri helyi maximumát minimumát, az *f függvény helyi maximuma (minimuma) helyének* nevezzük. Az $(x_0, f(x_0))$ pont az $y = f(x)$ *függvénygörbe helyi maximumpontja minimumpontja*. A helyi maximumhelyet és minimumhelyet egy szóval *helyi szélsőértékhelynek* nevezzük, a helyi maximumpont és minimumpont közös neve pedig helyi *szélsőértékpont*.

3.15. Példa. *a)* Az $f(x) = x^2 + 2$ függvénynek az $x = 0$ pontban helyi minimuma van, amelynek értéke $f_{min}(0) = 2$.

b) Az $f(x) = -x^2 + 2x$ függvénynek az $x = 1$ pontban helyi maximuma van, amelynek értéke $f_{max}(1) = 1$.

c) Az $f(x) = \sqrt[3]{x}$ függvénynek nincs helyi szélsőértéke.

Az olyan függvények esetében vizsgálható a függvénygörbe alakja a konvexitás szempontjából, amelyek értelmezési tartományának van olyan részhalmaza, amely intervallum.

3.4. Definíció. *Az $[a, b]$ intervallumon értelmezett f függvényt konvexnek (konkávnak) nevezzük, ha minden $a \leq x_1 < x < x_2 \leq b$ esetén*

$$f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \left(f(x) > f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \right).$$

A fenti definíció szemléletesen a következőképpen fogalmazható meg: egy függvénygörbét konvexnek (konkávnak) nevezünk, ha bármely ívének minden pontja a végpontok kivételével a végpontok által meghatározott húr alatt (felett) van. A konvex görbeívre tehát az jellemző, hogy bármely pontjához húzott érintője fölött halad, míg a konkáv görbeívre az, hogy bármely pontjához húzott érintője alatt halad.
A fenti elnevezések akkor lennének pontosak, ha azt is hozzátennénk, hogy a függvény "felülről nézve" konvex, illetve konkáv, de mi mindig ilyen értelemben használjuk őket.

3.5. Definíció. *Egy függvénynek az x_0 pontban inflexiós (vagy áthajlási) pontja van, ha az x_0 pontnak van olyan jobb és bal oldali környezete, hogy az egyikben a függvény szigorúan konvex, a másikban szigorúan konkáv, vagy fordítva.*

3.16. Példa. Az $f(x) = x^3$ függvény a $(-\infty, 0)$ intervallumon konkáv, a $(0, \infty)$ intervallumon konvex, az $x = 0$ pontban pedig inflexiós pontja van és $f_{inf}(0) = 0$.

3.6. Definíció. *Az f függvényt, amelynek értelmezési tartománya szimmetrikus az origóra, páros függvénynek nevezzük, ha bármely $x \in D_f$ pontra $f(-x) = f(x)$, és páratlan függvénynek, ha bármely $x \in D_f$ pontra $f(-x) = -f(x)$.*

A definícióból következik, hogy a páros függvények grafikonja tengelyesen szimmetrikus az y-tengelyre, a páratlan függvények grafikonja pedig középpontosan szimmetrikus az origóra.

3.17. Példa. Az $f(x) = x^2 + |x|$ függvény páros, mert

$$f(-x) = (-x)^2 + |-x| = x^2 + |x| = f(x).$$

3.18. Példa. Az $f(x) = x^3 + x$ függvény páratlan, mert

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x).$$

3.19. Példa. Ha tudjuk, hogy a trigonometrikus függvények közül csak az $y = \cos x$ páros, a többi páratlan, akkor megállapíthatjuk, hogy az $f(x) = \sin x + \cos x$ függvény se nem páros, se nem páratlan, mivel

$$f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos x \neq \pm f(x).$$

3.20. Példa. Az $f(x) = \log x$ se nem páros, se nem páratlan, mert az értelmezési tartománya nem szimmetrikus az origóra.

3.7. Definíció. *Az f függvény periodikus, ha létezik olyan ω pozitív valós szám, amelyre teljesül a következő két feltétel:*

1. minden $x \in D_f$ esetén következik, hogy $(x + k\omega) \in D_f$, ahol $k \in \mathbf{Z}$;

2. minden $x \in D_f$ esetén $f(x + \omega) = f(x)$. Ekkor ω-t az f függvény periódusának nevezzük.

Természetesen, ha ω periódus, akkor ennek bármely pozitív egész számszorosa is periódus. A függvény lehető legkisebb periódusát a függvény *alapperiódusának* nevezzük és ω_0-val jelöljük.

3.21. Példa. A trigonometrikus függvények periodikusak. Közülük az $f(x) = \sin x$ és $f(x) = \cos x$ függvények alapperiódusa $\omega_0 = 2\pi$. Ez azt jelenti, hogy $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, azaz, hogy $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, $k \in \mathbf{Z}$, illetve hogy $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, $k \in \mathbf{Z}$. Az $f(x) = \operatorname{tg} x$ és az $f(x) = \operatorname{ctg} x$ függvények alapperiódusa $\omega_0 = \pi$. Ebből azt tudjuk, hogy $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$, $k \in \mathbf{Z}$, és $\operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg} x$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.22. Példa. Az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvény nem periodikus, mert nem találunk olyan ω pozitív valós számot, hogy $f(x+\omega) = f(x)$, vagyis $\dfrac{1}{x+\omega} = \dfrac{1}{x}$ teljesüljön, hiszen akkor $x+\omega = x$ kellene, hogy igaz legyen minden valós $x \neq 0$ értékre, amely csak $\omega = 0$ esetben valósul meg.

3.23. Példa. Vizsgáljuk most ki az $f(x) = \sin 3x$ függvény periodikusságát. Mivel általános esetben tudjuk, hogy az f függvény periodikusságához egy olyan $\omega > 0$ számot keresünk, amelyre $f(x + \omega) = f(x)$ igaz, és ebben az esetben tudjuk, hogy az $y = \sin x$ függvény periodikus és 2π az alapperiódusa, ezért most a

$$\sin 3(x + \omega) = \sin(3x + 2k\pi), \quad k \in \mathbf{Z}$$

egyenlőségnek kell teljesülnie. Innen $3(x + \omega) = 3x + 2k\pi$ akkor és csakis akkor, ha $3\omega = 2k\pi$, vagyis

$$\omega = \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Az alapperiódust a legkisebb pozitív egész k számra kapjuk, tehát $k = 1$ esetén, s így az f függvényről megállapítható, hogy periodikus, alapperiódusa pedig $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{3}$.

3.24. Példa. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \operatorname{tg}\sqrt{x}$ függvény nem periodikus. E célból tegyük fel, hogy az f függvény periodikus ω periódussal, azaz teljesül, hogy

$$\operatorname{tg}\sqrt{x + \omega} = \operatorname{tg}(\sqrt{x} + k\pi), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Ebből $\sqrt{x + \omega} = \sqrt{x} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, ahonnan négyzetre emeléssel azt kapjuk, hogy

$$x + \omega = x + 2k\pi\sqrt{x} + k^2\pi^2, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Ekkor

$$\omega = 2k\pi\sqrt{x} + k^2\pi^2 \notin \mathbf{R}^+, \quad k \in \mathbf{Z},$$

mivel az x változó is szerepel a kifejezésben. Ezért az f függvény egy nem periodikus trigonometrikus függvény.

FELADATOK.

Vizsgáljuk ki az alábbi függvények paritását.

1. $f(x) = x\sqrt{x^2}$

   Megoldás. Mivel

   $$f(-x) = -x\sqrt{(-x)^2} = -x\sqrt{x^2} = -f(x),$$

   az adott függvény páratlan.

2. $f(x) = x^4 + 5x^2 + 6 + 3\cos x$

Megoldás. Mivel

$$f(-x) = (-x)^4 + 5(-x)^2 + 6 + 3\cos(-x) = x^4 + 5x^2 + 6 + 3\cos x = f(x),$$

az adott függvény páros.

3. $f(x) = \sin(\sin x)$

Megoldás. Mivel

$$f(-x) = \sin(\sin(-x)) = \sin(-\sin x) = -\sin(\sin x) = -f(x),$$

az adott függvény tehát páratlan.

4. $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

Megoldás. A függvény se nem páros, se nem páratlan, hiszen

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 + (-x) + 1 = -x^3 + x^2 - x + 1 \neq \pm f(x).$$

5. $f(x) = \dfrac{\cos 5x}{x^3 + x}$

Megoldás. A függvény páratlan, mert $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ és

$$f(-x) = \frac{\cos 5(-x)}{(-x)^3 + (-x)} = \frac{\cos 5x}{-x^3 - x} = -\frac{\cos 5x}{x^3 + x} = -f(x).$$

6. $f(x) = \dfrac{3^x - 3^{-x}}{2}$

Megoldás. Mivel

$$f(-x) = \frac{3^{(-x)} - 3^{-(-x)}}{2} = \frac{3^{-x} - 3^x}{2} = -\frac{3^x - 3^{-x}}{2} = -f(x),$$

ezért a függvény páratlan.

7. $f(x) = \sqrt{1 - 3x + 2x^2} - \sqrt{1 + 3x + 2x^2}$

Megoldás. Vegyük észre, hogy $D_f = (-\infty, -1) \cup \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) \cup (1, \infty)$ és

$$f(-x) = \sqrt{1 - 3(-x) + 2(-x)^2} - \sqrt{1 + 3(-x) + 2(-x)^2} =$$

$$= \sqrt{1 + 3x + 2x^2} - \sqrt{1 - 3x + 2x^2} = -\left(\sqrt{1 + 3x + 2x^2} - \sqrt{1 - 3x + 2x^2}\right) = -f(x),$$

ezért a függvény páratlan.

8. $f(x) = \sqrt[3]{(x+2)^2} + \sqrt[3]{(x-2)^2}$

Megoldás. Mivel

$$f(-x) = \sqrt[3]{(-x+2)^2} + \sqrt[3]{(-x-2)^2} = \sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x+2)^2} = f(x),$$

a függvény páros.

9. $f(x) = \log_a\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

Megoldás. A függvény páratlan, mert

$$f(-x) = \log_a\left(-x + \sqrt{(-x)^2+1}\right) = \log_a\left(\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) =$$

$$= \log_a\left(\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) = \log_a\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^{-1} = -\log_a\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = -f(x).$$

10. $f(x) = \ln\dfrac{2+\cos x}{2-\cos x}$

Megoldás. A függvény páros, mert

$$f(-x) = \ln\frac{2+\cos(-x)}{2-\cos(-x)} = \ln\frac{2+\cos x}{2-\cos x} = f(x).$$

Vizsgáljuk ki az alábbi függvények periodikusságát.

11. $f(x) = \sin^2 x$

Megoldás. Alkalmazzuk a $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ trigonometriai azonosságot, s így valójában az $f(x) = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ függvény periodikusságát kell kivizsgálni. Olyan ω pozitív valós számot keresünk, hogy teljesüljön az $f(x+\omega) = f(x)$ egyenlőség, illetve ha felhasználjuk az $y = \cos x$ periodikusságát, akkor igaz legyen, hogy

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2(x+\omega) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x + 2k\pi), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Innen

$$\cos 2(x+\omega) = \cos(2x+2k\pi), \quad k \in \mathbf{Z},$$

vagyis

$$2x + 2\omega = 2x + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Ebből adódik, hogy az f függvény periódusa $\omega = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, az alapperiódusa pedig $k = 1$-re $\omega_0 = \pi$.

12. $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$

Megoldás. Olyan ω pozitív valós számot keresünk, amelyre

$$\sin\frac{1}{x+\omega} = \sin\left(\frac{1}{x} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Ebből

$$\frac{1}{x+\omega} = \frac{1+2k\pi x}{x}, \quad k \in \mathbf{Z},$$

vagyis

$$x = (x+\omega)(1+2k\pi x), \quad \text{illetve} \quad x = x + 2k\pi x^2 + \omega + 2k\pi\omega x, \quad k \in \mathbf{Z},$$

ahonnan

$$\omega = \frac{-2k\pi x^2}{1+2k\pi x} \notin \mathbf{R}^+,$$

tehát ez a függvény nem periodikus.

13. $f(x) = 3\operatorname{ctg}\pi x$

Megoldás. Mivel

$$3\operatorname{ctg}\pi(x+\omega) = 3\operatorname{ctg}(\pi x + k\pi), \quad k \in \mathbf{Z},$$

kell legyen, ezért

$$\pi x + \pi\omega = \pi x + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z},$$

ahonnan $\omega = k$, $k \in \mathbf{Z}$, a periódus, és $\omega_0 = 1$ az alapperiódus.

14. $f(x) = 2\sin\dfrac{\pi x}{2} + 3\sin\dfrac{\pi x}{3}$

Megoldás. Mivel most két összeadandónk van, mindkettőnek keressük a periódusát, majd a kapott periódusok legkisebb közös többszöröse lesz az f összegfüggvény periódusa. Először a

$$2\sin\frac{\pi}{2}(x+\omega) = 2\sin\left(\frac{\pi x}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbf{Z},$$

egyenlőségből kapjuk, hogy

$$\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi\omega}{2} = \frac{\pi x}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z},$$

ahonnan $\omega = 4k$, $k \in \mathbf{Z}$. Másodszor a

$$3\sin\frac{\pi}{3}(x+\omega) = 3\sin\left(\frac{\pi x}{3} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbf{Z},$$

egyenlőségből kapjuk, hogy

$$\frac{\pi x}{3} + \frac{\pi\omega}{3} = \frac{\pi x}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z},$$

ahonnan $\omega = 6k$, $k \in \mathbf{Z}$. Mivel $LKT(4k, 6k) = 12k$, az adott f függvény periódusa $\omega = 12k$, $k \in \mathbf{Z}$, alapperiódusa pedig $\omega_0 = 12$.

15. $f(x) = \cos\dfrac{x-1}{\pi}$

Megoldás. Vizsgáljuk meg, hogy van-e olyan pozitív valós ω, amelyre teljesül a

$$\cos\frac{x+\omega-1}{\pi} = \cos\left(\frac{x-1}{\pi} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbf{Z}$$

egyenlőség. Innen

$$\frac{x-1}{\pi} + \frac{\omega}{\pi} = \frac{x-1}{\pi} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

kell legyen, ahonnan $\omega = 2k\pi^2$, $k \in \mathbf{Z}$ a függvény periódusa, $\omega_0 = 2\pi^2$ pedig az alapperiódus.

3.1.3. Műveletek függvényekkel, az inverz függvény

3.8. Definíció. *Az f és g valós függvények összegén, különbségén, szorzatán, hányadosán rendre azt az F, G, H, R függvényt értjük, amely azokban és csak azokban a pontokban értelmezett, amelyekben f és g is értelmezett (kivéve az R függvényt, amely $g(x) = 0$ esetén nem értelmezett), és minden ilyen pontban:*

$$F(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$G(x) = (f - g)(x) = f(x) - g(x),$$

$$H(x) = (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

$$R(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

3.9. Definíció. *Az f és g valós függvények összetételén (vagy kompozícióján) azt a F függvényt értjük, amelynek értelmezési tartománya a g függvény értelmezési tartományának azon x pontjaiból áll, amelyekre a $g(x)$ függvényérték hozzátartozik az f függvény értelmezési tartományához, és minden ilyen pontban*

$$F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

3.25. Példa. Ha $f(x) = x + 12$, $x \in \mathbf{R}$ és $g(x) = x^2 - \sqrt{x}$, $x \geq 0$, akkor

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - \sqrt{x}) = x^2 - \sqrt{x} + 12, \quad x \geq 0,$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 12) = (x + 12)^2 - \sqrt{x + 12}, \quad x \geq -12.$$

3.26. Példa. Bontsuk fel belső és külső függvényekre a $F(x) = \sqrt[3]{1 + 2x + 4x^2}$ függvényt. Ha $g(x) = 1 + 2x + 4x^2$ és $f(x) = \sqrt[3]{x}$, akkor $f(g(x)) = \sqrt[3]{1 + 2x + 4x^2}$. Viszont, ha $g_1(x) = x+2x^2$ és $f_1(x) = \sqrt[3]{1 + 2x}$, akkor $f_1(g_1(x)) = \sqrt[3]{1 + 2(x + 2x^2)} = \sqrt[3]{1 + 2x + 4x^2}$.

3.10. Definíció. *Legyen az f valós függvény által létesített leképezés kölcsönösen egyértelmű (bijektív). Az f függvény inverz függvényén értjük azt az f^{-1} függvényt, amelynek értelmezési tartománya az f értékkészlete, s a hozzárendelési törvénye a következő: egy x_0 értékhez olyan $f^{-1}(x_0)$ értéket rendel, amely helyen az f függvény az x_0 értéket vette fel, azaz $f(f^{-1}(x_0)) = x_0$.*

Szigorúan monoton függvénynek mindig létezik inverze, ugyanis ekkor a hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű.
Ha az f invertálható függvény grafikonja megrajzolható, akkor az f^{-1} grafikonja is, és ez az f függvény grafikonjának az $y = x$ egyenesre vonatkozó tükörképe a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben.

3.27. Példa. Az $f(x) = \dfrac{3x + 2}{x + 5}$ függvény f^{-1} inverzfüggvénye az $x = \dfrac{3f^{-1}(x) + 2}{f^{-1}(x) + 5}$ összefüggésből $f^{-1}(x) = \dfrac{2 - 5x}{x - 3}$, ahol $D_f = R_{f^{-1}} = \mathbf{R} \setminus \{-5\}$ és $R_f = D_{f^{-1}} = \mathbf{R} \setminus \{3\}$.

3.28. Példa. Legyen $f(x) = \log(x-1)+3$ adott függvény, ahol $D_f = (1,\infty)$ és $R_f = \mathbf{R}$. Az f függvény f^{-1} inverzére az $f(f^{-1}(x)) = x$ tulajdonság alapján érvényes, hogy

$$\log(f^{-1}(x)-1)+3 = x, \quad \text{azaz} \quad f^{-1}(x) = 10^{x-3}+1,$$

ahol $D_{f^{-1}} = \mathbf{R}$ és $R_{f^{-1}} = (1,\infty)$.

FELADATOK.

Határozzuk meg a következő függvények inverzeit.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Megoldás. Az $y = x^2 - 4x + 3$ függvénygrafikonról megállapítható, hogy az f függvény bijektív a $(-\infty, 2]$, illetve a $[2,\infty)$ intervallumon, ezért ezek bármelyikén kereshetünk inverzfüggvényt. Ha $y = x^2 - 4x + 3$, akkor az $x \longleftrightarrow y$ változócsere után $x = y^2 - 4y + 3$, illetve $y^2 - 4y + 3 - x = 0$, innen pedig

$$y_1 = 2 + \sqrt{1+x} \quad \text{és} \quad y_2 = 2 - \sqrt{1+x}.$$

Ha az $f_1(x) = x^2 - 4x + 3$ függvény az f függvény leszűkítése az a $(-\infty, 2]$ intervallumra, vagyis $D_{f_1} = (-\infty, 2]$, az $f_2(x) = x^2 - 4x + 3$ függvény pedig az f függvény leszűkítése az a $[2,\infty)$ intervallumra, vagyis $D_{f_2} = [2,\infty)$, akkor

$$f_1^{-1}(x) = 2 - \sqrt{1+x}, \quad \text{és} \quad f_2^{-1}(x) = 2 + \sqrt{1+x},$$

és $R_f = [-1,\infty)$ miatt mindkét függvény értelmezési tartománya

$$D_{f_1^{-1}} = D_{f_2^{-1}} = [-1,\infty).$$

2. $f(x) = 2 \cdot 3^{x-2} - 1$

Megoldás. Írjuk fel a függvényt $y = 2 \cdot 3^{x-2} - 1$ alakban. Ekkor az $x \longleftrightarrow y$ változócsere után $x = 2 \cdot 3^{y-2} - 1$ írható fel, ahonnan

$$\frac{x+1}{2} = 3^{y-2}, \quad \text{illetve} \quad y - 2 = \log_3 \frac{x+1}{2}$$

egyenlőségekhez jutunk, ahonnan az inverzfüggvény $f^{-1}(x) = 2 + \log_3 \dfrac{x+1}{2}$.

3. $f(x) = 3 + \ln(2x+1)$

Megoldás. Mivel most $y = 3 + \ln(2x+1)$, az $x \longleftrightarrow y$ változócsere után felírható, hogy $x = 3 + \ln(2y+1)$. Ha ebből kifejezzük az y függő változót, akkor ebből

$$x - 3 = \ln(2y+1), \quad \text{illetve} \quad e^{x-3} = 2y+1,$$

ahonnan megkapjuk, hogy az inverzfüggvény $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\left(e^{x-3} - 1\right)$.

4. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

Megoldás. Végezzük el az $x \longleftrightarrow y$ változócserét az $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ egyenletben. Ekkor az $x = \dfrac{y+1}{y-1}$ egyenletet kapjuk, ahonnan ki kell fejeznünk az y függő változót. Az átalakítás során azt kapjuk, hogy $x(y-1) = y+1$, illetve $y(x-1) = x+1$, ahonnan az inverz függvény $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.
Vegyük észre, hogy az f függvény most önmagának inverze, ami azt jelenti, hogy a függvény grafikonja szimmetrikus az $y = x$ egyeneshez viszonyítva.

5. $f(x) = \dfrac{2^x - 2^{-x}}{2}$

Megoldás. Vezessük be az $y = \dfrac{2^x - 2^{-x}}{2}$ egyenletbe az $x \longleftrightarrow y$ változócserét. Ekkor az $x = \dfrac{2^y - 2^{-y}}{2}$ összefüggést kapjuk, amelyből ki kell fejezni a függő y változót. Rendezve az egyenletet adódik, hogy

$$2x = 2^y - \frac{1}{2^y}, \quad \text{illetve} \quad 2x \cdot 2^y = 2^{2y} - 1.$$

Ha a kapott egyenletben bevezetjük a $2^y = t$ helyettesítést, akkor a $t^2 - 2xt - 1 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelyből

$$t_1 = x + \sqrt{x^2+1} \quad \text{és} \quad t_2 = x - \sqrt{x^2+1},$$

illetve a visszahelyettesítés után

$$2^y = x + \sqrt{x^2+1} \quad \text{vagy} \quad 2^y = x - \sqrt{x^2+1}.$$

Mivel $x - \sqrt{x^2+1} < 0$, ezért csak a $2^y = x + \sqrt{x^2+1}$ egyenlőség lehetséges, ahonnan mindkét oldal logaritmálása után kapjuk meg, hogy $f^{-1}(x) = \log_2\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

6. $f(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$, $a > 0$, $a \neq 1$

Megoldás. Bővítsük az f függvényt a^x-nel. Így az $y = \dfrac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}$ egyenletbe kell bevezetni az $x \longleftrightarrow y$ változócserét, s ekkor $x = \dfrac{a^{2y}-1}{a^{2y}+1}$. Kifejezve ebből a függő változót adódik, hogy

$$a^{2y}(x-1) = x+1, \quad \text{illetve} \quad a^{2y} = \frac{x+1}{x-1},$$

amelyből megkaphatjuk, hogy a keresett inverzfüggvény $f^{-1}(x) = \log_a \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

7. $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$

Megoldás. Az $x \longleftrightarrow y$ változócsere után az $y = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ egyenletből kapjuk az $x = \ln \dfrac{1+y}{1-y}$ egyenletet, amelyből y-t fejezzük ki. Ekkor

$$e^x(1-y) = 1+y, \quad \text{illetve} \quad y\left(e^x+1\right) = e^x - 1$$

az ekvivalens egyenlet, ahonnan a keresett inverzfüggvény $f^{-1}(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

8. $f(x) = \log_a\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $a > 0$, $a \neq 1$

Megoldás. Ismételjük meg az előző feladatokból már jól ismert eljárást, azaz vezessük be az $y = \log_a\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ egyenletben az $x \longleftrightarrow y$ változócserét. Ekkor

$$x = \log_a\left(y + \sqrt{y^2+1}\right), \quad \text{ahonnan} \quad a^x - y = \sqrt{y^2+1}.$$

Négyzetre emelés után adódik, hogy

$$a^{2x} - 2ya^x + y^2 = y^2 + 1, \quad \text{illetve} \quad 2ya^x = a^{2x} - 1,$$

innen pdig következik, hogy az inverzfüggvény $f^{-1}(x) = \dfrac{a^x - a^{-1}}{2}$.

9. $f(x) = \dfrac{2}{1 - 2\sin 3x}$

Megoldás. Alkalmazzuk az $y = \dfrac{2}{1-2\sin 3x}$ egyenletre az $x \longleftrightarrow y$ változócserét. Ekkor az $x = \dfrac{2}{1-2\sin 3y}$ egyenletet kapjuk, ahonnan az

$$x - 2x\sin 3y = 2, \quad \text{illetve} \quad \frac{x-2}{2x} = \sin 3y$$

ekvivalens egyenleteket kapjuk. A keresett inverzfüggvény tehát

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\arcsin\frac{x-2}{2x}.$$

10. $f(x) = \dfrac{e^{\cos x} - 1}{2 + e^{\cos x}}$

Megoldás. Ha $y = \dfrac{e^{\cos x}-1}{2+e^{\cos x}}$, akkor az inverzfüggvényt az $x \longleftrightarrow y$ változócsere után az $x = \dfrac{e^{\cos y}-1}{2+e^{\cos y}}$ egyenletből határozzuk meg. Innen

$$e^{\cos y}(1-x) = 2x+1, \quad \text{azaz} \quad \cos y = \ln\frac{2x+1}{1-x},$$

a keresett inverzfüggvény pedig $f^{-1}(x) = \arccos\left(\ln\dfrac{2x+1}{1-x}\right)$.

11. Írjuk fel az $f(x) = \dfrac{x^2-4}{|x+1|}$ függvényt más alakban, az abszolútérték definíciójának felhasználásával.

Megoldás. Mivel

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0, \\ -x, & \text{ha } x < 0, \end{cases} \quad \text{így} \quad |x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{ha } x \geq -1, \\ -(x+1), & \text{ha } x < -1. \end{cases}$$

Ezért az f függvény felírható a következő alakban:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+1}, & \text{ha } x \geq -1, \\ \\ \frac{4-x^2}{x+1}, & \text{ha } x < -1. \end{cases}$$

12. Írjuk fel az $f(x) = (x+2)\operatorname{sgn}(x+5) - 3x + 2$ függvényt más alakban, az előjel függvény definíciójának felhasználásával.

Megoldás. Mivel

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ -1, & \text{ha } x < 0, \end{cases} \quad \text{ezért} \quad f(x) = \begin{cases} (x+2)\cdot 1 - 3x + 2, & \text{ha } x > -5, \\ (x+2)\cdot 0 - 3x + 2, & \text{ha } x = -5, \\ (x+2)\cdot(-1) - 3x + 2, & \text{ha } x < -5, \end{cases}$$

rendezés után pedig

$$f(x) = \begin{cases} 4-2x, & \text{ha } x > -5, \\ 2-3x, & \text{ha } x = -5, \\ -4x, & \text{ha } x < -5. \end{cases}$$

13. Ha $f(x) = 2x - 1$, akkor határozzuk meg az x és y értékét úgy, hogy $f(f(x)) = 0$ és $f(f(y)) = y$ igaz legyen.

Megoldás. Alkalmazva az összetett függvény szabályát az $f(f(x)) = 0$ feltételből az

$$f(2x-1) = 0 \quad \text{illetve} \quad 2(2x-1) - 1 = 0$$

egyenlet következik, amelynek megoldása $x = \dfrac{3}{4}$.
Az $f(f(y)) = y$ feltételből következik, hogy

$$f(2y-1) = y \quad \text{vagyis} \quad 2(2y-1) = y,$$

így a kapott egyenlet megoldása $y = 1$.

14. Ha $f(x) = 2x + 1$, akkor határozzuk meg a g függvényt az $f(1 + g(x)) = 2x + 3$ összefüggésből.

Megoldás. Ha $f(1 + g(x)) = 2x + 3$, akkor az f függvény definíciója alapján érvényes, hogy $2(1 + g(x)) + 1 = 2x + 3$ azaz $2 + 2g(x) + 1 = 2x + 3$, ahonnan $g(x) = x$.

15. Keressük meg mindazokat az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényeket, melyekre $f(2010) = 1$ és $f(x)f(y) = f(x-y)$ érvényes legyen minden $x, y \in \mathbf{R}$ esetén.

Megoldás. Vegyük észre, hogy minden $y \in \mathbf{R}$ esetén $f(y) \neq 0$ kell legyen, mert ha létezne olyan $y \in \mathbf{R}$, amelyre $f(y) = 0$ lenne, akkor minden $x \in \mathbf{R}$ esetén érvényes lenne, hogy $f(x) \cdot 0 = f(x-y)$, amely csak $f(x) \equiv 0$ esetén lenne igaz, de ez az $f(2010) = 1$ feltétel miatt nem lehetséges.
Vegyük észre továbbá azt, hogy $x = 2y$ választásával (ami lehetséges, hiszen az $f(x)f(y) = f(x-y)$ egyenlet minden $x, y \in \mathbf{R}$ esetén érvényes)

$$f(2y)f(y) = f(y)$$

adódik, ahonnan $f(2y) = f(x) = 1$, amely függvény eleget tesz az $f(2010) = 1$ feltételnek is. Így a keresett függvény az $f(x) = 1$ konstans függvény.

16. Határozzuk meg mindazokat az f valós függvényeket, melyekre érvényes, hogy $f(xy) = f(x)f(y)$ és $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$ minden $x, y \in \mathbf{R}$ esetén.

Megoldás. Ha $y = 0$, akkor az $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$ feltételből következik, hogy $f(x) = f(x) + f(0)$, azaz $f(0) = 0$ adódik. Ha az $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$ feltételben $y = -x$, akkor

$$f(0) = f(x) + f(-x) - 2x^2.$$

Mivel $f(0) = 0$, így az következik, hogy $f(x) + f(-x) = 2x^2$. Írjuk fel az előbbi lépésben kapott feltételt $f(x \cdot 1) + f(x \cdot (-1)) = 2x^2$ alakban, majd alkalmazzuk rá az $f(xy) = f(x)f(y)$ feltételt. Ekkor

$$f(x) \cdot f(1) + f(x) \cdot f(-1) = 2x^2, \quad \text{ahonnan} \quad f(x)(f(1) + f(-1)) = 2x^2.$$

Ha most az $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$ feltételben $x = 1$-et és $y = -1$-et választunk, akkor $f(1) + f(-1) = 2$ következik, ahonnan megkapjuk az $f(x) = x^2$ megoldást.

17. Ha $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ és $g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, akkor mutassuk meg, hogy

$$f(x \pm y) = f(x)g(y) \pm g(x)f(y).$$

Megoldás. Először mutassuk meg, hogy $f(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$ teljesül.

$$f(x+y) = \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} = \frac{e^{2(x+y)} - 1}{2e^{x+y}} = \frac{2e^{2x}e^{2y} - 2}{4e^x e^y} =$$

$$= \frac{(e^{2x}e^{2y} - e^{2y} + e^{2x} - 1) + (e^{2x}e^{2y} + e^{2y} - e^{2x} - 1)}{4e^x e^y} =$$

$$= \frac{(e^{2x} - 1)(e^{2y} + 1)}{2e^x \cdot 2e^y} + \frac{(e^{2x} + 1)(e^{2y} - 1)}{2e^x \cdot 2e^y} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} \cdot \frac{e^{2y} + 1}{2e^y} + \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} \cdot \frac{e^{2y} - 1}{2e^y} =$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} = f(x)g(y) + g(x)f(y).$$

Mutassuk meg hasonlóképpen, hogy az $f(x-y)=f(x)g(y)-g(x)f(y)$ összefüggés is teljesül.

$$f(x-y)=\frac{e^{x-y}-e^{-x+y}}{2}=\frac{e^{2(x-y)}-1}{2e^{x-y}}=\frac{2e^{2x}e^{-2y}-2}{4e^xe^{-y}}=$$

$$=\frac{(e^{2x}e^{-2y}-e^{2x}+e^{-2y}-1)+(e^{2x}e^{-2y}+e^{2x}-e^{-2y}-1)}{4e^xe^{-y}}=$$

$$=\frac{(e^{2x}-1)\,(e^{-2y}+1)}{2e^x\cdot 2e^{-y}}+\frac{(e^{2x}+1)\,(e^{-2y}-1)}{2e^x\cdot 2e^{-y}}=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}\cdot\frac{e^{-2y}+1}{2e^{-y}}+\frac{e^{2x}+1}{2e^x}\cdot\frac{e^{-2y}-1}{2e^{-y}}=$$

$$=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^{-y}-e^y}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^{-y}+e^y}{2}=f(x)g(y)-g(x)f(y).$$

18. Legyen $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ adott függvény és $n\in\mathbf{N}$. Határozzuk meg az $f_n(x)$ kifejezést, ha $f_1(x)=f(x)$ és $f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$.

Megoldás. Mivel

$$f_1(x)=f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$f_2(x)=f(f_1(x))=f\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{\sqrt{1+2x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

$$f_3(x)=f(f_2(x))=f\left(\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\right)=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+2x^2}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\frac{\sqrt{1+3x^2}}{\sqrt{1+2x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

$$f_4(x)=f(f_3(x))=f\left(\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}\right)=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+3x^2}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}}{\frac{\sqrt{1+4x^2}}{\sqrt{1+3x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+4x^2}},$$

ahonnan most már megsejthetjük, hogy

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}},\quad n\in\mathbf{N}.$$

Az állítást matematikai indukcióval bizonyítjuk.
1^o $n=1$-re az állítást igaz.
2^o Feltesszük, hogy az állítás igaz $n=k$-ra, azaz $f_k(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$, $k\in\mathbf{N}$.
3^o Igazoljuk, hogy ekkor az állítás $n=k+1$-re is igaz. Mivel

$$f_{k+1}(x)=f(f_k(x))=f\left(\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}\right)=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+kx^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}},$$

ezzel az állítást igazoltuk.

19. Mutassuk meg, hogy minden valós x esetén $\operatorname{arctg} x=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Megoldás. Ha két függvényérték egyenlő, akkor tangenseik is egyenlőek, tehát

$$\operatorname{tg}\,(\operatorname{arctg} x)=\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right),\quad x\in\mathbf{R}.$$

Használjuk fel, hogy $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$ és végezzük el a megfelelő transzformációkat. Ekkor

$$x = \frac{\sin\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}}, \quad \text{innen} \quad x = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}, \quad \text{illetve} \quad x = x$$

következik, amivel az állításunkat igazoltuk.

20. Mutassuk meg, hogy ha $|x| < 1$, akkor $\arcsin x = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Megoldás. Vegyük észre, hogy $|x| < 1$ esetén az $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ kifejezés értelmezett. Ha két függvényérték megegyezik, akkor színuszaik is megegyeznek, tehát

$$\sin(\arcsin x) = \sin\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right), \quad |x| < 1.$$

A $\sin\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$ trigonometriai azonosság alkalmazásával következik, hogy

$$x = \frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}}, \quad \text{ebből} \quad x = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}}, \quad \text{illetve} \quad x = x$$

következik, amivel az állításunkat igazoltuk.

3.2. Függvények folytonossága

3.2.1. A folytonosság definíciója

3.29. Példa. Tekintsük az $f(x) = \operatorname{sgn} x$ előjel függvényt ($D_f = \mathbf{R}$) és az $x = 0$ pontot. Tudjuk, hogy $\operatorname{sgn}(0) = 0$. Vegyünk egy olyan 0-hoz tartó $\{x_n\}$ sorozatot, amelyben $x_n < 0$. Legyen például $x_n = -\dfrac{1}{2^n}$. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, a megfelelő függvényértékekből alkotott sorozat határértékére pedig érvényes, hogy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(-\frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty}(-1) = -1.$$

Ha $x_n = \dfrac{1}{2^n}$, akkor most $x_n > 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, a megfelelő függvényértékekből alkotott sorozat határértékére pedig igaz, hogy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty}(+1) = 1.$$

Vegyünk most olyan 0-hoz tartó sorozatot, amelyben az elemek felváltva pozitív, illetve negatív előjelűek. Legyen például $x_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$, ahol $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, a megfelelő függvényértékekből alkotott sorozat pedig

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1, \quad f\left(\frac{1}{2^2}\right) = 1, \quad f\left(-\frac{1}{2^3}\right) = -1, \quad f\left(\frac{1}{2^4}\right) = 1,$$

$$f\left(-\frac{1}{2^5}\right) = -1, \quad \dots \quad f\left(\frac{(-1)^n}{2^n}\right) = (-1)^n, \quad \dots$$

Ez a sorozat nem is konvergens. Megállapíthatjuk tehát, hogy az $f(x) = \operatorname{sgn} x$ függvény értéke nullában értelmezett és $f(0) = 0$. Ha az $\{x_n\}$ sorozat balról tart 0-hoz, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = -1$, ha az $\{x_n\}$ sorozat jobbról tart 0-hoz, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1$, és ezek a határértékek nem egyeznek meg az $f(0)$ függvényértékkel, a 0-hoz tartó oszcilláló $\{x_n\}$ sorozat esetén pedig $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ nem is létezik. Vegyük észre azt is, hogy a szignum függvény grafikonja a 0-ban megszakad.

3.30. Példa. Tekintsük most az $f(x) = \{x\}$ törtrész függvényt és az $x = 1$ pontot ($D_f = \mathbf{R}$), ahol a $\{x\} = x - [x]$, vagyis $[x]$ az x valós szám egész részét, $\{x\}$ pedig az x valós szám törtrészét jelöli. Vegyünk először olyan sorozatot, melynek minden eleme 1-nél kisebb és 1-hez tart. Ilyen például az $x_n = \frac{n-1}{n}$. E sorozat elemeihez tartozó függvényértékekből alkotott sorozat

$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}, \quad f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}, \ \dots \ f\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{n-1}{n}, \ \dots$$

Így a függvényértékekből alkotott sorozat 1-hez tart. Vegyünk most olyan sorozatot, amelynek minden eleme 1-nél nagyobb és ez a sorozat is tartson 1-hez. Ilyen például az $x_n = \frac{n+1}{n}$. E sorozat elemeihez tartozó függvényértékekből alkotott sorozat

$$f(2) = 0, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}, \quad f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4}, \ \dots \ f\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n}, \ \dots$$

Ez a sorozat 0-hoz konvergál. Tudjuk továbbá azt is, hogy a függvényérték $f(1) = \{1\} = 1 - [1] = 1 - 1 = 0$. Vegyük tehát észre, hogy $f(1) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1$, ha az $\{x_n\}$ sorozat balról tart 1-hez, és $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, ha az $\{x_n\}$ sorozat jobbról tart 1-hez. A törtrész függvény grafikonjáról azt is láthatjuk, hogy a grafikon 1-ben megszakad.

3.31. Példa. Tekintsük most az $f(x) = x^2$ függvényt és az $x = \frac{1}{2}$ pontot. Ekkor $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$. Vegyünk fel olyan tetszőleges $\{x_n\}$ sorozatot, amely $\frac{1}{2}$-hez tart. A megfelelő függvényértékek sorozata $\{x_n^2\}$ és határértékére igaz, hogy

$$\lim_{n\to\infty} (x_n)^2 = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

amely érték megegyezik az $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ függvényértékkel. Ha az $f(x) = x^2$ függvény grafikonját vizsgáljuk az $x = \frac{1}{2}$ pontban, akkor az előző két példával ellentétben megállapíthatjuk, hogy a függvény grafikonja az $x = \frac{1}{2}$ pontban nem szakad meg.
Másképpen is leírható a függvény $\frac{1}{2}$-ben vizsgált tulajdonsága. Adjunk meg egy tetszőleges pozitív ε számot és legyen $0 < x < 1$. Ekkor

$$\left|x^2 - \frac{1}{4}\right| = \left|x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right| = \left|x + \frac{1}{2}\right| \cdot \left|x - \frac{1}{2}\right| \leq \left(|x| + \frac{1}{2}\right)\left|x - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{3}{2}\left|x - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon,$$

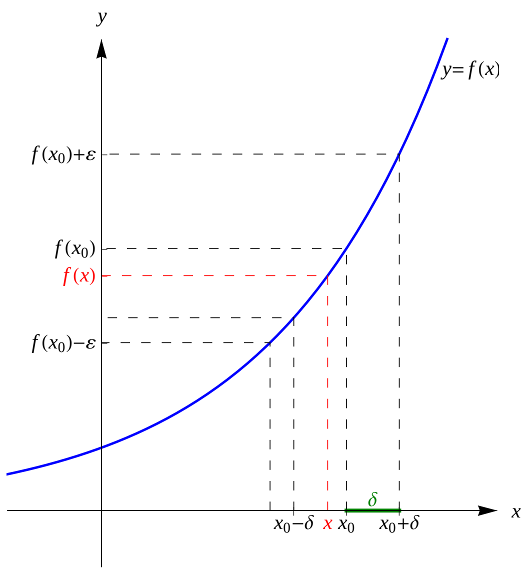
ha

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Ezért, ha a δ pozitív számot $\frac{1}{2}$-nél kisebbre választjuk, akkor az $\frac{1}{2}$-nek van olyan δ-sugarú környezete, hogy az ebbe eső x pontokban a függvény értéke az $\frac{1}{4}$ függvényértéktől ε-nál kevesebbel tér el.

Ezen gondolatmenet alapján megfogalmazhatjuk a folytonosság definícióját. Ezért a továbbiakban mindig feltesszük, hogy a függvény, nemcsak a vizsgált pontban, hanem annak valamely környezetében (esetleg csak félkörnyezetében) értelmezve van. A folytonosság pontos fogalmára két definíciót is adunk.

3.11. Definíció. *(Cauchy). Az f függvény folytonos az x_0 pontban, ha bármely pozitív ε-hoz megadható olyan pozitív δ (δ az ε és az x_0 függvénye), hogy $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D_f$, és ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, miközben $x_0, x \in D_f$.*



3.12. Definíció. *(Heine). Az f függvény folytonos az $x_0 \in D_f$ pontban, ha f az x_0 szimmetrikus környezetében értelmezve van, és minden olyan $\{x_n\}$ ($x_n \in D_f$) sorozatra, amely x_0-hoz tart, az $f(x_n)$ függvényértékek sorozata az $f(x_0)$ függvényértékhez tart.*

Ezen definíciók azon megfogalmazásnak adnak pontos értelmet, miszerint, ha az x pont elég közel van x_0-hoz, akkor $f(x)$ közel van $f(x_0)$-hoz. Belátható, hogy a Heine-féle és a Cauchy-féle folytonossági definíciók ekvivalensek. Az alábbiakban megadjuk a féloldali folytonosság fogalmát is a Cauchy-féle megfogalmazás szerint. Minden folytonossági definíció megfogalmazható Heine szerint is.

3.13. Definíció. *(Cauchy). Az f függvényt az x_0-ban balról (jobbról) folytonosnak nevezzük, ha f az x_0 megfelelő félkörnyezetében értelmezett és bármely $\varepsilon > 0$-hoz megadható olyan pozitív δ (δ az ε és az x_0 függvénye), hogy $x < x_0$ ($x > x_0$) és $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ ($x \in (x_0, x_0 + \delta)$), akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, miközben $x_0, x \in D_f$.*

3.1. Tétel. *Az f függvény egy x_0 pontban akkor és csak akkor folytonos, ha x_0-ban balról is és jobbról is folytonos.*

3.32. Példa. a) Az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény minden $x \geq 0$ pontban folytonos.

b) Az $f(x) = \operatorname{sgn} x$ függvény az $x = 0$ pontban nem folytonos.

c) Az $x \mapsto \{x\}$, az ún. törtrész-függvény minden egész értékben balról nem folytonos, jobbról viszont folytonos.

3.2.2. Folytonos függvények

3.2. Tétel. *Ha két függvény folytonos az x_0 pontban, akkor összegük, különbségük és szorzatuk is folytonos az x_0 pontban. Hányadosuk is folytonos, ha a nevezőben levő függvény az x_0 pontban nullától különböző.*

3.3. Tétel. *Az $f \circ g$ összetett függvény folytonos az x_0 pontban, ha a g belső függvény folytonos x_0 pontban és az f függvény folytonos $g(x_0)$ pontban.*

A folytonosság pontbeli tulajdonság, bár a függvénynek a vizsgált pont környezetében való értelmezettsége is szükséges az e pontbeli folytonossághoz. Most ezt a pontbeli tulajdonságot intervallumokra is kiterjesztjük.

3.14. Definíció. *Az f függvényt egy nyitott intervallumon folytonosnak nevezzük, ha az intervallum minden pontjában folytonos. Az f függvényt egy zárt intervallumon folytonosnak nevezzük, ha az intervallum minden belső pontjában folytonos, a bal végpontban jobbról és a jobb végpontban balról folytonos.*

3.15. Definíció. *Egy függvényt folytonosnak mondunk, ha értelmezési tartományának minden pontjában folytonos.*

Amennyiben az értelmezési tartomány több intervallumból áll, akkor minden intervallumon megköveteljük a folytonosságot. Az olyan helyeken, ahol a függvény nincs értelmezve, a folytonosság kérdésének feltevése eleve indokolatlan. Fontos megjegyezni, hogy az elemi függvények folytonosak az értelmezési tartományukon.

3.4. Tétel. *(Bolzano-tétel). Ha a függvény a zárt intervallumon folytonos, és az intervallum két végpontjában az értékei különböző előjelűek, akkor az intervallum belsejében van nullahelye.*

A tétel geometriai jelentése a következő: ha az f függvény az $[a, b]$ zárt intervallumban folytonos és grafikonjának az x-tengely mindkét oldalán van pontja, akkor van a grafikon e két pont közötti ívének az x-tengellyel legalább egy metszéspontja.

A következő tétel a zárt intervallumon folytonos függvények, a későbbi alkalmazások szempontjából nagyon fontos tulajdonságát fogalmazza meg.

3.5. Tétel. *Zárt intervallumon folytonos függvény korlátos ezen az intervallumon.*

A tétel geometriai jelentése: ha az f függvény az $[a,b]$ intervallumban folytonos, akkor grafikonja nem távolodhat el akármilyen messzire az x-tengelytől; megadható olyan, az x-tengellyel párhuzamos sáv, hogy az f függvény grafikonjának az $[a,b]$ intervallumhoz tartozó szakasza a sávban halad.

Végül következzen két tétel, melyek az inverz függvényekkel kapcsolatosak.

3.6. Tétel. *Legyen az f függvény folytonos az $[a,b]$ intervallumon, ekkor az f^{-1} függvény létezéséhez szükséges és elégséges, hogy az f függvény szigorúan monoton legyen az $[a,b]$ intervallumon.*

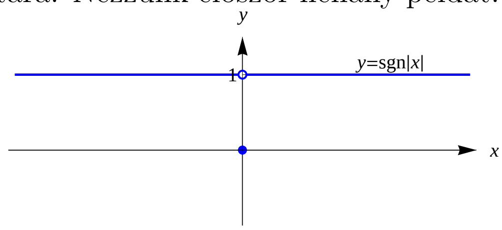
3.7. Tétel. *Ha f az $[a,b]$ intervallumon szigorúan monoton folytonos függvény, inverze, f^{-1} is folytonos azon az $[\alpha,\beta]$ intervallumon, amelynek végpontjai $\alpha = \min\{f(a), f(b)\}$ és $\beta = \max\{f(a), f(b)\}$.*

3.3. Függvények határértéke

3.3.1. Függvény határértékével kapcsolatos alapfogalmak

Legtöbbször olyan függvényeket vizsgálunk, amelyek egy intervallumon vannak értelmezve. Vannak azonban olyan példák is, ahol a függvények egy pontban vagy nincsenek értelmezve, vagy az adott pontban végtelen nagy értéket vesznek fel. Ilyen esetekben szükség van a függvénynek a pont egy környezetében való vizsgálatára. Nézzünk először néhány példát.

3.33. Példa. Az $f(x) = \operatorname{sgn}|x|$ függvény az origóban nem folytonos, viszont ha $x_n \neq 0$ és $x_n \to 0$, akkor a $\{\operatorname{sgn}|x_n|\}$ sorozat konvergens és 1-hez tart, hiszen minden n-re $\operatorname{sgn}|x_n| = 1$.



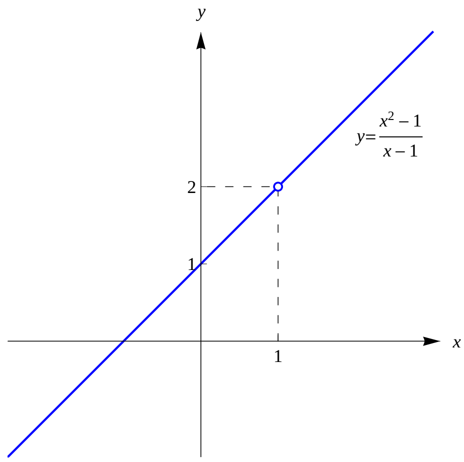
3.34. Példa. Az

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

függvény az $x = 1$ pontban nem folytonos, de megállapíthatjuk, hogy bármely $x_n \to 1$ és $x_n \neq 1$ sorozatra

$$\left\{\frac{x_n^2-1}{x_n-1}\right\} = \{x_n+1\}$$

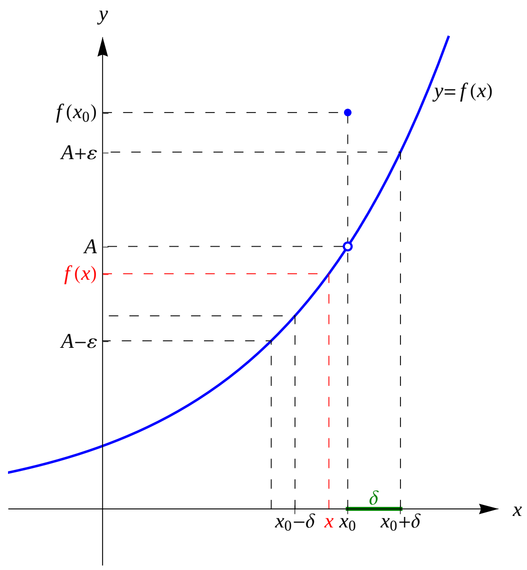
konvergens és 2-höz tart.



3.35. Példa. Az $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ függvény az origóban nem folytonos, de bármely más pontban igen. Bármely $x_n \neq 0$ és például $x_n \to 2$ sorozatra a $\left\{\dfrac{1}{x_n^2}\right\}$ konvergens, sőt határértéke megegyezik a függvény $x = 2$ pontban vett helyettesítési értékével, az $\dfrac{1}{4}$-del.

Az ilyen és hasonló tulajdonságú függvényekről azt mondjuk, hogy létezik a határértékük. Most is azt feltételezzük, hogy a vizsgált pont valamely környezetében vagy félkörnyezetében értelmezve van a függvény (a vizsgált helyen a függvény nem feltétlenül értelmezett).

3.16. Definíció. *Legyen az f függvény az x_0 pont valamely környezetében értelmezett, kivéve esetleg az x_0 pontot. Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvény x_0 pontbeli határértéke az A szám, ha bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$ (δ függvénye ε-nak és az x_0-nak), hogy ha $|x - x_0| < \delta$ $(x \neq x_0)$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$. Természetesen $x \in D_f$.*



3.36. Példa. A fenti példák esetében tehát felírható, hogy

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}|x| = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

3.17. Definíció. *Legyen az f függvény az x_0 pont valamely jobb, illetve bal oldali félkörnyezetében értelmezett, kivéve esetleg az x_0 pontot. Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvény x_0 pontbeli jobboldali (baloldali) határértéke az A szám, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $\delta > 0$ (δ függvénye ε-nak és az x_0-nak), hogy ha $x_0 < x < x_0 + \delta$ $(x_0 - \delta < x < x_0)$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$. Természetesen $x \in D_f$.*

A jobboldali, illetve baloldali határértékek jelölése:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A, \quad \text{illetve} \quad \lim_{x\to x_0-0} f(x) = A.$$

3.37. Példa. a) Az $f(x) = \operatorname{sgn} x$ függvény viselkedését az $x = 0$ pont környezetében a féloldali határértékek segítségével így írhatjuk fel:

$$\lim_{x\to 0-0} \operatorname{sgn} x = -1 \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 0+0} \operatorname{sgn} x = 1.$$

b) Az $f(x) = [x]$ egészrész függvény viselkedése az $x = 3$ pont környezetében így írható fel:

$$\lim_{x\to 3-0} [x] = 3 \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 3+0} [x] = 4.$$

c) Az $f(x) = \{x\}$ törtrész függvény viselkedése az $x = 2$ pont környezetében így írható fel:

$$\lim_{x\to 2-0} \{x\} = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 2+0} \{x\} = 0.$$

3.8. Tétel. *Az f függvénynek az x_0 pontban akkor és csak akkor létezik határértéke, ha ott létezik a jobb és bal oldali határértéke és ezek egyenlőek, azaz*

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

3.3.2. Függvény határértékének tulajdonságai

Most pedig megfogalmazunk néhány, a függvényekkel végezhető műveletekre, a függvények határértékére és folytonosságára vonatkozó egyszerű állítást.

3.9. Tétel. *Ha* $f(x) \geq 0$ *és* $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *létezik, akkor* $\lim_{x \to x_0} f(x) \geq 0$.

3.10. Tétel. *Ha* $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *és* $\lim_{x \to x_0} g(x)$ *létezik, akkor az* x_0 *pontban az* f *és* g *függvények összegének és különbségének határértéke is létezik és*

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x).$$

3.11. Tétel. *Ha* $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *és* $\lim_{x \to x_0} g(x)$ *létezik, akkor az* x_0 *pontban az* f *és* g *függvények szorzatának határértéke is létezik és*

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x).$$

3.12. Tétel. *Ha* $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *és* $\lim_{x \to x_0} g(x)$ *létezik és* $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, *akkor az* x_0 *pontban az* f *és* g *függvények hányadosának határértéke is létezik és*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}.$$

3.13. Tétel. *Ha* $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *és* $\lim_{x \to x_0} g(x)$ *létezik, valamint az* x_0 *valamely környezetében* $f(x) \geq g(x)$, *akkor*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \geq \lim_{x \to x_0} g(x).$$

3.14. Tétel. *(Rendőr-elv). Ha* $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *és* $\lim_{x \to x_0} g(x)$ *határértékek léteznek és egyenlőek, azaz*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = A$$

valamint az x_0 *valamely környezetében* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, *akkor*

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = A.$$

3.15. Tétel. *Az* f *függvénynek* x_0*-ban akkor és csak akkor létezik határértéke, ha* $\{f(x_n)\}$ *konvergens, valahányszor* $x_n \to x_0$ $(x_n \neq x_0)$, $x_n \in D_f$.

3.16. Tétel. *Az* f *függvény akkor és csak akkor folytonos az* x_0 *pontban, ha az* x_0 *pontban létezik határértéke és*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

3.3.3. Végtelenben vett és végtelen határérték

Az eddigiekben véges helyen vett véges határértékről beszéltünk. A következőkben a véges helyen vett "végtelen értékű" és a "végtelenben vett" határértéket ismertetjük.

3.18. Definíció. *Legyen az f függvény az x_0 pont valamely környezetében értelmezett, kivéve esetleg az x_0 pontot. Ekkor az f függvénynek az x_0 pontban $+\infty$ ($-\infty$) a határértéke, ha bármely M számhoz megadható olyan $\delta > 0$ (δ függvénye M-nek és az x_0-nak), hogy ha $|x - x_0| < \delta$ $(x \neq x_0)$, akkor $f(x) > M$ ($f(x) < M$) teljesül. Természetesen $x \in D_f$.*

A végtelen határérték jelölése:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

3.38. Példa. Az $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, illetve a $g(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ függvény viselkedése az $x = 0$ pont környezetében felírható, mint

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty, \quad \text{illetve} \quad \lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty.$$

A fentiekhez hasonlóan definiálhatók a féloldali végtelen határértékek is.

3.39. Példa. a) A féloldali végtelen határértékek segítségével az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvény viselkedése az $x = 0$ pont környezetében felírható, mint

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = \infty.$$

b) A féloldali végtelen határértékre szükségünk akkor is, ha a logaritmusfüggvény viselkedését szeretnénk leírni az $x = 0$ pont környezetében, hiszen ez a függvény az $x = 0$ pontnak csak a jobboldali környezetében értelmezett. Felírható, hogy

$$\lim_{x \to 0+0} \log_a x = -\infty \quad (a > 1) \quad \text{és} \quad \lim_{x \to 0+0} \log_a x = \infty \quad (0 < a < 1).$$

A következőkben feltesszük, hogy a megfelelő félegyenesen a függvény értelmezett.

3.19. Definíció. *Az f függvénynek a $+\infty$-ben ($-\infty$-ben) a határértéke az A szám, ha bármely $\varepsilon > 0$-hoz megadható olyan x^* (x^* függvénye ε-nak), hogy ha $x > x^*$ ($x < x^*$), akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$. Természetesen $x \in D_f$.*

A határérték jelölése a végtelenben:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = A.$$

3.20. Definíció. *Az f függvénynek a $+\infty$-ben ($-\infty$-ben) a határértéke $+\infty$, illetve $-\infty$, ha bármely M számhoz van olyan x^* szám (x^* függvénye M-nek), hogy ha $x > x^*$ ($x < x^*$), akkor $f(x) > M$, illetve $f(x) < M$. Természetesen $x \in D_f$.*

A végtelenben vett végtelen határérték jelölése:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

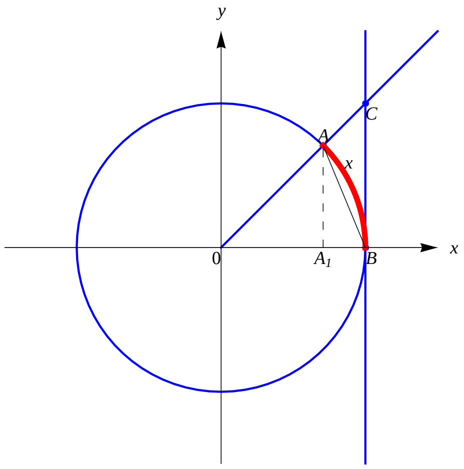
3.3.4. Néhány fontosabb határérték

I. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Bizonyítás. Mivel a $\dfrac{\sin x}{x}$ függvény páros, ezért csak az $x > 0$ esetet tárgyaljuk. Mutassuk meg először, hogy

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad \text{ha} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

A bizonyításhoz felhasználjuk az egységsugarú kört, amelynek középpontja a koordinátarendszer kezdőpontja, a sugara pedig egy hosszúságegység. Ebben az x változót az $\widehat{AB}$ körív jelenti, ahol B a körvonal x-tengellyel való metszéspontja, A pedig a körvonal I. negyedbe eső tetszőleges pontja. Legyen A_1 az A pont x-tengelyre eső merőleges vetülete, C pedig az OA félegyenes és a kör B pontban szerkesztett érintőjének metszéspontja. A rajzról leolvasható, hogy $AA_1 = \sin x$ és $BC = \operatorname{tg} x$, s az is jól látható, hogy az AOB körcikk területe az $OAB\triangle$ és az $OBC\triangle$ területe közé esik. Ennek következtében, mivel a kör sugara 1, következik, hogy



$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot x < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \operatorname{tg} x,$$

amiből a $\sin x$ értékkel való osztás és 2-vel való szorzás után következik, hogy

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \text{vagyis} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Tudjuk, hogy az $f(x) = \cos x$ folytonos a 0 pontban és $\cos 0 = 1$. Így ha $x \to 0$ $(x \neq 0)$, akkor $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$. A *rendőr-elv* szerint tehát következik, hogy $\lim\limits_{x\to 0-0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, ebből pedig a $\dfrac{\sin x}{x}$ függvény párossága miatt $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ is igaz. $\diamond$

II. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

Bizonyítás. A bizonyítás a számsorozatokra vonatkozó $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$ határérték segítségével történik. Ha $[x]$ az x valós szám egész része, akkor $[x] = n \in \mathbf{N}$ és érvényes az $[x] \le x < [x]+1$ egyenlőtlenség. Ha $x \to \infty$, akkor $[x] = n \to \infty$ is teljesül. Megmutatjuk, hogy

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = e.$$

Legyen

$$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \quad \text{és} \quad g(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

A számsorozatokról szóló fejezetben már beláttuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e.$$

Innen az

$$f_1(x)=f([x])=\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \quad \text{és} \quad g_1(x)=g([x])=\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1},$$

függvények definiálásával következik, hogy

$$\lim_{x\to\infty}f_1(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}=\lim_{x\to\infty}f([x])=\lim_{n\to\infty}f(n)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=e,$$

és

$$\lim_{x\to\infty}g_1(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}=\lim_{x\to\infty}g([x])=\lim_{n\to\infty}g(n)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}e.$$

Legyen most

$$h(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Mivel $\lim\limits_{x\to\infty}f_1(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g_1(x)=e$, valamint $f_1(x)\le h(x)\le g_1(x)$ érvényes minden x valós számra, ezért a *rendőr-elv* alapján

$$\lim_{x\to\infty}h(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

◇

III. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

Bizonyítás. Ha a 2. alaphatárértékben bevezetjük az $\dfrac{1}{x}=y$ helyettesítést, akkor $x\to\infty$ akkor és csakis akkor, ha $y\to 0$. Ekkor közvetlenül adódik, hogy

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e, \quad \text{vagy} \quad y=x \quad \text{esetén} \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

E ténynek és a logaritmusfüggvény folytonosságának felhasználásával adódik, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln e=1.$$

◇

IV. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$ $(a>0,\ a\neq 1)$ és $a=e$ esetén $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

Bizonyítás. Alkalmazzuk az $y=a^x-1$ helyettesítést, ahol $x\to 0$ akkor és csakis akkor, ha $y\to 0$. Ekkor

$$x=\log_a(y+1)=\frac{\ln(1+y)}{\ln a}, \quad \text{tehát} \quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\frac{\ln(1+y)}{\ln a}}=\ln a,$$

ahol a 3. alaphatárértéket és a két függvény hányadosának határértékére vonatkozó szabályt alkalmaztuk. $\diamond$

V. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha\ (\alpha\in\mathbf{R},\ \alpha\neq 0)$

Bizonyítás. Ha az $(1+x)^\alpha$ kifejezést $e^{\alpha\ln(1+x)}$ alakban írjuk fel és alkalmazzuk a 3. és 4. alaphatárértéket, akkor a következőket kapjuk:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\ln(1+x)}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{\frac{y}{\alpha}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\alpha\cdot 1\cdot 1=\alpha,$$

ahol az első határértéknél alkalmaztuk az $\alpha\ln(1+x)=y$ helyettesítést, ahol $x\to 0$ akkor és csakis akkor, ha $y\to 0$. $\diamond$

VI. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 2. alaphatárértéket. Ha $x\to 0+0$, akkor $t=\dfrac{1}{x}$ esetén $t\to+\infty$ és

$$\lim_{x\to 0+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e.$$

Ha $x\to 0-0$, akkor $s=-\dfrac{1}{x}$ esetén $s\to-\infty$ és

$$\lim_{x\to 0-0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{s\to+\infty}\left(1-\frac{1}{s}\right)^{-s}=\lim_{s\to+\infty}\left(\frac{s}{s-1}\right)^s=\lim_{s\to+\infty}\left(1+\frac{1}{s-1}\right)^{s-1+1}=$$

$$=\lim_{s\to+\infty}\left(1+\frac{1}{s-1}\right)^{s-1}\cdot\lim_{s\to+\infty}\left(1+\frac{1}{s-1}\right)^1=\lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z\cdot 1=e.$$

A levezetés során alkalmaztuk a $z=s-1$ helyettesítést, ahol $z\to+\infty$, akkor és csakis akkor, ha $s\to+\infty$. $\diamond$

Függvények határértékeinek kiszámításánál a következő határozatlan kifejezésekkel találkozhatunk:

1^o $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$,

2^o $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$,

3^o 1^∞, 0^0, ∞^0.

FELADATOK.

Számoljuk ki a következő határértékeket.

1. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-5}{x-1}$

Megoldás. Egyszerű behelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-5}{x-1}=\frac{4+6-5}{2-1}=5.$$

2. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-5}{x-1}$

Megoldás. Egyszerű behelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-5}{x-1}=\frac{1+3-5}{1-1}=\frac{-1}{-0}=+\infty.$$

3. $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

Megoldás. Egyszerű behelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{e^0-e^{-0}}{2}=\frac{1-1}{2}=\frac{0}{2}=0.$$

4. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$

Megoldás. Ugyancsak behelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1-\cos x}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1-\cos\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{1-0}=1.$$

5. $\lim_{x\to +0}\dfrac{\ln x}{x+2}$

Megoldás. Most is egyszerű behelyettesítéssel kapjuk meg a keresett határértéket:

$$\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{x+2}=\frac{-\infty}{0+2}=-\infty.$$

Amennyiben a határérték behelyettesítés után $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú határozatlan kifejezés, akkor x legmagasabb kitevőjű hatványának a számlálóból és a nevezőből való kiemelésével, majd leegyszerűsítésével juthatunk egyszerűbb alakhoz, amelyből a határérték meghatározható. Ezt a megoldási módszert már alkalmaztuk a sorozatok határértékeinél is, ezért az analógia miatt csak néhány feladatot mutatunk be.

6. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x+7}{4x^3+5x^2+6x}$

Megoldás. Ha végtelen nagy számot helyettesítünk az x változó helyébe, akkor $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú határozatlan kifejezést kapunk. Ekkor

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x+7}{4x^3+5x^2+6x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(3-\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3})}{x^3(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}}{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}=\frac{3}{4},$$

mivel $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{C}{x^k}=0$, ha $C=konstans$ és $n\in\mathbf{N}$.

7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+x^2+x+1}{3x^2-2x+1}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x^2+x+1}{3x^2-2x+1}=\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{-\infty}{3}=-\infty.$$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+5}{7x^2-8x+2}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+5}{7x^2-8x+2}=\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}{x\left(7x-8+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{5}{x}}{7x-8+\frac{2}{x}}=\frac{1}{\infty}=0.$$

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+2}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1+\frac{2}{x})}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1+\frac{2}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{2}{x}}=\frac{1}{1}=1.$$

10. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-4}{\sqrt{9x^2+18x+9}}$

Megoldás. Mivel $x<0$ esetén $|x|=-x$, így

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-4}{\sqrt{9x^2+18x+9}}=\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x\left(1-\frac{4}{3x}\right)}{|3x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x\left(1-\frac{4}{3x}\right)}{-3x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(1-\frac{4}{3x}\right)}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{-1}=-1.$$

Amennyiben a határérték behelyettesítés után $\frac{0}{0}$ típusú határozatlan kifejezés és a racionális törtfüggvényünk van, akkor a számláló és a nevező tényezőkre bontásával, majd leegyszerűsítésével juthatunk egyszerűbb alakhoz, amelyből a határérték meghatározható. Ha irracionális függvényünk van, akkor általában gyökteleníteni kell, ha pedig trigonometrikus a függvény, akkor általában a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ alaphatárérték alkalmazásával próbáljuk megszüntetni a határozatlanságot.

11. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-8x+16}{x^3-16x}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-8x+16}{x^3-16x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)^2}{x(x-4)(x+4)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{x(x+4)}=\frac{0}{32}=0.$$

12. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+4x^2+x-6}{2x^3+2x^2-16x-24}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+4x^2+x-6}{2x^3+2x^2-16x-24}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -2}\frac{(x-1)(x+2)(x+3)}{2(x+2)^2(x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x-1)(x+3)}{2(x+2)(x-3)}=\frac{-3\cdot 1}{2\cdot 0\cdot(-5)}=\frac{-3}{-0}=+\infty.$$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x^2}$

Megoldás. Mivel a kifejezés $\frac{0}{0}$ típusú határozatlan kifejezés és irracionális, ezért gyöktelenítéssel juthatunk el a megoldásig.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x^2\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{1}{0\cdot 2}=\frac{1}{0}=\infty.$$

14. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{x+17}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+17}-5}{\sqrt[3]{x}-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 8}\left(\frac{\sqrt{x+17}-5}{\sqrt[3]{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{x+17}+5}{\sqrt{x+17}+5}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 8}\left(\frac{x+17-25}{x-8}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{x+17}+5}\right)=\lim_{x\to 8}\left(1\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{x+17}+5}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{64}+2\cdot\sqrt[3]{8}+4}{\sqrt{25}+5}=\frac{4+2\cdot 2+4}{10}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}.$$

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x - \sin 2x}{\sin x}$

Megoldás. Mivel trigonometrikus függvény határértékét kell kiszámítanunk, a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ alaphatárértéket alkalmazzuk a megoldás során.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x - \sin 2x}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\sin 2x}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin x} - \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3\cdot \sin 3x}{3x}}{\frac{\sin x}{x}} - \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x \cos x}{\sin x} = \frac{3\cdot \lim_{x\to 0} \frac{3\cdot\sin 3x}{3x}}{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}} - 2\cdot \lim_{x\to 0} \cos x =$$

$$= 3\cdot \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} - 2\cdot 1 = 3\cdot 1 - 2 = 1,$$

ahol a $3x = t$, $x \to 0$ akkor és csakis akkor ha $t \to 0$ helyettesítést alkalmaztuk.

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos x}{\cos x}}{\sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\cos x(1-\cos^2 x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x(1+\cos x)} = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2\cdot \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\cdot \left(\lim_{\frac{x}{2}\to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{1}{2},$$

vagy másik módszerrel

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}\cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} = 1^2\cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

18. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2}$

Megoldás.

$$A = \lim_{x\to 1} (1-x)\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Vezessük be az $1-x=t$ helyettesítést, ahol $x\to 1$ akkor és csakis akkor, ha $t\to 0$. Ekkor

$$A = \lim_{t\to 0} \frac{t\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}t\right)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{t\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}t\right)}{\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}t + \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}t\right)}{\sin\frac{\pi}{2}t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin\frac{\pi}{2}t}\cdot \lim_{t\to 0} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}t\right) = \frac{2}{\pi}\cdot \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\pi}{2}t}{\sin\frac{\pi}{2}t}\cdot 1 = \frac{2}{\pi}\cdot 1\cdot 1 = \frac{2}{\pi}.$$

19. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pi} \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x} \cdot \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\operatorname{tg} x}} =$$

$$= \lim_{x\to\pi} \frac{1-\operatorname{tg} x - 1 - \operatorname{tg} x}{2\sin x\cos x\left(\sqrt{1-\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\operatorname{tg} x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\pi} \frac{-1}{\cos^2 x\left(\sqrt{1-\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\operatorname{tg} x}\right)} = \frac{-1}{(-1)^2\cdot(\sqrt{1}+\sqrt{1})} = -\frac{1}{2}.$$

20. $\lim\limits_{x\to 0-0} \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$

Megoldás. Az $x \to 0-0$ jelölés azt jelenti, hogy balról, vagyis negatív értékeken keresztül közelítünk a nulla felé.

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0-0} \frac{\sqrt{2\sin^2 x}}{x} = \lim_{x\to 0-0} \frac{\sqrt{2}|\sin x|}{x} =$$

$$= \sqrt{2}\lim_{x\to 0-0}\left(\frac{|\sin x|}{|x|}\cdot\frac{|x|}{x}\right) = \sqrt{2}\lim_{x\to 0-0}\left(\left|\frac{\sin x}{x}\right|\cdot\frac{|x|}{x}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\lim_{x\to 0-0}\left(\left|\frac{\sin x}{x}\right|\cdot\lim_{x\to 0-0}\frac{|x|}{x}\right) = \sqrt{2}\cdot 1\cdot(-1) = -\sqrt{2}.$$

Amennyiben a határérték a közvetlen behelyettesítés után $\infty - \infty$ típusú, akkor irracionális különbség esetén gyöktelenítéssel, törtek különbségének estén pedig közös nevezőre hozással szabadulhatunk meg a határozatlanságtól.

21. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x-3}-\sqrt{x^2-3x+2}\right)$

Megoldás. Az adott határérték $\infty - \infty$ típusú és irracionális, ezért végezzük el a gyöktelenítést. Ekkor

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x-3}-\sqrt{x^2-3x+2}\right) = (\infty-\infty) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x-3}-\sqrt{x^2-3x+2}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+5x-3}+\sqrt{x^2-3x+2}}{\sqrt{x^2+5x-3}+\sqrt{x^2-3x+2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5x-3-x^2+3x-2}{\sqrt{x^2+5x-3}+\sqrt{x^2-3x+2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{8x-5}{\sqrt{x^2+5x-3}+\sqrt{x^2-3x+2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x(8-\frac{5}{x})}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)} = \frac{8}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = 4.$$

22. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}+x\right)$

Megoldás. Mivel most $x\to-\infty$, ezért a határérték $\infty-\infty$ típusú. A gyöktelenítés elvégzésével kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}+x\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}+x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2-2x+3}-x}{\sqrt{x^2-2x+3}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x+3-x^2}{\sqrt{x^2-2x+3}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+3}{\sqrt{x^2-2x+3}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-2+\frac{3}{x}\right)}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(2-\frac{3}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)}=\frac{2}{\sqrt{1}+1}=1.$$

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+5}-\sqrt[3]{x^3-5}\right)$

Megoldás. A határérték $\infty-\infty$ típusú. Gyöktelenítsünk a megfelelő módon.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+5}-\sqrt[3]{x^3-5}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+5}-\sqrt[3]{x^3-5}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{(x^3+5)^2}+\sqrt[3]{(x^3+5)(x^3-5)}+\sqrt[3]{(x^3-5)^2}}{\sqrt[3]{(x^3+5)^2}+\sqrt[3]{(x^3+5)(x^3-5)}+\sqrt[3]{(x^3-5)^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+5-x^3+5}{\sqrt[3]{(x^3+5)^2}+\sqrt[3]{(x^3+5)(x^3-5)}+\sqrt[3]{(x^3-5)^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{10}{\sqrt[3]{(x^3+5)^2}+\sqrt[3]{(x^3+5)(x^3-5)}+\sqrt[3]{(x^3-5)^2}}=\frac{10}{\infty}=0.$$

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

Megoldás.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x+x-\sqrt{x^2-2x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x\right)+\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-2x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[3]{x^3}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}+\sqrt[3]{(x^3+3x^2)x^3}+\sqrt[3]{x^6}}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}+\sqrt[3]{(x^3+3x^2)x^3}+\sqrt[3]{x^6}}+$$

$$+\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-2x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x^2-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}+\sqrt[3]{(x^3+3x^2)x^3}+\sqrt[3]{x^6}}+\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+2x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-2x}}=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}+1\right)} + \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{|x|\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}+1} + \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}} = \frac{3}{1+1+1} + \frac{2}{1+1} = 2.$$

25. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[4]{x^4-x^2+2} - \sqrt{x^2+x}\right)$

Megoldás. Az adott határérték $\infty-\infty$ típusú. Végezzük el kétszer a gyöktelenítést. Ekkor

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[4]{x^4-x^2+2} - \sqrt{x^2+x}\right) = (\infty-\infty) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[4]{x^4-x^2+2} - \sqrt{x^2+x}\right) \cdot \frac{\sqrt[4]{x^4-x^2+2} + \sqrt{x^2+x}}{\sqrt[4]{x^4-x^2+2} + \sqrt{x^2+x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4-x^2+2} - (x^2+x)}{\sqrt[4]{x^4-x^2+2} + \sqrt{x^2+x}} \cdot \frac{\sqrt{x^4-x^2+2} + (x^2+x)}{\sqrt{x^4-x^2+2} + (x^2+x)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^4-x^2+2-x^4-2x^3-x^2}{(\sqrt[4]{x^4-x^2+2}+\sqrt{x^2+x})(\sqrt{x^4-x^2+2}+(x^2+x))} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^3-2x^2+2}{x\left(\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^4}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\cdot x^2\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^4}}+1+\frac{1}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(-2-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^3\cdot\left(\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^4}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^4}}+1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{-2}{2\cdot 2} = -\frac{1}{2}.$$

26. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^4}{x^3+2x} - x\right)$

Megoldás. Az adott határérték $\infty-\infty$ típusú, de nem irracionális. Közös nevezőre hozással $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú határozatlan kifejezést kapunk.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^4}{x^3+2x} - x\right) = (\infty-\infty) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4-x^4-2x^2}{x^3+2x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2}{x^3+2x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{x+\frac{2}{x}} = 0.$$

27. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{2x^3}{4x^2-1} - \dfrac{x^2}{2x+1}\right)$

Megoldás. A határérték most $-\infty-(-\infty)$, azaz $\infty-\infty$ típusú. Hozzunk közös nevezőre.

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2x^3}{4x^2-1} - \frac{x^2}{2x+1}\right) = (\infty-\infty) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3-x^2(2x-1)}{4x^2-1} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3-2x^3+x^2}{4x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{4x^2-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2\left(4-\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{4}.$$

28. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^2-1}\right)$

Megoldás. Ha az x helyébe 1-et helyettesítünk, akkor $\infty-\infty$ típusú határozatlan kifejezést kapunk, ezért közös nevezőre hozunk.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^2-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 1}\frac{x+1-3}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x^2-1}=\frac{-1}{0}=-\infty.$$

29. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+2}{x^2-5x+4}+\dfrac{x-4}{3x^2-9x+6}\right)$

Megoldás. Az $x=1$ helyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy $\infty-\infty$ típusú a határérték. Bontsuk tényezőkre a nevezőket, majd hozzunk közös nevezőre.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{x^2-5x+4}+\frac{x-4}{3x^2-9x+6}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{(x-1)(x-4)}+\frac{x-4}{3(x-1)(x-2)}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{3(x+2)(x-2)+(x-4)^2}{3(x-1)(x-2)(x-4)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-12+x^2-8x+16}{3(x-1)(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to 1}\frac{4x^2-8x+4}{3(x-1)(x-2)(x-4)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{4(x-1)^2}{3(x-1)(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to 1}\frac{4(x-1)}{3(x-2)(x-4)}=\frac{0}{-3\cdot(-3)}=0.$$

30. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x^2+3x+2}-\dfrac{1}{x^3+4x^2+4x}\right)$

Megoldás.

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{1}{x^2+3x+2}-\frac{1}{x^3+4x^2+4x}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to -2}\left(\frac{1}{(x+1)(x+2)}-\frac{1}{x(x+2)^2}\right)=\lim_{x\to -2}\frac{x(x+2)-(x+1)}{x(x+1)(x+2)^2}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+2x-x-1}{x(x+1)(x+2)^2}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x+2)^2}=\frac{4-2-1}{0}=\frac{1}{0}=\infty.$$

Ha a határérték 1^∞ típusú határozatlan kifejezés, akkor a megoldást helyettesítéssel, a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ alaphatárértékre való visszavezetéssel keressük.

31. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{3x^2+1}$

Megoldás. Mivel $x\to+\infty$ esetén $\dfrac{x+1}{x}\to 1$, így 1^∞ típusú a határérték. Végezzük el a következő transzformációkat, amelyekkel megszüntethetjük a határozatlanságot.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{3x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x^2+1}=(1^\infty)=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{3x^2+1}{x}}=$$

$$= \left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x}} = e^{+\infty} = +\infty.$$

Az átalakításoknál felhasználtuk az $y = e^x$ függvény folytonosságát és ennek alapján adott g valós függvényre

$$\lim_{x\to+\infty} e^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)}.$$

32. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+6}{2x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+6}{2x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}} = (1^\infty) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1+5}{2x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{5}{2x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{5}}\right)^{\frac{2x+1}{5}\cdot\frac{5}{2x+1}\cdot\frac{x+1}{3}} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{5}}\right)^{\frac{2x+1}{5}}\right]^{\frac{5x+5}{6x+3}} =$$

$$= \left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{5}}\right)^{\frac{2x+1}{5}}\right]^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x+5}{6x+3}} = \left[\lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z\right]^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x+5}{6x+3}} = e^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{e^5},$$

ahol bevezettük a $\dfrac{2x+1}{5} = z$ helyettesítést, amelyre érvényes, hogy ha $x \to +\infty$ akkor $z \to +\infty$.

33. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+3}{x^2+2x+4}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$

Megoldás.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+3}{x^2+2x+4}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} = (1^\infty) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{3x+1}{x^2-x+3}}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1^{\frac{x^2+1}{x}}}{\left(1+\frac{3x+1}{x^2-x+3}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 1^{\frac{x^2+1}{x}}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3x+1}{x^2-x+3}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}} = \frac{1}{e^3},$$

mert

$$\lim_{x\to+\infty} 1^{\frac{x^2+1}{x}} = 1^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x}} = 1^{+\infty} = 1$$

és

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3x+1}{x^2-x+3}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-x+3}{3x+1}}\right)^{\frac{x^2-x+3}{3x+1}\cdot\frac{3x+1}{x^2-x+3}\cdot\frac{x^2+1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-x+3}{3x+1}}\right)^{\frac{x^2-x+3}{3x+1}}\right]^{\frac{3x+1}{x^2-x+3}\cdot\frac{x^2+1}{x}} =$$

$$= \left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-x+3}{3x+1}}\right)^{\frac{x^2-x+3}{3x+1}}\right]^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{x^2-x+3}\cdot\frac{x^2+1}{x}} =$$

$$= \left[\lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right]^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^3+x^2+3x+1}{x^3-x^2+3x}} = e^3,$$

ahol alkalmaztuk az $\dfrac{x^2-x+3}{3x+1}=z$ helyettesítést, amely esetén ha $x\to+\infty$ akkor $z\to+\infty$.

A következő két feladatban alkalmazzuk a $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ alaphatárértéket.

34. $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

Megoldás. A határérték 1^∞ típusú határozatlan kifejezés és a következőképpen oldható meg:

$$\lim_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = (1^\infty) = \lim_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to0}\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}} = \left[\lim_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}} = e^1 = e$$

35. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

Megoldás. Hasonlóan járunk el, mint az előző feladatban.

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = (1^\infty) = \lim_{x\to0}(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to0}\left[(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{x^2}} =$$

$$= \left[\lim_{x\to0}(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}} =$$

$$= \left[\lim_{z\to0}(1+z)^{\frac{1}{z}}\right]^{-\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

A levezetésben alkalmaztuk a $z=\cos x-1$ helyettesítést, ahol $z\to0$, ha $x\to0$ és felhasználtuk a 17. feladatból, hogy

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Alkalmazzuk a következő két feladatban a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ alaphatárértéket.

36. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 2x)}{x^2}$

Megoldás. Végezzük el a következő transzformációkat:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x)}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+\cos 2x-1)}{\cos 2x-1}\frac{\cos 2x-1}{x^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos 2x-1)}{\cos 2x-1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x^2}.$$

Az első határértékben alkalmazzuk a $\cos 2x-1=t$ helyettesítést, ahol ha $x\to 0$, akkor $t\to 0$. A második határértékben vezessük be a $2x=z$ helyettesítést, ahol ha $x\to 0$, akkor $z\to 0$, majd használjuk fel ismét a 17. feladat megoldását. Ekkor

$$A=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}\cdot(-4)\cdot\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2}=1\cdot(-4)\cdot\frac{1}{2}=-2.$$

37. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 4x)}$

Megoldás. Járjunk el a következő módon:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 4x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos 3x-1)}{\ln(1+\cos 4x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+\cos 3x-1)}{\cos 3x-1}}{\frac{\ln(1+\cos 4x-1)}{\cos 4x-1}}\cdot\frac{\frac{\cos 3x-1}{x^2}}{\frac{\cos 4x-1}{x^2}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos 3x-1)}{\cos 3x-1}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos 4x-1)}{\cos 4x-1}}\cdot\frac{(-9)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{(3x)^2}}{(-16)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{(4x)^2}}=\frac{1}{1}\cdot\frac{-9\cdot 1}{-16\cdot 1}=\frac{9}{16}.$$

38. Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x^2}-\cos x}{x^2}$ $(a>0)$ határértéket a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$ alaphatárértékre való visszavezetéssel.

Megoldás.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-1+1-\cos x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{z\to 0}\frac{a^z-1}{z}+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

ahol az első határértékben az $x^2=z$ határértéket alkalmaztuk ($z\to 0$, ha $x\to 0$), a második pedig a 17. feladatból ismert megoldás.

39. Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin x}$ $(a>0)$ határértéket a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ alaphatárérték alkalmazásával.

Megoldás.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1+1-e^{bx}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{ax}-1}{\sin x}-\frac{e^{bx}-1}{\sin x}\right)=$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{\sin x} - \lim_{x\to 0}\frac{e^{bx}-1}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{ax}-1}{ax}\cdot\frac{ax}{\sin x}\right) - \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{bx}-1}{bx}\cdot\frac{bx}{\sin x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax}\cdot a\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} - \lim_{x\to 0}\frac{e^{bx}-1}{bx}\cdot b\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = a-b.$$

40. Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\sin x}-\sqrt[3]{1+\sin x}}{x}$ $(a>0)$ határértéket a

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha \quad (\alpha\in\mathbf{R}, \quad \alpha\neq 0)$$

alaphatárérték felhasználásával.

Megoldás.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\sin x}-\sqrt[3]{1+\sin x}}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\sin x}-1+1-\sqrt[3]{1+\sin x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\sin x}-1}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\sin x}-1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\sin x)^{\frac{1}{2}}-1}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{(1+\sin x)^{\frac{1}{3}}-1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{(1-\sin x)^{\frac{1}{2}}-1}{-\sin x}\cdot\frac{-\sin x}{x}\right) - \lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+\sin x)^{\frac{1}{3}}-1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{(1+z)^{\frac{1}{2}}-1}{z}\cdot(-1)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} - \lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{\frac{1}{3}}-1}{t}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot 1 - \frac{1}{3}\cdot 1 = -\frac{1}{2}-\frac{1}{3} = -\frac{5}{6}.$$

3.3.5. Valós függvény szakadáspontjai és aszimptotái

3.21. Definíció. *Ha az f függvény az x_0 helyen nem folytonos, akkor x_0 a függvény szakadáspontja. Ilyenkor azt mondjuk, hogy x_0 a függvénynek*

1. *megszüntethető szakadása, ha $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ és $L\neq f(x_0)$, azaz a függvénynek az x_0 pontban létezik határértéke, de az nem egyezik meg a függvény értékével az adott pontban;*

2. *első típusú szakadása, ha $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = L_1$ és $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = L_2$, de $L_1\neq L_2$, azaz a függvénynek létezik baloldali és jobboldali határértéke is, de azok nem egyenlőek;*

3. *második típusú szakadása, ha a szakadás nem megszüntethető szakadás és nem is első típusú szakadás.*

3.40. Példa. *a)* Az $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ függvény az $x = 0$ pontban nem folytonos, mert nem is értelmezett, de itt véges határértéke van:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$

Az $x = 0$ pont tehát az f függvénynek megszüntethető szakadása. Az f függvény szakadását az új f_1 függvény definiálásával szüntethetjük meg. Ekkor az

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{ha } x \neq 1, \\ 2, & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$

függvény minden valós számra értelmezett és folytonos.

b) Az $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ függvény az $x = 0$ pontban nem folytonos, mert nem is értelmezett, viszont van véges határértéke:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Az $x = 0$ pont tehát az f függvénynek megszüntethető szakadása. Az

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 1, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

függvény minden valós számra értelmezett és folytonos.

c) A 3.37. Példa függvényeinek a szemlélt pontokban első típusú szakadása van, tehát az $f(x) = \operatorname{sgn} x$ függvénynek az $x = 0$ pontban, $f(x) = [x]$ függvénynek az $x = 3$ pontban és $f(x) = \{x\}$ függvénynek az $x = 2$ pontban, hiszen baloldali és jobboldali határértékeik léteznek a szemlélt pontokban, de azok egymással nem egyenlőek.

d) Az $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ függvény az $x = 2$ pontban nem folytonos (minden más helyen igen). A függvénynek itt második típusú szakadása van, mert a baloldali és jobboldali határértékek $\pm\infty$-be tartanak, ugyanis

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2-0-2} = \frac{1}{-0} = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 2+0} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2+0-2} = \frac{1}{+0} = +\infty.$$

e) az $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ függvénynek az $x = 0$ pontban szintén második típusú szakadása van, mert itt nincs határértéke, ugyanis a baloldali és jobboldali határértékek nem egyeznek meg.

$$\lim_{x\to 0-0} e^{\frac{1}{x}} = 0, \qquad \lim_{x\to 0+0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

3.22. Definíció. *Az $x = a$ egyenesre akkor mondjuk, hogy az $y = f(x)$ függvénygrafikon függőleges (vagy vertikális) aszimptotája, ha a*

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \pm\infty \quad \textit{vagy} \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$$

határértékek valamelyike teljesül.

3.41. Példa. *a)* Az $f(x) = \log_a x$ logaritmusfüggvénynek az $x = 0$ egyenes féloldali függőleges aszimptotája, mert

$$\lim_{x\to 0+0} \log_a x = -\infty \quad (a > 1) \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 0+0} \log_a x = \infty \quad (0 < a < 1).$$

b) Az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvénynek az $x = 0$ egyenes függőleges aszimptotája, mert

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = \infty.$$

c) Az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvénynek az $x = \dfrac{\pi}{2}$ egyenes függőleges aszimptotája, mert

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

d) Az $f(x) = \operatorname{ctg} x$ függvénynek az $x = 0$ egyenes függőleges aszimptotája, mert

$$\lim_{x\to 0-0} \operatorname{ctg} x = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 0+0} \operatorname{ctg} x = \infty.$$

e) Az $f(x) = \operatorname{arth} x$ függvénynek az $x = -1$ és $x = 1$ egyenesek féloldali függőleges aszimptotái, mert

$$\lim_{x\to -1+0} \operatorname{arth} x = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 1-0} \operatorname{arth} x = \infty.$$

f) Az $f(x) = \operatorname{arcth} x$ függvénynek az $x = -1$ és $x = 1$ egyenesek féloldali függőleges aszimptotái, mert

$$\lim_{x\to -1-0} \operatorname{arcth} x = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 1+0} \operatorname{arcth} x = \infty.$$

3.23. Definíció. *Az $y = kx + n$ egyenest akkor nevezzük az $y = f(x)$ függvénygrafikon ferde aszimptotájának, az $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) esetében, ha az f függvény és az adott egyenes megfelelő ordinátája közötti különbség nullához tart, ha $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), vagyis ha*

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (kx + n)] = 0 \qquad \left(\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (kx + n)] = 0 \right).$$

Ha $k = 0$, akkor az $y = n$ egyenes az $y = f(x)$ függvénygrafikon vízszintes (vagy horizontális) aszimptotája $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) esetén.

Megjegyezzük, hogy a függvényeknek lehetnek közös ferde vagy vízszintes aszimptotái $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) esetén, amit $x \to \pm\infty$ módon szoktunk felírni.

3.42. Példa. *a)* Az $f(x) = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) függvénynek az $y = 0$ egyenes vízszintes aszimptotája, mert

$$\lim_{x\to-\infty} \log_a x = 0 \quad (a > 1) \quad \text{és} \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = 0 \quad (0 < a < 1).$$

b) Az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvénynek az $y = 0$ egyenes vízszintes aszimptotája, mert

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

c) Az $f(x) = \operatorname{arctg} x$ és $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ függvényeknek az $y = -\dfrac{\pi}{2}$ és $y = \dfrac{\pi}{2}$ egyenesek vízszintes aszimptotái, mert

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}, \ \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \ \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arcctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

d) Az $f(x) = \operatorname{th} x$ és $f(x) = \operatorname{cth} x$ függvényeknek az $y = -1$ és $y = 1$ egyenesek vízszintes aszimptotái, mert

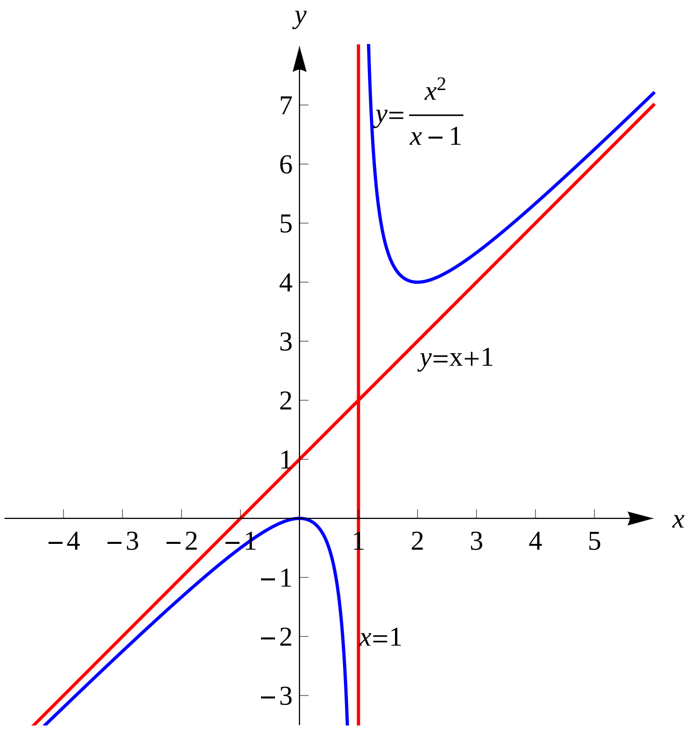
$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{th} x = -1, \ \lim_{x\to+\infty} \operatorname{th} x = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{cth} x = -1, \ \lim_{x\to+\infty} \operatorname{cth} x = 1.$$

3.43. Példa. Mivel $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1} = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$, ezért $f(x) - (x+1) = \dfrac{1}{x-1}$. Ennek alapján

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x-1} = 0,$$

tehát a definíció alapján az $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ függvénynek az $y = x+1$ egyenes ferde aszimptotája. Ugyanakkor az $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ függvénygrafikonnak az $x = 1$ egyenes függőleges aszimptotája, hiszen

$$\lim_{x\to1-0} \frac{x^2}{x-1} = \frac{(1-0)^2}{1-0-1} = \frac{1}{-0} = -\infty, \quad \lim_{x\to1+0} \frac{x^2}{x-1} = \frac{(1+0)^2}{1+0-1} = \frac{1}{+0} = +\infty.$$



A ferde aszimptota meghatározása nem mindig lehetséges az előző példában bemutatott eljárással. Ezért van szükség a következő tételre.

3.17. Tétel. *Az $y = f(x)$ függvénygrafikonnak az $y = kx + n$ egyenes $x \to +\infty$ esetén ($x \to -\infty$ esetén) akkor és csakis akkor ferde aszimptotája, ha a*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \left(\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k \right) \quad \text{és} \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = n \left(\lim_{x\to-\infty} [f(x) - kx] = n \right)$$

határértékek léteznek.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy az $y = kx + n$ egyenes az $y = f(x)$ függvénygrafikon ferde aszimptotája, ha $x \to +\infty$, azaz teljesüljön a $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (kx + n)] = 0$ feltétel. Igazoljuk, hogy a ferde aszimptota k és n együtthatóit a

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{és} \quad n = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx]$$

határértékek segítségével tudjuk meghatározni, s hogy ezek léteznek.
E célból vezessük be az $f(x)-(kx+n) = \alpha(x)$ helyettesítést, amelyből $f(x) = kx+n+\alpha(x)$ adódik, ahol $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$. Ekkor

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{kx + n + \alpha(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(k + \frac{n}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \right) = k,$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to+\infty} [(kx + n + \alpha(x)) - kx] = \lim_{x\to+\infty} [n + \alpha(x)] = n,$$

tehát az állítás beláttuk.
Fordítva, tegyük most fel, hogy léteznek a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{és} \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = n$$

határértékek. Igazoljuk, hogy az $y = kx + n$ egyenes az $y = f(x)$ függvénygrafikon ferde aszimptotája, ha $x \to +\infty$. Ekkor a második határértékből az $\alpha(x) = f(x) - (kx + n)$ jelölést alkalmazva adódik, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \alpha(x) = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - (kx + n)] = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] - n = n - n = 0,$$

innen pedig

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (kx + n)] = 0,$$

vagyis az $y = kx + n$ egyenes az $y = f(x)$ függvénygrafikon ferde aszimptotája, ha $x \to +\infty$.
A bizonyítás analóg módon az $x \to -\infty$ esetben is elvégezhető. $\diamond$

3.44. Példa. Az $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ függvény ferde aszimptotáit az előbbi tétel képletei segítségével is kiszámíthatjuk. Ekkor a ferde aszimptotát az $y = kx+n$ egyenes alakjában keressük, ahol

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1,$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2}{x-1} - x \right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1,$$

tehát $y = x + 1$ a keresett ferde aszimptota.

FELADATOK.

Vizsgáljuk ki a következő függvények aszimptotáit.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$

Megoldás. Mivel $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$, így a függvény értelmezési tartománya $D_f = R \setminus \{-2, 1\}$. Ez azt jelenti, hogy $x = -2$-ben és $x = 1$-ben a függvénynek szakadáspontja van. Mivel

$$\lim_{x\to -2-0} \frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{(-2-0+2)(-2-0-1)} = \frac{1}{-0\cdot(-3)} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to -2+0} \frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{(-2+0+2)(-2+0-1)} = \frac{1}{+0\cdot(-3)} = -\infty,$$

így a függvénynek az $x = -2$ egyenes függőleges aszimptotája. Mivel

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{(1-0+2)(1-0-1)} = \frac{1}{3\cdot(-0)} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{(1+0+2)(1+0-1)} = \frac{1}{3\cdot(+0)} = +\infty,$$

ezért a függvénynek az $x = 1$ egyenes függőleges aszimptotája.
A függvénynek az $y = 0$ egyenes vízszintes aszimptotája, mert

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{(x+2)(x-1)} = 0.$$

Mivel az $y = kx + n$ ferde aszimptota $k = 0$ esetén lesz vízszintes helyzetű ($y = n$), ezért ha a függvénynek van vízszintes aszimptotája, akkor nincs ferde aszimptotája, és fordítva.

2. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 5}{x + 2}$

Megoldás. A függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$. A függvénynek az $x = -2$ egyenes függőleges aszimptotája, mert

$$\lim_{x\to -2-0} \frac{x^2 - x - 5}{x+2} = \frac{(-2-0)^2 - (-2-0) - 5}{-2-0+2} = \frac{1}{-0} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -2+0} \frac{x^2 - x - 5}{x+2} = \frac{(-2+0)^2 - (-2+0) - 5}{-2+0+2} = \frac{1}{+0} = +\infty.$$

Mivel

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x - 5}{x+2} = +\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - x - 5}{x+2} = -\infty,$$

ezért a függvénynek nincs vízszintes aszimptotája.
A ferde aszimptotát $y = kx + n$ alakban keressük, ahol

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - x - 5}{x^2 + 2x} = 1,$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2 - x - 5}{x+2} - x\right] =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2 - x - 5 - x^2 - 2x}{x+2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x-5}{x+2} = -3,$$

így az $y = x - 3$ egyenes a függvény ferde aszimptotája.

3. $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$

Megoldás. A függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.
Az $x = 0$ egyenes a függvény egyoldali függőleges aszimptotája, mert

$$\lim_{x\to 0-0} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{-0}} = e^{+\infty} = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 0+0} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{+0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Mivel

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{\infty}} = e^{-0} = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{-\infty}} = e^{+0} = 1,$$

ezért az $y = 1$ egyenes a függvény vízszintes aszimptotája, és így a függvénynek ferde aszimptotája nincs.

4. $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$

Megoldás. Mivel $D_f = \mathbf{R}$, ezért a függvénynek nincs szakadáspontja, s így függőleges aszimptotája sem. Mivel

$$\lim_{x\to+\infty}(x - \operatorname{arctg} x) = +\infty - \frac{\pi}{2} = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty}(x - \operatorname{arctg} x) = -\infty - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\infty,$$

ezért a függvénynek nincs vízszintes aszimptotája.
Keressük $y = kx + n$ alakban a ferde aszimptotát. Mivel

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x - \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right) = 1 - \frac{\frac{\pi}{2}}{+\infty} = 1,$$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x - \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1 - \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right) = 1 - \frac{-\frac{\pi}{2}}{-\infty} = 1,$$

$$n_1 = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to+\infty}(x - \operatorname{arctg} x - x) = \lim_{x\to+\infty}(-\operatorname{arctg} x) = -\frac{\pi}{2}$$

és

$$n_2 = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to-\infty}(x - \operatorname{arctg} x - x) = \lim_{x\to-\infty}(-\operatorname{arctg} x) = \frac{\pi}{2},$$

ezért a függvénynek két ferde aszimptotája van, ezek pedig az $y = x - \dfrac{\pi}{2}$ és az $y = x + \dfrac{\pi}{2}$ egyenesek. Ha $x \to +\infty$, akkor a függvény az $y = x - \dfrac{\pi}{2}$ egyeneshez, ha $x \to -\infty$, akkor pedig a függvény az $y = x + \dfrac{\pi}{2}$ egyeneshez közelít. Vegyük észre, hogy az f függvény grafikonjának most egymással párhuzamos ferde aszimptotái vannak.

5. $f(x) = x - \sqrt{x^2 - x - 6}$

Megoldás. Az f függvény akkor értelmezett, ha $x^2 - x - 6 \geq 0$, illetve ha az $(x-3)(x+2) \geq 0$ egyenlőtlenség igaz, ami a $D_f = (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$ értelmezési tartományon teljesül.
Mivel a függvény $x = -2$-ben és $x = 3$-ban értelmezett, azaz az $f(-2) = -2$ és $f(3) = 3$ valós értékek léteznek, ezért a függvénynek függőleges aszimptotája nincs. Vizsgáljuk ki, hogy van-e vízszintes aszimptotája.

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - x - 6}\right) = (\infty - \infty) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\left(x - \sqrt{x^2 - x - 6}\right) \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 - x - 6}}{x + \sqrt{x^2 - x - 6}}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x^2 + x + 6}{x + \sqrt{x^2 - x - 6}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x + 6}{x + |x|\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1 + \frac{6}{x}\right)}{x\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}\right)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},$$

viszont

$$\lim_{x\to-\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - x - 6}\right) = -\infty - \infty = -\infty,$$

és ez azt jelenti, hogy a függvénynek $x \to +\infty$ esetén az $y = \dfrac{1}{2}$ egyenes vízszintes aszimptotája, de $x \to -\infty$ esetén nincs vízszintes aszimptotája.
A ferde aszimptota kivizsgálását ezért csak az $x \to -\infty$ esetére korlátozzuk. Keressük a függvény ferde aszimptotáját $y = kx + n$ alakban. Ekkor

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 - x - 6}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x - |x|\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x + x\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}\right)}{x} = 1 + \sqrt{1} = 2$$

és

$$n = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to-\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - x - 6} - 2x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(-x - \sqrt{x^2 - x - 6}\right) = (-1) \cdot \lim_{x\to-\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - x - 6}\right) =$$

$$= (-1) \cdot \lim_{x\to-\infty} \left[\left(x + \sqrt{x^2 - x - 6}\right) \cdot \frac{x - \sqrt{x^2 - x - 6}}{x - \sqrt{x^2 - x - 6}}\right] =$$

$$= (-1) \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - x^2 + x + 6}{x - |x|\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}} = (-1) \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1 + \frac{6}{x}\right)}{x\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}\right)} =$$

$$= (-1) \cdot \frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2},$$

vagyis $x \to -\infty$ esetén a függvénynek ferde aszimptotája van, mégpedig az

$$y = 2x - \frac{1}{2} \quad \text{egyenes.}$$