2. Számsorozatok

2.1. A sorozat fogalma, megadása és ábrázolása

2.1. Definíció. *Azokat az $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ valós függvényeket, melyek minden n természetes számhoz egy a_n valós számot rendelnek hozzá, végtelen számsorozatoknak, röviden sorozatoknak nevezzük. a_n a sorozat n-edik eleme (vagy tagja), amelyet szokás a sorozat általános elemének is nevezni. Magát a sorozatot $\{a_n\}$-nel jelöljük.*

2.1.1. Sorozatok megadása

A sorozatoknak végtelen sok eleme van és ezeket különféle módon adhatjuk meg.
I. A sorozatot megadhatjuk *az általános elem képletével*, vagyis az n változó függvényeként felírt *képlettel*, *formulával*.

2.1. Példa. *a)* Ha $a_n = n$ az általános elem, akkor a sorozat elemei $1, 2, 3, 4, 5, ...$ és ez a természetes számok sorozata.

b) Amennyiben $a_n = 2^n$ az általános elem képlete, akkor a sorozat elemei $2, 4, 8, 16, 32, ...$ és most a 2 hatványainak sorozatát kapjuk.

c) $a_n = \dfrac{1}{n}$ esetén a sorozat elemei $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, ...$ és ez a harmonikus sorozat, mely nevét arról kapta, hogy a második elemtől kezdve a sorozat minden eleme a két szomszédos elem *harmonikus közepe*, vagyis érvényes, hogy

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}\right), \quad n \geq 2.$$

II. A sorozatot megadhatjuk *rekurzív módon.* Ez azt jelenti, hogy néhány elemet megadunk, a további elemeket pedig az előttük lévők segítségével definiáljuk.

2.2. Példa. *a)* Legyen $a_1 = 1$ és $a_n = 2a_{n-1}$, ha $n \geq 2$. Ekkor

$$a_2 = 2a_1 = 2, \quad a_3 = 2a_2 = 4, \quad a_4 = 2a_3 = 8, \quad a_5 = 2a_3 = 16,$$

és így tovább. A sorozat elemei $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$.

b) Legyen $a_1 = 0$ és $a_n = 2a_{n-1} + 1$, ha $n \geq 2$. Ekkor

$$a_2 = 2a_1 + 1 = 1, \quad a_3 = 2a_2 + 1 = 3, \quad a_4 = 2a_3 + 1 = 7, \quad a_5 = 2a_4 + 1 = 15,$$

és így tovább. A sorozat elemei $0, 1, 3, 7, 15, \ldots$.

c) Legyen $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ és $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, ha $n \geq 3$. Ekkor

$$a_3 = a_2 + 2a_1 = 1, \quad a_4 = a_3 + 2a_2 = 3, \quad a_5 = a_4 + 2a_3 = 5,$$

és így tovább. A sorozat elemei ebben az esetben $0, 1, 1, 3, 5, \ldots$.

Ilyen módon kiszámítható a sorozat bármelyik eleme, de ahhoz, hogy meghatározzuk a rekurzív módon megadott sorozat 1000. elemét, ki kell számítani mind a 999 előző elemet is. Bizonyos esetekben a rekurzív képletekkel megadott sorozatok általános eleme is meghatározható, de erről az eljárásról a későbbiekben lesz szó.

III. Számsorozatot megadhatunk *utasítással*, *leírással* is.

2.3. Példa. *a)* Legyen $\{a_n\}$ a prímszámok sorozata, azaz $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$ és így tovább. Nem létezik sem explicit, sem rekurzív formula, amely megadná az n. prímszámot, de a sorozat ezzel az utasítással mégis egyértelműen meghatározott.

b) Legyen $\{a_n\}$ az a sorozatot, amelynek elemei sorban a $\sqrt{2}$ végtelen tizedestört alakú felírásának egy-, két-, háromszámjegyű, stb. racionális közelítései. A sorozat elemei $1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \ldots$. Ha az ezredik számjegyet kérdeznénk, tudjuk, hogy az egyértelműen meg van határozva, de megadnása sok munkát igényelne.

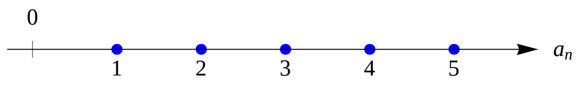
Megjegyzés: A számsorozatokat szokás megadni az első néhány elem felsorolásával is, de ez a definiálás nem mindig egyértelmű, ezért ha lehet kerüljük ezt a megadási módot.

2.4. Példa. Tekintsük az $1, 16, 81, 256, \ldots$ számsorozatot, amelyet az első négy elem segítségével írtunk fel. A felsorolt elemek alapján a sorozat általános eleme egyrészt lehetne $a_n = n^4$, de ugyanakkor $b_n = 10n^3 - 35n^2 + 50n - 24$ is. A megfelelő sorozatok ötödik, hatodik elemei viszont már nem egyeznek meg.

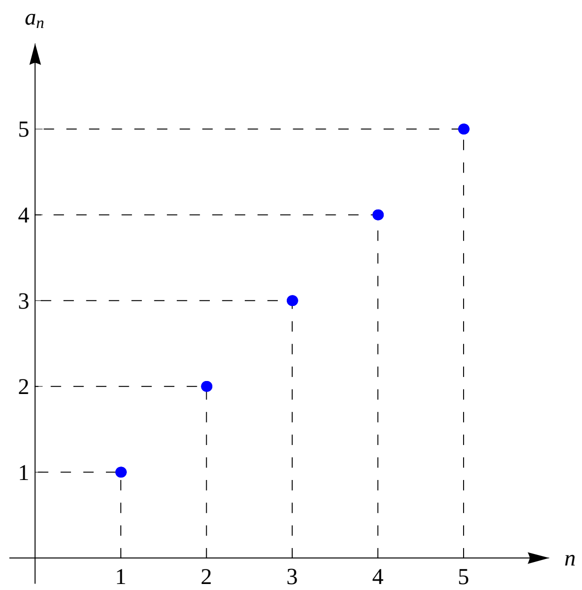
n	1	2	3	4	5	6
a_n	1	16	81	256	625	1296
b_n	1	16	81	256	601	1176

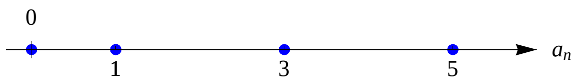
2.1.2. Sorozatok ábrázolása

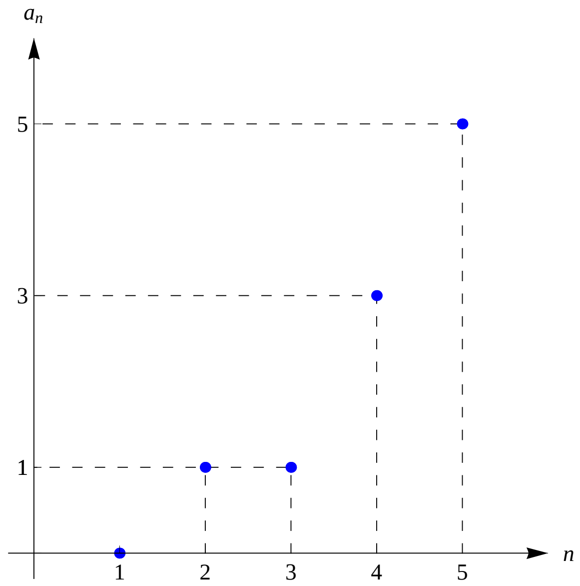
Az $\{a_n\}$ sorozatot ábrázolhatjuk a számegyenesen a sorozat elemeihez rendelt pontokkal: $a_1, a_2, a_3, \ldots$, vagy mint olyan függvényt a valós számsíkban, melynek értelmezési tartományát a természetes számok alkotják, grafikonja pedig az $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, $(3, a_3)$, $\ldots$ diszkrét pontok halmaza.



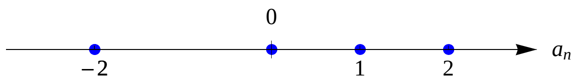
2.5. Példa. Az $a_n = n$ számsorozat számegyenesen való ábrázolása és síkban való ábrázolása is jó képet ad a számsorozatnak megfelelő pontok elhelyezkedéséről.

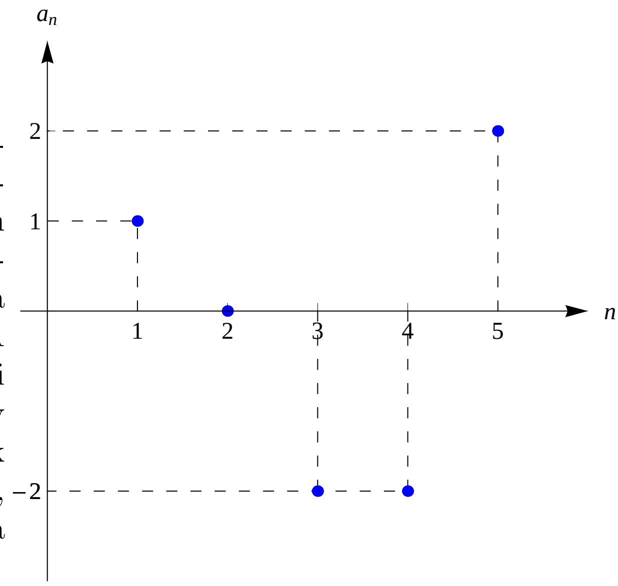






2.6. Példa. Az $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ kezdeti elemekkel és az $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ rekurzív képlettel megadott számsorozat esetében $a_2 = a_3 = 1$, és ez a számegyenesen azt jelenti, hogy az 1-ben két pont van egymás tetején, de ezt nem tudjuk érzékelni. A számsíkon való ábrázolás kiküszöböli ezt a problémát, hiszen ott két különböző pontként jelenik meg $(2, a_2)$ és $(3, a_3)$.





2.7. Példa. Az $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ kezdeti elemekkel és az $a_n = a_{n-1} - 2a_{n-2}$ rekurzív formulával megadott számsorozat esetében sem derül ki a számegyenesen, hogy $a_3 = a_4$, hacsak nem írjuk oda minden ponthoz, hogy a számsorozat melyik elemének felel meg. A számegyenesen való ábrázolás azt sem teszi lehetővé, hogy képet kapjunk arról, hogy melyik pont felel meg az első elemnek, melyik a másodiknak, és így tovább. Mint látjuk, a síkban való ábrázolás megoldja ezeket a problémákat.

FELADATOK.

Határozzuk meg az $\{a_n\}$ sorozat első k elemét.

1. $a_n = \dfrac{n-2}{2n}$, $k = 8$

Megoldás.

$$a_1 = \frac{1-2}{2\cdot 1} = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{2-2}{2\cdot 2} = 0, \quad a_3 = \frac{3-2}{2\cdot 3} = \frac{1}{6}, \quad a_4 = \frac{4-2}{2\cdot 4} = \frac{1}{4},$$

$$a_5 = \frac{5-2}{2\cdot 5} = \frac{3}{10}, \quad a_6 = \frac{6-2}{2\cdot 6} = \frac{1}{3}, \quad a_7 = \frac{7-2}{2\cdot 7} = \frac{5}{14}, \quad a_8 = \frac{8-2}{2\cdot 8} = \frac{3}{8}, \ldots$$

2. $a_n = \dfrac{1-3n}{5n+1}$, $k = 6$

Megoldás.

$$a_1 = \frac{1-3\cdot 1}{5\cdot 1+1} = -\frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{1-3\cdot 2}{5\cdot 2+1} = -\frac{5}{11}, \quad a_3 = \frac{1-3\cdot 3}{5\cdot 3+1} = -\frac{1}{2},$$

$$a_4 = \frac{1-3\cdot 4}{5\cdot 4+1} = -\frac{11}{21}, \quad a_5 = \frac{1-3\cdot 5}{5\cdot 5+1} = -\frac{7}{13}, \quad a_6 = \frac{1-3\cdot 6}{5\cdot 6+1} = -\frac{17}{31}, \dots$$

3. $a_n = 2 + (-1)^{n+1}\dfrac{3}{n}$, $k = 6$

Megoldás.

$$a_1 = 2 + (-1)^2 \cdot \frac{3}{1} = 5, \quad a_2 = 2 + (-1)^3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}, \quad a_3 = 2 + (-1)^4 \cdot \frac{3}{3} = 3,$$

$$a_4 = 2 + (-1)^5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{4}, \quad a_5 = 2 + (-1)^6 \cdot \frac{3}{5} = \frac{13}{5}, \quad a_6 = 2 + (-1)^7 \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{2}, \dots$$

4. $a_n = 1 + (-1)^{n-1}\dfrac{1-n}{n!}$, $k = 4$

Megoldás.

$$a_1 = 1 + (-1)^0 \cdot \frac{0}{1!} = 1, \quad a_2 = 1 + (-1)^1 \cdot \frac{-1}{2!} = \frac{3}{2},$$

$$a_3 = 1 + (-1)^2 \cdot \frac{-2}{3!} = \frac{2}{3}, \quad a_4 = 1 + (-1)^3 \cdot \frac{-3}{4!} = \frac{9}{8}, \dots$$

5. $a_n = \cos{(n+1)}\dfrac{\pi}{2}$, $k = 8$

Megoldás.

$$a_1 = \cos\pi = -1, \quad a_2 = \cos\frac{3\pi}{2} = 0, \quad a_3 = \cos 2\pi = 1, \quad a_4 = \cos\frac{5\pi}{2} = 0,$$

$$a_5 = \cos 3\pi = -1, \quad a_6 = \cos\frac{7\pi}{2} = 0, \quad a_7 = \cos 4\pi = 1, \quad a_8 = \cos\frac{9\pi}{2} = 0, \dots$$

6. $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$, $k = 8$

Megoldás.

$$a_1 = \sin\frac{\pi}{2} = 1, \quad a_2 = \sin\pi = 0, \quad a_3 = \sin\frac{3\pi}{2} = -1, \quad a_4 = \sin 2\pi = 0,$$

$$a_5 = \sin\frac{5\pi}{2} = 1, \quad a_6 = \sin 3\pi = 0, \quad a_7 = \sin\frac{7\pi}{2} = -1, \quad a_8 = \sin 4\pi = 0, \dots$$

7. $a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ páratlan;} \\ \frac{n}{2}, & n \text{ páros.} \end{cases}$, $k = 8$

Megoldás. $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, $a_4 = 2$, $a_5 = 1$, $a_6 = 3$, $a_7 = 1$, $a_8 = 4$, $\dots$

8. $a_n = \begin{cases} \ln e^{\frac{n+1}{2}}, & n \text{ páratlan;} \\ e^{\ln \frac{n}{2}}, & n \text{ páros.} \end{cases}$, $k = 8$

Megoldás. $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2,\ a_4 = 2,\ a_5 = 3,\ a_6 = 3,\ a_7 = 4,\ a_8 = 4, \ldots$

9. $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, $k = 4$

Megoldás.

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}, \quad a_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}, \ldots$$

10. $a_n = \dfrac{1 + 2 + \cdots + 2n}{n^2} + 1$, $k = 3$

Megoldás. $a_1 = \dfrac{1+2}{1^2} + 1 = 4, \quad a_2 = \dfrac{1+2+3+4}{2^2} + 1 = \dfrac{14}{4},$

$a_3 = \dfrac{1+2+3+4+5+6}{3^2} + 1 = \dfrac{10}{3}, \ldots$

11. $a_1 = -1,\ a_{n+1} = -5 - 4a_n,\ k = 5$

Megoldás. $a_1 = -1,\ a_2 = -1,\ a_3 = -1,\ a_4 = -1,\ a_5 = -1, \ldots$

12. $a_1 = 4,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 5}{6},\ k = 5$

Megoldás. $a_1 = 4,\ a_2 = \dfrac{7}{2},\ a_3 = \dfrac{23}{8},\ a_4 = \dfrac{283}{128},\ a_5 = \dfrac{54003}{32768}, \ldots$

13. $a_1 = 0,\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{(-1)^n}{2^n},\ k = 5$

Megoldás. $a_1 = 0,\ a_2 = -\dfrac{1}{2},\ a_3 = \dfrac{1}{2},\ a_4 = \dfrac{3}{8},\ a_5 = \dfrac{7}{16}, \ldots$

14. $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_{n+2} = 2a_{n+1} + 5a_n,\ k = 5$

Megoldás. $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 11,\ a_4 = 37,\ a_5 = 129, \ldots$

15. $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = (-1)^n \cdot \dfrac{a_{n+1} + a_n}{2},\ k = 5$

Megoldás. $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = -\dfrac{3}{2},\ a_4 = \dfrac{1}{4},\ a_5 = \dfrac{5}{8}, \ldots$

2.2. Korlátos és monoton sorozatok

Mivel a sorozatok is függvények, ezért természetes, hogy vizsgáljuk a függvényekre jellemző tulajdonságokat. Két ilyen fontos tulajdonság a korlátosság és monotonitás.

2.2. Definíció. *Az $\{a_n\}$ sorozatot felülről (alulról) korlátosnak nevezzük, ha megadható olyan K (k) szám, amelynél a sorozatnak nincs nagyobb (kisebb) eleme, azaz*

$$a_n \le K, \quad n = 1, 2, \ldots \quad (a_n \ge k, \quad n = 1, 2, \ldots).$$

A sorozatot korlátosnak mondjuk, ha felülről és alulról is korlátos, azaz ha minden n-re

$$k \le a_n \le K.$$

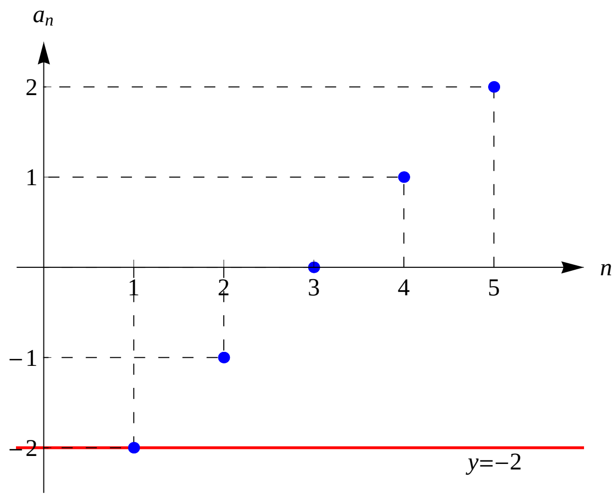
Az ilyen k számot alsó korlátnak, a K számot pedig felső korlátnak nevezzük.

A definícióból következik, hogy ha létezik egy felső (alsó) korlát, akkor végtelen sok felső (alsó) korlát is van. A valós számok teljességi axiómájából következik, hogy a felső korlátok között van legkisebb és az alsó korlátok között van legnagyobb.

2.3. Definíció. *Felülről korlátos sorozat legkisebb felső korlátját a sorozat felső határának vagy szuprémumának; alulról korlátos sorozat legnagyobb alsó korlátját a sorozat alsó határának vagy infimumának nevezzük. Jelölésük:* $\sup\{a_n\}$, *illetve* $\inf\{a_n\}$.

A fentiek szerint felülről (alulról) korlátos sorozatnak van felső (alsó) határa. Korlátos sorozatnak van felső és alsó határa is. A sorozat felső (alsó) határa nem feltétlenül eleme a sorozatnak.

2.8. Példa. Az $a_n = n - 3$ sorozat alulról korlátos, mert $n - 3 \geq -2$, így egy alsó korlátja $k = -2$. Felülről nem korlátos a sorozat, mert bármely K számot is vesszük, van a sorozatnak olyan eleme, mely K-nál nagyobb, ugyanis $a_n > K$, ha $n > K + 3$. A grafikon szempontjából ez azt jelenti, hogy a számsorozat pontjai vagy az $y = -2$ egyenesen vannak vagy pedig az $y = -2$ egyenes felett.



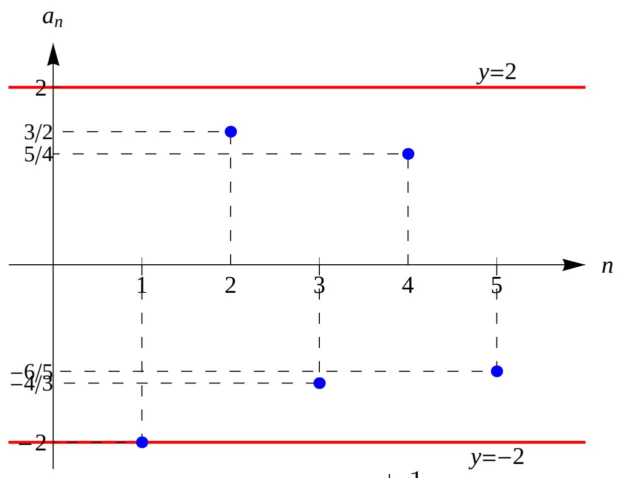
$a_n = n - 3$

2.9. Példa. Az $a_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n}$ sorozat korlátos, mert

$$|a_n| = \left|(-1)^n \frac{n+1}{n}\right| =$$

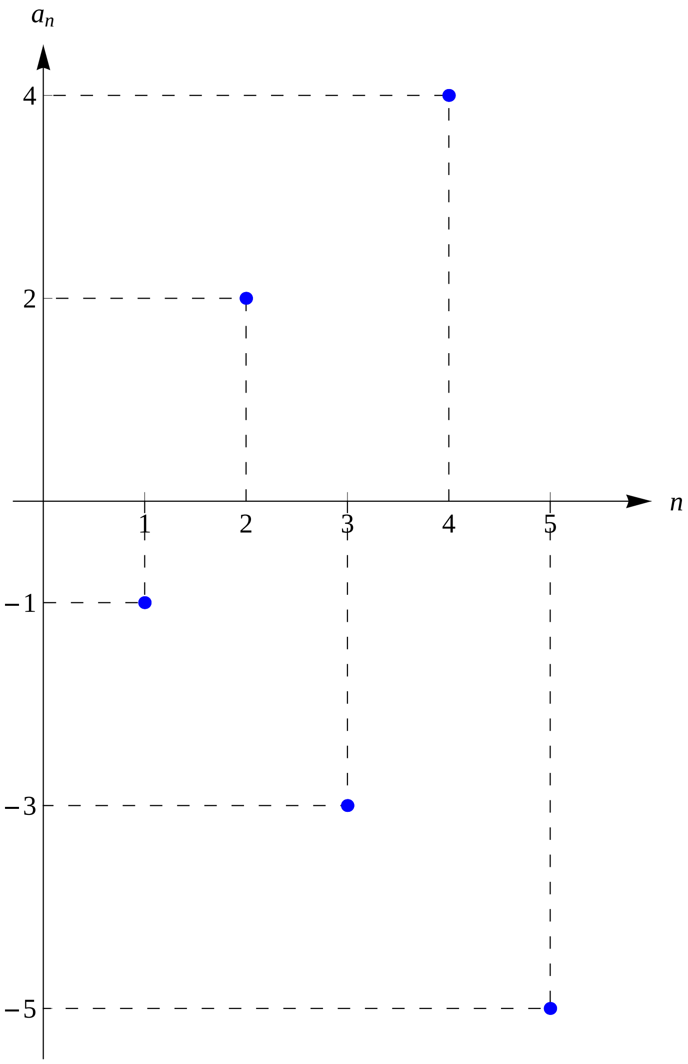
$$= \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{1} = 2,$$

tehát $-2 \leq a_n \leq 2$ minden n-re, vagyis a sorozat egy alsó korlátja $k = -2$, egy felső korlátja pedig $K = 2$. A számsorozat pontjai az $y = -2$ és az $y = 2$ egyenesek között helyezkednek el, legfeljebb magukon az egyeneseken vannak rajta.



$a_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n}$

2.10. Példa. Az $a_n = (-1)^n n$ sorozat sem alulról, sem felülről nem korlátos, mert $|a_n| > K$, ha $n > K$. Ez egy oszcilláló sorozat, amelynél n növekedésével a megfelelő a_n értékek abszolút értékben mind nagyobbak és nagyobbak, s így a nekik megfelelő pontok mind távolabb és távolabb vannak az x-tengelytől.



$a_n = (-1)^n n$

2.4. Definíció. *Az $\{a_n\}$ sorozat szigorúan monoton növekvő (csökkenő), ha*

$$a_n < a_{n+1} \quad (a_n > a_{n+1}) \quad \textit{minden} \quad n \in \mathbf{N} \quad \textit{esetén.}$$

Az $\{a_n\}$ sorozat monoton nemcsökkenő (nemnövekvő), ha

$$a_n \leq a_{n+1} \quad (a_n \geq a_{n+1}) \quad \textit{minden} \quad n \in \mathbf{N} \quad \textit{esetén.}$$

Ezen tulajdonságok valamelyikével rendelkező sorozatot *monoton sorozatnak* nevezzük.

2.11. Példa. Az $a_n = \dfrac{n-1}{n}$ sorozat szigorúan monoton növekvő, mivel

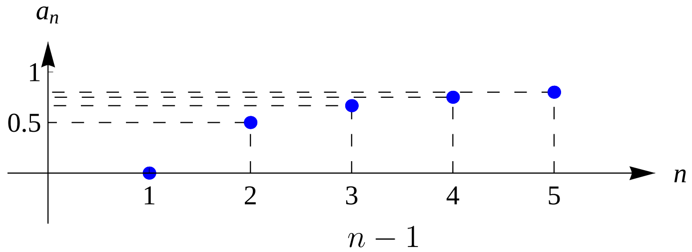
$$a_n - a_{n+1} = \frac{n-1}{n} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n-1)(n+1) - n^2}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{n^2 - 1 - n^2}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0,$$

azaz $a_n < a_{n+1}$ minden n természetes szám esetén.

Az $a_n = \dfrac{n-1}{n}$ sorozat első néhány eleme

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots .$$



$$a_n = \frac{n-1}{n}$$

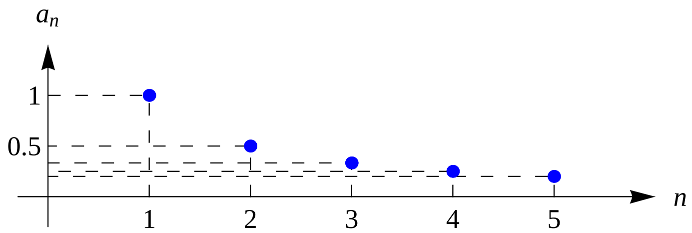
2.12. Példa. Az $a_n = \dfrac{1}{n}$ (pozitív elemű) sorozat szigorúan monoton csökkenő, mivel

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} > 1,$$

azaz $a_n > a_{n+1}$ minden n természetes szám esetén.

Az $a_n = \dfrac{1}{n}$ sorozat első néhány eleme

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots .$$



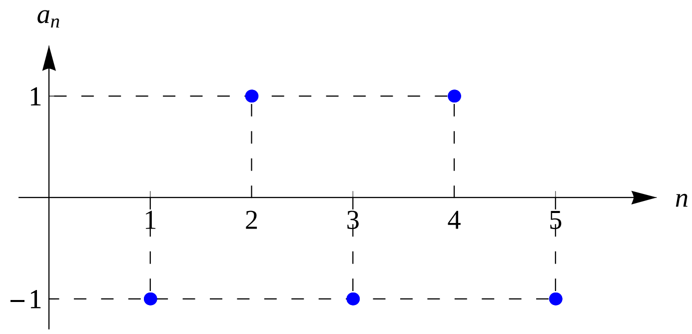
$$a_n = \frac{1}{n}$$

2.13. Példa. Az $a_n = (-1)^n$ sorozat nem monoton sorozat, hiszen az

$$a_n - a_{n+1} = (-1)^n - (-1)^{n+1} = (-1)^n + (-1)^n = 2 \cdot (-1)^n$$

kifejezés nem állandó előjelű. Mivel a sorozat elemei váltakozva negatívak és pozitívak, ezért azt mondjuk rá, hogy oszcilláló, első néhány eleme pedig

$$-1, 1, -1, 1, -1, \ldots .$$



$$a_n = (-1)^n$$

Vegyük észre, hogy ha az $a_n = (-1)^n$ számsorozatot számegyenesen ábrázoltuk volna, akkor csak két pont lenne a grafikonon, a -1-nél és az 1-nél. Mindkettő esetében viszont végtelen sok pont lenne egymás tetején, csak az egyenesen ezt nem lehet érzékeltetni.

FELADATOK.

Vizsgáljuk ki a következő sorozatok monotonitását és korlátosságát.

1. $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$

Megoldás. Vizsgáljuk ki a sorozat monotonitását. E célból két szomszédos elem különbségének előjelét kell meghatározni.

$$a_{n+1} - a_n = 1 + \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-n-1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0.$$

Mivel $a_{n+1} - a_n < 0$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén, ezért $a_{n+1} < a_n$ érvényes minden $n \in \mathbf{N}$ esetén, vagyis a sorozat szigorúan monoton csökkenő.
Mivel a sorozat szigorúan monoton csökkenő, ezért az első elem $a_1 = 2$ egyben a sorozat legkisebb felső korlátja is, azaz $K = 2$ esetén $a_n \leq K$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén.
Mivel $\dfrac{1}{n} > 0$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén, ezért $a_n = 1 + \dfrac{1}{n} > 1$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén, ezért a sorozat egy alsó korlátja lehet $k = 1$. A sorozat tehát korlátos és minden n természetes számra

$$1 < a_n \leq 2.$$

2. $a_n = 2 - n$

Megoldás. A monotonitási tulajdonság meghatározásához vizsgáljuk most ki az $a_{n+1} - a_n$ különbség előjelét. Mivel

$$a_{n+1} - a_n = 2 - (n+1) - (2-n) = 2 - n - 1 - 2 + n = -1 < 0,$$

ezért $a_{n+1} < a_n$ minden n természetes számra, tehát a sorozat szigorúan monoton csökkenő. Így a sorozat felülről korlátos, egy felső korlátja $K = a_1 = 1$. Ha k alsó korlátja lenne, akkor erre $k < 2 - n$ kellene, hogy teljesüljön, viszont ez csak $n < 2 - k$ indexekre lenne igaz, nem pedig minden n természetes számra. Most ugyanis minél nagyobb n, annál kisebb $a_n = 2 - n$, tehát a sorozat alulról nem korlátos.

3. $a_n = n^2 + 1$

Megoldás. A monotonitást az $a_{n+1} - a_n$ különbség előjeléből állapítjuk meg. Mivel

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 + 1 - (n^2 + 1) = n^2 + 2n + 1 - n^2 - 1 = 2n > 0$$

minden n természetes számra, így $a_{n+1} > a_n$ minden n természetes számra, tehát a sorozat szigorúan monoton növekvő. A sorozat első eleme egyben a sorozat egy alsó korlátja is, tehát $k = a_1 = 2$. Ha létezne olyan K szám, amelyre $n^2 + 1 < K$, akkor ez a tulajdonság csak az $n < \sqrt{K+1}$ indexű elemekre lenne igaz, tehát a sorozat felülről nem korlátos. Valóban, ez egy olyan sorozat, hogy egyre nagyobb n természetes számok esetén $a_n = n^2 + 1$ még gyorsabban nő. A sorozat tehát szigorúan monoton növekvő és alulról korlátos.

4. $a_n = \dfrac{n-2}{2n}$

Megoldás. Vizsgáljuk ki az $a_{n+1} - a_n$ különbséget.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1-2}{2(n+1)} - \frac{n-2}{2n} = \frac{n-1}{2(n+1)} - \frac{n-2}{2n} = \frac{n(n-1)-(n-2)(n+1)}{2n(n+1)} =$$

$$= \frac{n^2-n-n^2+2n-n+2}{2n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0,$$

ezért $a_{n+1} > a_n$ minden n természetes számra, tehát a sorozat szigorúan monoton növekvő. A sorozat első eleme egyben a sorozat egy alsó korlátja is, tehát $k = a_1$, illetve $k = -\frac{1}{2}$. Mivel $\frac{1}{n} > 0$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén, ezért $-\frac{1}{n} < 0$ és $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{2}$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén, ezért a sorozat egy felső korlátja lehet $k = \frac{1}{2}$, hiszen minden $n \in \mathbf{N}$-re

$$a_n = \frac{n-2}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{2}.$$

A sorozat tehát korlátos és minden n természetes számra

$$-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}.$$

5. $a_n = \dfrac{n^2+2}{n^2+1}$

Megoldás. Vizsgáljuk most is az $a_{n+1} - a_n$ különbséget.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)^2+2}{(n+1)^2+1} - \frac{n^2+2}{n^2+1} = \frac{n^2+2n+3}{n^2+2n+2} - \frac{n^2+2}{n^2+1} =$$

$$= \frac{(n^2+2n+3)(n^2+1)-(n^2+2)(n^2+2n+2)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} =$$

$$= \frac{n^4+n^2+2n^3+2n+3n^2+3-n^4-2n^3-2n^2-2n^2-4n-4}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} =$$

$$= \frac{-(2n+1)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} < 0,$$

minden n természetes számra, így $a_{n+1} < a_n$ minden n természetes számra, tehát a sorozat szigorúan monoton csökkenő. A sorozat első eleme egyben a sorozat egy felső korlátja is, tehát $K = a_1 = \frac{3}{2}$. Vegyük észre, hogy

$$a_n = \frac{n^2+2}{n^2+1} = 1 + \frac{1}{n^2+1}.$$

Mivel

$$\frac{1}{n^2+1} > 0, \quad \text{ezért} \quad 1 + \frac{1}{n^2+1} > 1,$$

tehát $k = 1$ a sorozat egy alsó korlátja. A sorozat tehát korlátos és minden n természetes számra

$$1 < a_n \le \frac{3}{2}.$$

2.3. Rekurzív sorozatok

A rekurzív sorozatok közül néhány sorozat gyakorlati alkalmazása, felhasználhatósága miatt annyira jelentős, hogy érdemes velük külön foglalkozni. Ezekből néhányat definiálunk, megmutatjuk jellegzetes tulajdonságaikat és érdekes alkalmazásaikat.

2.3.1. Számtani (aritmetikai) sorozat

2.5. Definíció. *Azt a számsorozatot, amelyben minden elemet (tagot) az őt megelőzőből egy d állandó hozzádásával kapunk, számtani (vagy aritmetikai) sorozatnak nevezzük. A d szám a sorozat különbsége (vagy differenciája).*

A definíció alapján felírhatjuk a számtani sorozat rekurzív képzési szabályát:

$$a_n = a_{n-1} + d, \quad \text{illetve} \quad a_n - a_{n-1} = d, \quad n \geq 2.$$

Ebből adódik, hogy

a) ha $d > 0$, a számtani sorozat monoton növekvő és alulról korlátos,

b) ha $d < 0$, a számtani sorozat monoton csökkenő és felülről korlátos,

c) $d = 0$ esetén is beszélhetünk számtani sorozatról, amely nemnövekvő, nemcsökkenő és korlátos sorozat. Elemei: a_1, a_1, a_1,...,a_1,... Az ilyen sorozatot *állandó* (vagy *konstans*) *sorozatnak* nevezzük.

A számtani sorozat megadásához elég két adat. Legegyszerűbb meghatározó adatai a_1 és d. Az egyszerű képzési szabályból adódik, hogy a_1 és d ismeretében a számtani sorozat bármelyik elemét felírhatjuk a következőképpen:

$$a_2 = a_1 + d,$$

$$a_3 = a_1 + 2d,$$

$$a_4 = a_1 + 3d,$$

$$\vdots$$

Ezt az eljárást folytatva és általánosítva kimondható a következő tétel:

2.1. Tétel. *Ha az $\{a_n\}$ számtani sorozat első eleme a_1 és különbsége d, akkor minden n természetes számra érvényes, hogy*

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Bizonyítás. A bizonyítás a matematikai indukció módszerével történik.
1^o $n = 1$ esetén $a_1 = a_1 + (1-1)d = a_1 + 0 \cdot d = a_1$.
2^o Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$-ra, vagyis, hogy $a_k = a_1 + (k-1)d$.
3^o Igazoljuk az állítás helyességét $n = k + 1$-re. Ekkor
$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + (k+1-1)d = a_1 + kd$. $\diamond$

2.14. Példa. Ha az $5, 2, -1, -4, -7, \dots$ számtani sorozat huszadik elemét kell meghatározni, akkor megállapíthatjuk, hogy $a_1 = 5$ és $d = -3$, tehát

$$a_{20} = a_1 + 19 \cdot d = 5 + 19 \cdot (-3) = -52.$$

2.15. Példa. Ha egy olyan számtani sorozat differenciáját kell kiszámítani, melynek első tagja 3 és tizedik tagja 21, akkor az $a_{10} = a_1 + 9d$ összefüggésből azt kapjuk, hogy $21 = 3 + 9d$, ahonnan $d = 2$.

Mivel

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_n - d + a_n + d}{2} = \frac{2a_n}{2} = a_n,$$

ezért érvényes, hogy a számtani sorozatban bármely három szomszédos elem közül a középső a két mellette levő elem számtani közepe. Erről a tulajdonságról kapta e sorozat a "számtani" megnevezést. Hasonlóan érvényes a következő összefüggés is:

$$\frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2} = a_n, \quad k < n.$$

Az összeg kiszámításának legegyszerűbb alapgondolata ma is az, amelyet Gauss (1777-1855) 9 éves korában alkalmazott, amikor tanítója azt a feladatot adta az osztályának, hogy adják össze 1*-től* 40*-ig az egész számokat. Gauss egy pillanaton belül felírta az összeget:* 820*. Tanítója kérésére el is magyarázta a gondolatmenetét. Elképzelte egy sorba felírva a* 40 *tagú összeget, majd ugyanezt a* 40 *tagot fordított sorrendben aláírva. Az egymás alá került két szám összege mindenütt* 41*.* 40 *ilyen pár van, ezért* 41*-et* 40*-nel kellene szorozni, de a két sor miatt minden szám kétszer szerepel az összegben, ezért a* 40 *helyett csak* 20*-szal szorozta az összeget. Ez a szorzat adja a pontos összeget, a* 820*-at.*

Ugyanezzel a gondolatmenettel lehet kiszámítani a számtani sorozat első n elemének S_n összegét. Kimondható a következő tétel:

2.2. Tétel. *Ha az $\{a_n\}$ számtani sorozat első eleme a_1 és különbsége d, akkor az első n elemének összege*

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d).$$

Bizonyítás. Győződjünk meg először arról, hogy minden k esetén, amelyre $1 \le k \le n$ érvényes, hogy

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n.$$

Valóban, $a_k = a_1 + (k-1)d$, $a_{n-k+1} = a_1 + (n-k)d$ és $a_n = a_1 + (n-1)d$, tehát

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + (k-1)d + a_1 + (n-k)d = a_1 + a_1 + (n-1)d = a_1 + a_n.$$

Mivel

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

és ugyanakkor

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1,$$

így összeadva a két egyenletet adódik, hogy

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) = n(a_1 + a_n).$$

Innen következik az

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

összefüggés, amelybe behelyettesítve az $a_n = a_1 + (n-1)d$ kifejezést adódik, hogy

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d).$$

$\diamond$

A tétel gyakorlati alkalmazását mutatja az alábbi példa.

2.16. Példa. Egy útszakasz javításához homokbányából teherautóval homokot szállítanak. Az első forduló terhét a kocsi az út elején rakja le, ez a homokbányától 8000 m-es távolságra van. Minden további forduló terhét 25 m-rel távolabbra kell vinnie. A 35. fordulónál mekkora távolságra megy a kocsi, és a 35 forduló megtétele közben hány km utat tesz meg teher alatt?
$a_1 = 8000$, $d = 25$, tehát $n = 35$ esetben $a_{35} = 8000 + (35-1)25 = 8850$, vagyis a 35. fordulónál a kocsi 8850 m távolságra megy. Mivel a 35 forduló alatt teherrel megtett távolságok összege

$$S_{35} = a_1 + a_2 + ... + a_{35} = \frac{35}{2}(a_1 + a_{35}) = \frac{35}{2}(8000 + 8850) = 294875\,\text{m},$$

így megállapíthatjuk, hogy a 35. forduló megtétele után a kocsi teherrel összesen 294,875 km utat tett meg.

FELADATOK.

1. Egy számtani sorozat első és ötödik tagjának összege 26, második és negyedik tagjának szorzata 160. Számítsuk ki első hat tagjának összegét.

Megoldás. A feltételek lapján felírhatjuk, hogy

$$a_1 + a_5 = 26 \quad \text{és} \quad a_2 \cdot a_4 = 160.$$

Mivel a fenti összefüggésekben szereplő tagok a_3-ra szimmetrikusak, fejezzük ki a megadott feltételeket a_3 segítségével. Ekkor az összegre vonatkozó feltételből következik, hogy

$$a_3 - 2d + a_3 + 2d = 26, \quad \text{illetve} \quad a_3 = 13.$$

Ha a feltételben szereplő szorzat tényezőit is felírjuk a_3 segítségével, akkor az

$$(a_3 - d)(a_3 + d) = 160, \quad \text{illetve} \quad 13^2 - d^2 = 160$$

összefüggést kapjuk, ahonnan $d^2 = 9$, azaz $d = 3$ vagy $d = -3$.
Ha $d = 3$, akkor az $a_3 = a_1 + 2d$ összefüggésből $a_1 = 7$ következik, a keresett számtani sorozat pedig

$$7, 10, 13, 16, 19, \ldots$$

Amennyiben $d = -3$, az $a_3 = a_1 + 2d$ összefüggésből $a_1 = 19$-et kapunk, s akkor a keresett számtani sorozat

$$19, 16, 13, 10, 7, \ldots$$

2. Határozzuk meg az összes olyan kétjegyű szám összegét, amelyek 4-gyel osztva maradékul 1-et adnak.

Megoldás. Az első olyan kétjegyű szám, amely 4-gyel osztva maradékul 1-et ad, a 13. Ez lehet tehát egy sorozat első eleme ($a_1 = 13$). A 4-gyel való osztás maradékosztályában az elemek sorban 4-gyel növekszenek, tehát egy olyan számtani sorozatot alkotnak, amelynek különbsége $d = 4$. Az utolsó kétjegyű szám ebben a sorozatban a 97. A kérdés most az, hogy a 97 hanyadik eleme ennek a sorozatnak. Mivel $a_n = a_1 + (n-1)d$, így $97 = 13 + (n-1) \cdot 4$, és ebből $n = 22$. A keresett összeg kiszámítható a számtani sorozat első n elemének S_n összegképletéből, s így

$$S_{22} = \frac{22}{2}(13 + 97) = 11 \cdot 110 = 1210.$$

3. Egy erdőtelepítésnél párhuzamos sorokban összesen 2660 fát ültettek el. Az első sorba 8, minden következő sorba pedig 3-mal több fa került, mint az előzőbe. Hány fa jutott az utolsó sorba?

Megoldás. A különböző sorokba ültetett fák száma olyan számtani sorozatot alkot, amelyben $a_1 = 8$ és $d = 3$. Ha n sorba összesen 2660 fát ültettek, akkor $S_n = 2660$, és egyrészt ki kell számolni mennyi az n, másrészt pedig, hogy mennyi az a_n. Mivel

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d), \quad \text{így} \quad 2660 = \frac{n}{2}(16 + 3(n-1)),$$

ahonnan

$$5320 = 16n + 3n(n-1), \quad \text{illetve} \quad 3n^2 + 13n - 5320 = 0.$$

Ebből $n_1 = 40$ és $n_2 = -\dfrac{133}{3}$, ahol a negatív tört megoldásnak nincs értelme, mivel ez nem lehet a sorozat tagjának indexe. Ezek szerint 40 sor fát ültettek el és az utolsó sorba $a_{40} = a_1 + 39d = 8 + 3 \cdot 39 = 125$ fa jutott.

4. Határozzuk meg a számtani sorozatban az első 19 tag összegét, ha tudjuk, hogy $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$.

Megoldás. Mivel a_4 és a_{16}, valamint a_8 és a_{12} az a_{10} elemre nézve szimmetrikusak, ezért írjuk fel a megadott feltételt a_{10} és d segítségével. Ekkor

$$(a_{10} - 6d) + (a_{10} - 2d) + (a_{10} + 2d) + (a_{10} + 6d) = 224,$$

ahonnan $a_{10} = 56$. Az első 19 tag összege felírható a_{10} segítségével, mint

$$S_{19} = \frac{19}{2}(a_1 + a_{19}) = \frac{19}{2}(a_{10} - 9d + a_{10} + 9d) = \frac{19}{2} \cdot 2a_{10} = 19 \cdot 56 = 1064.$$

5. Lehetnek-e az 5 és a $\sqrt{5}$ egy olyan számtani sorozat elemei, amelynek első tagja 2?

Megoldás. Ha van ilyen sorozat, akkor felírható, hogy

$$5 = 2 + (n-1)d \quad \text{és} \quad \sqrt{5} = 2 + (m-1)d,$$

ahol n és m különböző természetes számok. Ekkor

$$5 - 2 = (n-1)d \quad \text{és} \quad \sqrt{5} - 2 = (m-1)d,$$

ezek hányadosa pedig
$$\frac{\sqrt{5}-2}{5-2} = \frac{(m-1)d}{(n-1)d} = \frac{m-1}{n-1}.$$
Innen $\sqrt{5} = 3 \cdot \frac{m-1}{n-1} + 2$, ami lehetetlen, mert $\sqrt{5}$ irracionális szám, a $3 \cdot \frac{m-1}{n-1} + 2$ kifejezés pedig racionális, tehát nem lehetnek egyenlők. Megállapíthatjuk tehát, hogy az 5 és a $\sqrt{5}$ számok nem lehetnek egy olyan számtani sorozat tagjai, amelynek első tagja 2.

2.3.2. Mértani (geometriai) sorozat

2.6. Definíció. *Azt a számsorozatot, amelyben minden elemet (tagot) az őt megelőzőből egy $q \neq 0$ számmal való szorzással kapunk, mértani (vagy geometriai) sorozatnak nevezzük. A q szám a sorozat hányadosa (vagy kvociense).*

A definícióból következik a mértani sorozat rekurzív képzési szabálya:
$$a_n = a_{n-1}q, \quad \text{illetve} \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} = q, \quad n \geq 2.$$
Ebből látjuk, hogy $q > 0$ esetén a sorozat elemei azonos előjelűek. Ha $q > 1$, akkor $a_1 > 0$ esetén a mértani sorozat szigorúan monoton növekvő, $a_1 < 0$ esetén pedig szigorúan monoton csökkenő. Ha $0 < q < 1$ és $a_1 > 0$, akkor a sorozat szigorúan monoton csökkenő, $a_1 < 0$ esetén pedig szigorúan monoton növekvő. $q = 1$-re állandó sorozatot kapunk. Ha $q < 0$, akkor az elemek előjele váltakozó.
A definícióból következik, hogy adott a_1 és q esetén a mértani sorozat tagjai felírhatók
$$a_2 = a_1q,$$
$$a_3 = a_1q^2,$$
$$a_4 = a_1q^3,$$
$$\vdots$$
alakban, illetve ezt az eljárást folytatva és általánosítva kimondható a következő tétel:

2.3. Tétel. *Ha a mértani sorozat első eleme a_1 és hányadosa q, akkor minden n természetes szám esetén*
$$a_n = a_1q^{n-1}.$$

Bizonyítás. A bizonyítást matematikai indukcióval végezzük.

1^o $n = 1$ esetén $a_1 = a_1q^(1-1) = a_1q^0 = a_1$.
2^o Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$-ra, vagyis, hogy $a_k = a_1q^{k-1}$.
3^o Igazoljuk az állítás helyességét $n = k+1$-re. Ekkor
$$a_{k+1} = a_k \cdot q = a_1 \cdot q^{k-1} \cdot q = a_1 \cdot q^k = a_1 \cdot q^{k+1-1}.$$
◇

2.17. Példa. Ha az a feladatunk, hogy az $a_n = \dfrac{3}{2^n}$ mértani sorozatban meghatározzuk az első elemet és a hányadost, akkor az első elem az $a_1 = \dfrac{3}{2^1} = \dfrac{3}{2}$. A kvocienst kiszámíthatjuk bármelyik két szomszédos tag hányadosaként, például

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{3}{2^2}}{\frac{3}{2^1}} = \frac{1}{2}.$$

2.18. Példa. Állapítsuk meg, hogy a mértani sorozat hányadik tagja a -81, ha első eleme -1, hányadosa pedig 3. Mivel $a_n = a_1 q^{n-1}$, ezért $-81 = -1 \cdot 3^{n-1}$, ahonnan $n - 1 = 4$, illetve $n = 5$. Ezért a sorozat ötödik eleme -81.

A mértani sorozatban bármely három egymást követő elemre érvényes az

$$a_n^2 = a_{n-1} a_{n+1}$$

összefüggés, amelyből pozitív tagú sorozat esetén felírható az

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} a_{n+1}}$$

képlet is. Ez azt jelenti, hogy a mértani sorozat három szomszédos eleme közül a középső a két mellette levőnek mértani közepe és ebből származik a megnevezésben a "mértani" jelző. Hasonlóan érvényes $k < n$ esetén, hogy

$$a_n^2 = a_{n-k} a_{n+k}.$$

2.4. Tétel. *Ha az $\{a_n\}$ mértani sorozat első eleme a_1 és hányadosa q, akkor az első n elemének összege*

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad q \neq 1.$$

Ha $q = 1$, akkor $S_n = n a_1$.

Bizonyítás. Ha

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

akkor

$$S_n q = a_1 q + a_2 q + ... + a_n q = a_2 + a_3 + ... + a_{n+1}.$$

Ha a második egyenletből kivonjuk az elsőt, akkor

$$S_n q - S_n = a_2 + a_3 + ... + a_{n+1} - (a_1 + a_2 + ... + a_n) = a_{n+1} - a_1 = a_1 q^n - a_1,$$

vagyis

$$S_n(q - 1) = a_1(q^n - 1), \quad \text{ahonnan} \quad S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Ha $q = 1$, akkor a mértani sorozat minden tagja egyenlő, így $S_n = n \cdot a_1$. $\diamond$

2.19. Példa. Ha az

$$S_n = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}$$

összegben $x \neq 0$ és $y \neq 0$, akkor S_n egy olyan mértani sorozat első n tagjának összege, amelyben $a_1 = x^{n-1}$ és $q = \dfrac{y}{x}$. Ezért

$$S_n = x^{n-1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^n}{1 - \frac{y}{x}} = \frac{x^n - y^n}{x - y},$$

ahonnan

$$(x - y)S_n = x^n - y^n,$$

vagyis ily módon levezettük az ismert összefüggést, mely szerint

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

A mértani sorozat n-edik elemének kiszámítása a kamatos kamatszámításban nagyon fontos. Gondoljunk a következő problémára.

2.20. Példa. Valaki január 1-én 7000 dinárt évi 5%-os kamatláb mellett betesz a bankba. Kamatosan kamatozva 6 év alatt mekkorára növekszik meg az összeg? (A kamatos kamatozás azt jelenti, hogy az évi kamatot évenként automatikusan hozzácsatolják a lekötött pénzösszeghez, és a következő években már ez a megnövekedett összeg kamatozik.)
Általánosan fogalmazva:
A T_0 összeg évi p%-os kamatlábbal kamatozva n év alatt mekkorára növekszik fel?
A p%-os kamattal növelt összeg 1 év alatt az eredeti $1 + \dfrac{p}{100}$-szorosára növekszik. Ezért p%-kal kamatosan kamatozva n év alatt a T_0 összegből lesz

$$T_n = T_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Esetünkben ez

$$T_6 = T_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^6 = 7000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^6 = 7000 \cdot 1,05^6 = 9380,67\,\text{din}.$$

FELADATOK.

1. Egy növekvő mértani sorozat első és harmadik tagjának összege 20, első három tagjának összege pedig 26. Melyik ez a sorozat?

   Megoldás. Mivel $a_1 + a_3 = 20$ és $a_1 + a_2 + a_3 = 26$, ebből nyilvánvaló, hogy $a_2 = 6$, ahonnan $a_1 q = 6$, illetve $a_1 = \dfrac{6}{q}$. Mivel

   $$a_1 + a_1 q^2 = 20, \quad \text{így} \quad a_1(1 + q^2) = 20,$$

   illetve

   $$\frac{6}{q}(1 + q^2) = 20.$$

Ebből a $3q^2-10q+3=0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek megoldásai $q_1=3$ és $q_2=\frac{1}{3}$. Mivel a keresett sorozat növekvő kell legyen, így a hányados nem lehet $\frac{1}{3}$. Ezért $q=3$ és $a_1=2$. A feladatban megdott feltételekt kielégítő növekvő mértani sorozat tehát:

$$2, 6, 18, 54, \ldots$$

2. Egy mértani sorozat negyedik tagja 24-gyel nagyobb, mint a második tag, második és harmadik tagjának összege pedig 6. Határozzuk meg ezt a sorozatot.

Megoldás. A megadott feltételekből felírhatjuk, hogy

$$a_4 = a_2 + 24 \quad \text{és} \quad a_2 + a_3 = 6,$$

$$a_1q^3 - a_1q = 24 \quad \text{és} \quad a_1q + a_1q^2 = 6,$$
$$\text{illetve} \quad a_1(q^3-q) = 24 \quad \text{és} \quad a_1(q+q^2) = 6.$$

Osszuk el a két egyenlet megfelelő oldalait:

$$\frac{q^3-q}{q+q^2} = \frac{24}{6}.$$

Ekkor

$$q(q^2-1) = 4q(q+1), \quad \text{ha} \quad q+q^2 \neq 0,$$

ebből pedig következik, hogy $q-1=4$, ahonnan $q=5$. Most $30 \cdot a_1 = 6$, innen pedig $a_1 = \frac{1}{5}$. Ekkor a keresett mértani sorozat

$$\frac{1}{5}, 1, 5, 25, 125, \ldots$$

Nézzük meg ad-e további megoldást a $q+q^2=0$ eset. A mértani sorozat definíciója szerint $q \neq 0$. Ha $q=-1$, akkor a második feltételből $a_1 \cdot 0 = 6$, ami ellentmondást jelent, tehát ezek az értékek nem adnak megoldást.

3. Egy pozitív tagú mértani sorozat első és ötödik tagjának különbsége 15, első és harmadik tagjának összege pedig 20. Határozzuk meg a sorozat első öt tagjának összegét.

Megoldás. Ahhoz, hogy a mértani sorozat minden tagja pozitív legyen, a_1 és q is pozitív kell legyen. A feltételek szerint $a_1 - a_5 = 15$ és $a_1 + a_3 = 20$ igaz, amelyek felírhatók a_1 és q segítségével, mint

$$a_1(1-q^4) = 15 \quad \text{és} \quad a_1(1+q^2) = 20.$$

Elosztva a két egyenlet megfelelő oldalait kapjuk, hogy

$$\frac{1-q^4}{1+q^2} = \frac{3}{4}.$$

Mivel $1-q^4 = (1-q^2)(1+q^2)$ és $1+q^2 \neq 0$, ezért a baloldalon egyszerűsíthetünk $1+q^2$-tel, s ebből az

$$1-q^2 = \frac{3}{4}, \quad \text{illetve} \quad q^2 = \frac{1}{4}$$

egyenletet kapjuk, ahonnan $q = -\frac{1}{2}$ vagy $q = \frac{1}{2}$. Mivel a feltételek szerint a hányados nem lehet negatív, ezért $q = \frac{1}{2}$ az egyetlen megoldás. Ekkor $a_1 = 16$, a keresett mértani sorozat pedig

$$16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots$$

4. Egy háromszög oldalainak mérőszáma egy mértani sorozat három egymást követő eleme. Milyen határok között változhat a sorozat hányadosa?

Megoldás. Legyenek a háromszög oldalai a, b és c. Tegyük fel, hogy a a háromszög legrövidebb, c pedig a leghosszabb oldala. Mivel ezek a számok mértani sorozatot alkotnak, így $b = aq$ és $c = aq^2$, eami szerint $q \geq 1$. A háromszög oldalaira vonatkozó egyenlőtlenség szerint

$$a + b > c, \quad \text{ahonnan} \quad a + aq > aq^2.$$

Mivel a a háromszög oldala, ezért pozitív szám, így a fenti egyenlőtlenség osztható a-val. Ekkor

$$q^2 - q - 1 < 0$$

egyenlőtlenséget kapjuk, ahonnan $q \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$. Mivel $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ negatív szám, ezért a $q \geq 1$ feltétel miatt a hányados határai 1 és $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, azaz

$$1 \leq q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

5. A 2 és 4 közé iktassunk 9 számot úgy, hogy a két megadott számmal együtt mértani sorozatot alkossanak.

Megoldás. A 2-vel és a 4-gyel együtt a keresett 9 szám a sorozat 11 elemét adja meg, vagyis $a_1 = 2$ és $a_{11} = 4$. Mivel $a_{11} = a_1 \cdot q^{10}$, így $4 = 2 \cdot q^{10}$, ahonnan $q = \sqrt[10]{2}$ következik, ugyanis ennek a sorozatnak növekvőnek kell lennie, és ez csak $q > 1$ esetén történhet meg. Így a sorozat elemei

$$2,\ 2\sqrt[10]{2},\ 2\sqrt[10]{2^2},\ 2\sqrt[10]{2^3},\ 2\sqrt[10]{2^4},\ 2\sqrt[10]{2^5},\ 2\sqrt[10]{2^6},\ 2\sqrt[10]{2^7},\ 2\sqrt[10]{2^8},\ 2\sqrt[10]{2^9},\ 2\sqrt[10]{2^{10}},$$

illetve némi rendezés után

$$2,\ 2\sqrt[10]{2},\ 2\sqrt[5]{2},\ 2\sqrt[10]{8},\ 2\sqrt[5]{4},\ 2\sqrt[10]{32},\ 2\sqrt[5]{8},\ 2\sqrt[10]{128},\ 2\sqrt[5]{16},\ 2\sqrt[10]{512},\ 4.$$

6. Egy számtani és egy mértani sorozat első eleme 5 és harmadik elemük is egyenlő. A számtani sorozat második eleme 10-zel nagyobb a mértani sorozat második eleménél. Írjuk fel ezeket a sorozatokat.

Megoldás. Jelölje a_1, a_2, a_3 a számtani sorozat, b_1, b_2, b_3 pedig a mértani sorozat első három elemét. Ekkor

$$a_1 = b_1 = 5, \quad a_3 = b_3, \quad \text{és} \quad a_2 = b_2 + 10.$$

Mivel $a_2 = 5 + d$ és $a_3 = 5 + 2d$, valamint $b_2 = 5q$ és $b_3 = 5q^2$, így következik, hogy

$$5 + 2d = 5q^2 \quad \text{és} \quad 5 + d = 5q + 10.$$

A második egyenletből $d = 5q + 5$, majd ezt az elsőbe helyettesítve következik, hogy

$$5 + 10q + 10 = 5q^2, \quad \text{vagyis} \quad q^2 - 2q - 3 = 0,$$

amelynek megoldásai $q_1 = -1$ és $q_2 = 3$. Ha $q_1 = -1$, akkor $d_1 = 0$, a keresett sorozatok pedig az $5, 5, 5, \ldots$ számtani és az $5, -5, 5, \ldots$ mértani sorozat. Ha $q_2 = 3$, akkor $d_2 = 20$, a keresett sorozatok pedig az $5, 25, 45, \ldots$ számtani és az $5, 15, 45, \ldots$ mértani sorozat. Ezért tehát két sorozatpár létezik a feladatban megadott feltételekkel, mégpedig az

$$5, 5, 5, \ldots \quad \text{és} \quad 5, -5, 5, \ldots$$

valamint az

$$5, 25, 45, \ldots \quad \text{és} \quad 5, 15, 45, \ldots$$

sorozatpár.

7. Négy szám egy mértani sorozat négy egymást követő elemét alkotja. Ha a második számhoz 6-ot, a harmadikhoz 3-at adunk, a negyedikből 36-ot elveszünk, akkor az így kapott négy szám egy számtani sorozat egymást követő tagjai lesznek. Melyik ez a négy szám?

Megoldás. Legyenek a, b, c és d a négy szám, amelyek mértani sorozatot alkotnak. Ekkor a feltételek szerint a, $b+6$, $c+3$ és $d-36$ számtani sorozatot alkotnak. Ezért érvényes, hogy

$$\begin{aligned} b^2 &= ac \\ c^2 &= bd \\ 2(b+6) &= a+c+3 \\ 2(c+3) &= b+6+d-36 \end{aligned}$$

A harmadik egyenletből $a = 2b - c + 9$, a negyedikből pedig $d = 2c - b + 36$. helyettesítsük be ezeket a kifejezéseket az első két egyenletbe. Ekkor a

$$\begin{aligned} b^2 &= c(2b-c+9) \\ c^2 &= b(2c-b+36) \end{aligned}$$

egyenletrendszert kapjuk. Rendezzük a két egyenletet

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 - 2bc &= 9c \\ b^2 + c^2 - 2bc &= 36d \end{aligned}$$

alakúra, majd vonjuk ki egymásból a két egyenletet. Ekkor $c = 4d$ adódik, majd ezt behelyettesítve az $a = 2b - c + 9$ és $d = 2c - b + 36$ egyenletekbe adódnak az $a = 9 - 2b$ és $d = 7b + 36$ összefüggések. A $b^2 = ac$ egyenletbe helyettesítve a $b^2 = (9 - 2b) \cdot 4b$ egyenletet kapjuk, ahonnan $b = 0$ vagy $b = 4$. Ha $b = 0$, akkor $c = 0$, $a = 9$ és $d = 36$, amiből a $9, 0, 0, 36$ sorozatot kapnánk, de ez nem mértani sorozat. Ha $b = 4$, akkor $c = 16$, $a = 1$ és $d = 64$, amiből az $1, 4, 16, 64$ mértani sorozatot kapjuk, a megfelelő számtani sorozat pedig az $1, 10, 19, 28$. A keresett négy szám tehát $1, 4, 16, 64$.

8. Három szám, melyek összege 76, mértani sorozatot alkot. Ezt a három számot tekinthetjük egy számtani sorozat első, negyedik és hatodik tagjának is. Melyik ez a három szám?

Megoldás. Legyenek a, b és c a keresett számok. Mivel ezek a számok mértani sorozatot alkotnak, így $b = aq$ és $c = aq^2$. A számok összege $a + b + c = 76$, illetve $a + aq + aq^2 = 76$. A másik feltétel szerint $b = a + 3d$, illetve $c = a + 5d$ és mivel mértani sorozat elemeiről van szó, ezért felírható, hogy $aq = a + 3d$, illetve $aq^2 = a + 5d$. ha a két egyenletet kivonjuk egymásból, akkor a $2d = aq(q - 1)$ feltételt kapjuk. Az $a(q - 1) = 3d$ és a $aq(q - 1) = 2d$ feltételből adódik továbbá, hogy

$$\frac{a(q-1)}{3} = \frac{aq(q-1)}{2},$$

ahonnan

$$2a(q-1) = 3aq(q-1) \quad \text{azaz} \quad a(q-1)(2-3q) = 0.$$

Innen $a = 0$ vagy $q = 1$ vagy $q = \frac{2}{3}$ a lehetséges megoldások.
$a = 0$ esetén $b = 0$ és $c = 0$ lenne, ezek összege pedig nem 76.
Ha $q = 1$, akkor $a = \frac{76}{3}$, $b = \frac{76}{3}$ és $c = \frac{76}{3}$. Ez a három szám kielégíti a megadott feltételeket.
ha $q = \frac{2}{3}$, akkor $a\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right) = 76$, ahonnan $a = 36$, $b = 24$ és $c = 16$ adódik. Mivel ez a három szám is kielégíti a megadott feltételeket (a megfelelő számtani sorozatban $d = -4$), ezért két olyan számhármas létezik, amely eleget tesz a feladatban kitűzött feltételeknek, ezek pedig a

$$\frac{76}{3},\ \frac{76}{3},\ \frac{76}{3} \quad \text{és a} \quad 36,\ 24,\ 16.$$

9. Lakásvásárlásra januárban 50000 euró kölcsönt kaptunk a banktól évi 5%-os kamatos kamatra. Minden év végén 6000 eurót kell törlesztenünk. Hány év múlva fizetjük vissza az adósságunkat?

Megoldás. A kölcsön összege kezdetkor $T_0 = 50000$ euró. Ha erre az összegre az év végén 5%-os kamatot fizetünk és törlesztünk $x = 6000$ eurót, akkor az első év végén az adósságunk

$$T_1 = T_0\left(1 + \frac{p}{100}\right) - x = T_0 \cdot q - x,$$

ahol $q = 1 + \frac{p}{100}$. A második év végén az adósságunk

$$T_2 = T_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) - x = (T_0 \cdot q - x) \cdot q - x = T_0 \cdot q^2 - x(q+1).$$

A harmadik év végén ez

$$T_3 = T_2\left(1 + \frac{p}{100}\right) - x = (T_0 \cdot q^2 - x(q+1)) \cdot q - x = T_0 \cdot q^3 - x(q^2 + q + 1).$$

Folytatva ezt az eljárást azt kapjuk, hogy az n. év végén adósságunk

$$T_n = T_0 \cdot q^n - x(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1) = T_0 \cdot q^n - x \cdot 1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Ha adósságunkat az n. évben teljesen vissza akarjuk fizetni, akkor $T_n = 0$ kell legyen. Az a kérdés, hogy ez hanyadik évben történik, azaz mennyi az n értéke. Mivel

$$q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{5}{100} = 1.05,$$

így a keresett értéket a

$$0 = 50000 \cdot 1.05^n - 6000 \cdot 1 \cdot \frac{1.05^n - 1}{1.05 - 1}$$

egyenletből számítjuk ki. Innen

$$120000 = 70000 \cdot 1,05^n, \quad \text{illetve} \quad 1.05^n = \frac{12}{7}.$$

Mindkét oldal logaritmálásával azt kapjuk, hogy

$$n \cdot \log 1.05 = \log \frac{12}{7},$$

ahonnan $n \approx 11.04$, ez pedig azt jelenti, hogy az adósságot körülbelül 11 év alatt fizetjük vissza.

10. Számítsuk ki az $S_n = 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99\cdots9}_{n}$ összeget.

Megoldás. Először vegyük észre, hogy az összeadandók mindegyike a 10 valamelyik hatványától 1-gyel kisebb szám. Ezt az észrevételt felhasználva felírhatjuk, hogy

$$S_n = (10^1 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \cdots + (10^n - 1).$$

Innen az

$$S_n = 10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^n - n,$$

képletet kapjuk, amelyben felhasználva a mértani sorozat első n elemének összegképletét adódik, hogy

$$S_n = 10 \cdot \frac{10^n - 1}{10 - 1} - n = \frac{10}{9} \cdot (10^n - 1) - n.$$

2.3.3. A Fibonacci-féle sorozat

Leonardo Pisano (1170-1250) olasz kereskedő-matematikust Fibonaccinak (Bonaccio fia) is nevezték. Sokat utazott és utazásai során sokat foglalkozott az arab matematikával. Két könyvet írt, melyekben több saját eredménye is van. Az 1228-ban kiadott könyvében található az azóta híressé vált következő példa.

2.21. Példa. Vizsgáljuk meg, mennyire szaporodik egy pár maszületett nyúl egy év alatt, ha minden nyúlpár minden hónap végén egy párral szaporodik, a nyulak pedig kéthónapos korukban ivaréretttek. (Ez azt jelenti, hogy akkor hoznak első ízben utódokat.)
Minden hónap végén csak azok a nyulak szaporodnak, amelyek legalább kéthónaposak, és így az első hónap végén, illetve második hónap kezdetén nincs szaporulat, marad az egy

pár nyúl. A második hónap végén, azaz harmadik hónap kezdetén már van szaporulat, és így két pár a nyulak száma. A harmadik hónap végén, illetve negyedik hónap kezdetén is csak az eredeti egy pár nyúlnak van ivadéka és így három pár nyúl lesz. A következő, a negyedik hónap végén, vagyis ötödik hónap kezdetén már két pár nyúl lesz kéthónapos, ezért a szaporulat két pár stb. Ha a_n jelenti a nyulak számát az n-edik hónap kezdetén és a_1 a nyulak számát a tenyésztés kezdetén, akkor

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad n = 2, 3, ...$$

Az így kapott

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...$$

sorozatot Fibonacci sorozatnak szokás nevezni, amelynek általános eleme:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \quad n = 1, 2, ...$$

2.4. Differenciaegyenletek

Az előző fejezetekben találkoztunk két érdekes rekurzív sorozattal. Az egyik egy mértani sorozat,

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

amely általános tagjának képlete $a_n = 2^n$, a másik a Fibonacci-sorozat

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots, \tag{2.1}$$

amely általános tagjának képlete

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \quad n = 1, 2, \dots,$$

két mértani sorozat különbsége. Most megmutatjuk azt az eljárást, amelyből a Fibonacci-sorozat képletét nyertük.

Tegyük fel, hogy van olyan $\{t^n\}$ $(t \neq 0)$ mértani sorozat, amely a (2.1) rekurziós formulát kielégíti. Ekkor

$$t^{n+1} = t^n + t^{n-1}, \quad n = 1, 2, ...,$$

és így

$$t^2 - t - 1 = 0. \tag{2.2}$$

Ha t a (2.2) egyenletnek a megoldása, akkor $\{t^n\}$ kielégíti a (2.1) rekurziós formulát. Mivel a (2.2) egyenlet két gyöke $t_1 = \dfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ és $t_2 = \dfrac{1}{2}(1-\sqrt{5})$, ezért az

$$\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \quad \text{és} \quad \left\{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \tag{2.3}$$

geometriai sorozat mindegyike megoldása a (2.1) rekurziós formulának.

A fenti két sorozat egyike sem teljesíti azonban az $a_1 = a_2 = 1$ kezdeti feltételeket. Könnyen ellenőrizhető, hogy bármely C_1 és C_2 állandó mellett a (2.3) sorozatok C_1 és C_2

állandókkal való beszorzásával kapott sorozat is kielégíti a (2.1) rekurziós formulát, és a két sorozat összege, az

$$a_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

is. Most a C_1 és C_2 értékeket, a mértani sorozat kezdőértékeit úgy fogjuk megválasztani, hogy $a_1 = a_2 = 1$ legyen. Ez a következő egyenlőségek teljesülését jelenti:

$$C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1 \ ,$$

$$C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 = 1 \ ,$$

amiből $C_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ és $C_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Ezt az eljárást alkalmazni lehet a Fibonacci-sorozatnál általánosabb rekurzív sorozatokra is.

2.4.1. Véges differenciák

2.7. Definíció. *Egy $\{a_n\}$ valós számsorozat véges differenciáján a*

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n, \quad n = 1, 2, ...$$

különbséget értjük.

Az a leképezés, amely az $\{a_n\}$ sorozathoz hozzárendeli a $\{\Delta a_n\}$ sorozatot, a következő tulajdonsággal rendelkezik:

$$\Delta(a_n + b_n) = \Delta a_n + \Delta b_n,$$

és ha λ valós szám, akkor

$$\Delta(\lambda a_n) = \lambda \cdot \Delta a_n,$$

vagyis a Δ az összeadással és a λ-val való szorzással felcserélhető. Ezt a tulajdonságot úgy fejezzük ki röviden, hogy Δ *lineáris.* A magasabb differenciákat a következőképpen értelmezzük: a második differencia

$$\Delta^2 a_n = \Delta(\Delta a_n) = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n.$$

2.4.2. Állandó együtthatós lineáris differenciaegyenletek

2.8. Definíció. *Az ismeretlen $\{a_n\}$ számsorozat és első differenciája között fennálló*

$$A_1 \Delta a_n + A_0 a_n = 0, \tag{2.4}$$

alakú lineáris összefüggést, ahol A_1, A_0 együtthatók adott valós számok és $A_1 \neq 0$, állandó együtthatós elsőrendű lineáris differenciaegyenletnek nevezzük.

Behelyettesítve a véges differencia alakját, a (2.4) egyenletet a

$$a_{n+1} = qa_n$$

alakban is felírhatjuk.

2.22. Példa. Tekintsük a

$$\Delta a_n = k$$

alakú differenciaegyenlet, ahol k állandó. A véges differencia definícióját behelyettesítve a fenti egyenlet

$$a_{n+1} - a_n = k$$

alakban írható fel. Az általános megoldás nyilvánvalóan

$$a_n = kn + C.$$

Ez azt jelenti, hogy az a_n értékek olyan számtani sorozatot alkotnak, amelynek differenciája k.

2.23. Példa. Tekintsük most a

$$\Delta a_n + ba_n = 0$$

differenciaegyenletet. A véges differencia definícióját behelyettesítve ez az egyenlet

$$a_{n+1} - a_n + ba_n = 0$$

alakban írható, ahonnan

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - b$$

egyenlet adódik. Ebben az esetben tehát az a_n értékek mértani sorozatot alkotnak.

$a_1 = A$ kezdeti érték esetén az

$$a_{n+1} = qa_n$$

elsőrendű lineáris differenciaegyenlet általános megoldása

$$a_n = Aq^{n-1}.$$

A megoldáshoz a következő módszerrel juthatunk: keressük a megoldást $a_n = Ct^n$ alakban, ahol C meghatározatlan állandó, maga a megoldás pedig egy tetszőlegesen választott kezdeti értéktől függ. Behelyettesítés után adódik, hogy

$$t^{n+1} = qt^n,$$

innen pedig a $t - q = 0$ karakterisztikus egyenlet megoldásaként a $t = q$ értéket kapjuk. A kezdeti érték felhasználásával kiszámítható, hogy $C = \dfrac{A}{q}$, ami a fent megadott megoldáshoz vezet.

2.9. Definíció. *Az ismeretlen $\{a_n\}$ számsorozat és első két differenciája között fennálló*

$$A_2\Delta^2 a_n + A_1\Delta a_n + A_0 a_n = 0 \tag{2.5}$$

alakú lineáris összefüggést, ahol A_2, A_1, A_0 együtthatók adott valós számok és $A_2 \neq 0$, állandó együtthatós másodrendű lineáris differenciaegyenletnek nevezzük.

Behelyettesítve a véges differenciák megfelelő alakjait, a (2.5) egyenletet az

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n \tag{2.6}$$

alakban is felírhatjuk.
Induljunk ki most a (2.6) egyenletből, amely az a_n, a_{n+1} és a_{n+2} ismeretleneket tartalmazza. Ha az a_n és a_{n+1} értékeket tetszőlegesen választjuk, akkor az egyenlet meghatározza az a_{n+2} értéket. Írjuk fel most azt az egyenletet, amelyet úgy kapunk, hogy minden index értékét eggyel megnöveljük. Az ebben az egyenletben előforduló ismeretlenek a következők lesznek: a_{n+1}, a_{n+2} és a_{n+3}. Mivel a_{n+1} és a_{n+2} értéke már ismert, ezért meg tudjuk határozni a_{n+3} értékét. Folytatva ezt az eljárást, belátható, hogy a_n és a_{n+1} tetszőlegesen megválasztott két kezdeti értéke a megoldást teljesen meghatározza. A megoldás tehát két tetszőlegesen választható kezdeti értéktől függ.
Tegyük fel, hogy f_n és g_n az

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n \tag{2.7}$$

állandó együtthatós lineáris differenciaegyenlet két lineárisan független megoldása és mindkettő egy speciálisan megválasztott kezdeti értékrendszernek felel meg. Ekkor, az egyenletek lineáris jellege miatt az általános megoldást

$$a_n = C_1 f_n + C_2 g_n$$

alakban írhatjuk fel, ahol C_1 és C_2 tetszőleges állandó. A fenti összefüggés megadja a (2.7) differenciaegyenlet általános megoldását, ha az f_n és g_n megoldások lineárisan függetlenek.
A (2.7) másodrendű lineáris differenciaegyenlet általános megoldásának előállítása végett keressük a megoldást $a_n = t^n$ $(t \neq 0)$ alakban, ahol t egyelőre határozatlan állandó. Behelyettesítve a következő (2.7) differenciaegyenletbe, t ismeretlenes egyenletet kapjuk:

$$t^{n+2} = pt^{n+1} + qt^n, \quad n = 1, 2, 3, ..., \tag{2.8}$$

amiből a

$$t^2 = pt + q,$$

másodfokú algebrai egyenlet adódik, a (2.7) karakterisztikus egyenlete, amelynek t a gyöke. Fordítva, ha t a karakterisztikus egyenletnek a megoldása, akkor (2.8) is érvényes, vagyis t^n kielégíti a (2.7) differenciaegyenletet.
Két esetet fogunk tárgyalni: amikor a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós gyöke van és amikor a karakterisztikus egyenletnek egy kettős valós gyöke van.

I. Vegyük először a két különböző valós gyök esetét, amikor t_1 és t_2 a karakterisztikus egyenlet valós megoldásai, ahol $t_1 \neq t_2$. Ekkor, $f_n = t_1^n$ és $g_n = t_2^n$ a lineárisan független megoldások, s éppúgy, mint a Fibonacci-sorozat esetében, tetszőleges C_1, C_2 mellett az

$$a_n = C_1 t_1^n + C_2 t_2^n \tag{2.9}$$

sorozat általános megoldása a differenciaegyenletnek, amiből az $a_1 = A$, $a_2 = B$ kezdeti értéket kielégítő megoldást úgy kapjuk, hogy a

$$C_1 t_1 + C_2 t_2 = A,$$

$$C_1 t_1^2 + C_2 t_2^2 = B$$

egyenletrendszert kielégítő C_1, C_2 értékeket helyettesítjük a (2.9) képletbe.

2.24. Példa. Oldjuk meg az

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 2$$

differenciaegyenletet.

Megoldás. A karakterisztikus egyenlet $t^2 - 5t + 6 = 0$, amelynek gyökei $t_1 = 3$ és $t_2 = 2$. Így az egyenlet általános megoldása:

$$a_n = C_1 3^n + C_2 2^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

A C_1, C_2 értékpárra

$$3C_1 + 2C_2 = 3,$$

$$9C_1 + 4C_2 = 2,$$

amiből $C_1 = -\frac{4}{3}$ és $C_2 = \frac{7}{2}$.

II. Kettős valós gyök esetén, amikor $t_1 = t_2$ valós szám, $f_n = t_1^n$ és $g_n = nt_1^n$ a lineárisan független megoldások, s tetszőleges C_1, C_2 mellett az

$$a_n = C_1 t_1^n + C_2 n t_1^n \tag{2.10}$$

sorozat általános megoldása a differenciaegyenletnek, amiből az $a_1 = A$, $a_2 = B$ kezdeti értéket kielégítő megoldást úgy kapjuk, hogy a

$$C_1 t_1 + C_2 t_1 = A,$$

$$C_1 t_1^2 + 2C_2 t_1^2 = B$$

egyenletrendszert kielégítő C_1, C_2 értékeket helyettesítjük a (2.10) képletbe.

2.25. Példa. Határozzuk meg az

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1$$

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

rekurzív módon megadott számsorozat általános elemét.

Megoldás. A karakterisztikus egyenlet $t^2 - 4t + 4 = 0$, amelynek gyökei $t_1 = t_2 = 2$. Így az egyenlet általános megoldása:

$$a_n = C_1 2^n + C_2 2^n n, \quad n = 1, 2, \dots$$

A C_1, C_2 értékpárra

$$2C_1 + 2C_2 = 0,$$

$$4C_1 + 8C_2 = 1,$$

amiből $C_1 = -\frac{1}{4}$ és $C_2 = \frac{1}{4}$. Ennek alapján az általános elem

$$a_n = -\frac{1}{4} \cdot 2^n + \frac{1}{4} \cdot 2^n n = (n-1)2^{n-2}.$$

FELADATOK.

1. Oldjuk meg az $a_{n+1} - 3a_n = 0$ differenciaegyenletet, ha $a_1 = \sqrt{2}$.

Megoldás. Keressük a megoldást $a_n = t^n$ alakban, ahol $t \neq 0$. Ekkor az egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$t^{n+1} - 3t^n = 0, \quad \text{illetve a} \quad t - 3 = 0$$

karakterisztikus egyenletet, amelynek megoldása $t = 3$. Ekkor az általános megoldás $a_n = C \cdot 3^n$ alakban írható fel, ahol C tetszőleges valós szám. Mivel $a_1 = \sqrt{2}$ kell, hogy teljesüljön, ezért behelyettesítve az általános megoldás képletébe kapjuk, hogy $3C = \sqrt{2}$, ahonnan $C = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$, a kért feltételeknek eleget tevő megoldás pedig $a_n = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \cdot 3^n$, azaz $a_n = \sqrt{2} \cdot 3^{n-1}$.

2. Írjuk fel az $a_1 = 2$, $a_{n+1} = -\dfrac{1}{10}a_n$ rekurzív módon megadott számsorozat általános elemét.

Megoldás. A megoldást $a_n = t^n$ alakban keressük, ahol $t \neq 0$. Ekkor az egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$t^{n+1} = -\frac{1}{10}t^n, \quad \text{ahonnan} \quad t = -\frac{1}{10}$$

a karakterisztikus egyenletet megoldása. Ekkor a rekurzív egyenletet kielégíti az $a_n = C \cdot \left(-\dfrac{1}{10}\right)^n$ általános megoldás, ahol C tetszőleges valós szám. Mivel $a_1 = 2$ kell, hogy teljesüljön, ezért behelyettesítve az általános megoldás képletébe kapjuk, hogy $\dfrac{-C}{10} = 2$, ahonnan $C = -20$ következik, a sorozat n. elemének képlete pedig $a_n = -20 \cdot \dfrac{(-1)^n}{10^n}$, azaz $a_n = -2 \cdot \dfrac{(-1)^n}{10^{n-1}}$.

3. Oldjuk meg az $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ differenciaegyenletet, ha $a_1 = 3$, $a_2 = 3$.

Megoldás. A megoldást most is $a_n = t^n$ alakban keressük, ahol $t \neq 0$. Ekkor az egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$t^{n+2} = 5t^{n+1} - 6t^n, \quad \text{ahonnan} \quad t^2 - 5t + 6 = 0$$

a karakterisztikus egyenletet, megoldásai pedig $t_1 = 2$ és $t_2 = 3$. Ekkor a differenciaegyenletet kielégíti minden

$$a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$$

alakú megoldás, amelyet általános megoldásnak nevezünk, ahol C_1 és C_2 tetszőleges egymástól független valós számok. Mivel $a_1 = 3$ és $a_2 = 3$ kell, hogy teljesüljön, ezért behelyettesítve az általános megoldás képletébe kapjuk az

$$3 = 2C_1 + 3C_2 \quad \text{és} \quad 3 = 4C_1 + 9C_2,$$

egyenletrendszert, ahonnan $C_1 = 3$ és $C_2 = -1$, a feladat feltételeit kielégítő megoldás pedig

$$a_n = 3 \cdot 2^n - 3^n.$$

4. Írjuk fel az $a_1 = 2$, $a_2 = -2$, $a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4a_n$ rekurzív módon megadott számsorozat általános elemét.

Megoldás. Keressük az általános elemet $a_n = t^n$ alakban, ahol $t \neq 0$. Ekkor az egyenletbe helyettesítve adódik, hogy

$$t^{n+2} = 3t^{n+1} + 4t^n, \quad \text{ahonnan} \quad t^2 - 3t - 4 = 0$$

a karakterisztikus egyenletet, melynek megoldásai $t_1 = -1$ és $t_2 = 4$. Ekkor a rekurzív egyenletet kielégíti minden olyan

$$a_n = C_1 \cdot (-1)^n + C_2 \cdot 4^n$$

alakú megoldás, ahol C_1 és C_2 tetszőleges egymástól független valós számok. Mivel $a_1 = 2$ és $a_2 = -2$ kell, hogy teljesüljön, ezért behelyettesítve az általános megoldás képletébe kapjuk az

$$2 = -C_1 + 4C_2 \quad \text{és} \quad -2 = C_1 + 16C_2,$$

egyenletrendszert, ahonnan $C_1 = 2$ és $C_2 = 0$, a sorozat általános elemének képlete pedig

$$a_n = -2 \cdot (-1)^n, \quad \text{vagyis} \quad a_n = 2(-1)^{n+1}.$$

5. Oldjuk meg az $a_{n+2} = -2a_{n+1} - a_n$ differenciaegyenletet, ha $a_1 = 0$, $a_2 = 1$.

Megoldás. A megoldást $a_n = t^n$ alakban keressük, ahol $t \neq 0$. Az egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$t^{n+2} = -2t^{n+1} - t^n, \quad \text{ahonnan} \quad t^2 + 2t + 1 = 0$$

a karakterisztikus egyenletet, melynek megoldásai $t_1 = t_2 = -1$. Ekkor a differenciaegyenletet kielégíti minden

$$a_n = C_1 \cdot (-1)^n + C_2 \cdot n(-1)^n$$

alakú megoldás, amelyet általános megoldásnak nevezünk, ahol C_1 és C_2 tetszőleges egymástól független valós számok. Mivel $a_1 = 0$ és $a_2 = 1$ kell, hogy teljesüljön, ezért behelyettesítve az általános megoldás képletébe kapjuk az

$$0 = -C_1 - C_2 \quad \text{és} \quad 1 = C_1 + 2C_2,$$

egyenletrendszert, ahonnan $C_1 = 1$ és $C_2 = -1$, a feladat feltételeit kielégítő megoldás pedig

$$a_n = (-1)^n - n(-1)^n, \quad \text{vagyis} \quad a_n = (1 - n)(-1)^n.$$

2.5. Konvergens sorozatok

2.5.1. Sorozatok határértéke

Tekintsük az

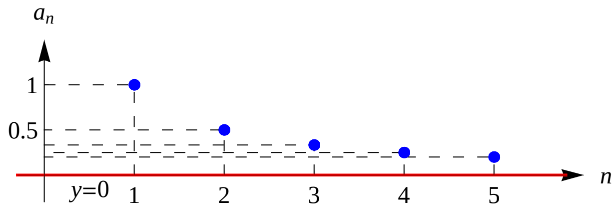
$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{n-1}{n}, \quad c_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}, \quad d_n = (-1)^n$$

sorozatokat. Írjuk fel e sorozatok első néhány elemét és rajzoljuk fel grafikonjaikat a számsíkban.

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \text{esetén}$$

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3},$$

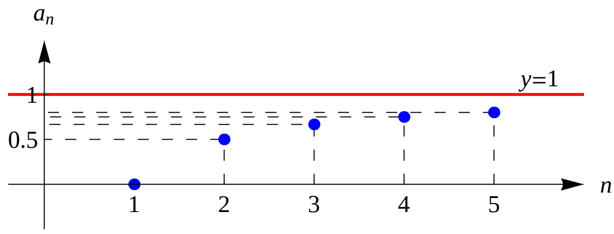
$$a_4 = \frac{1}{4}, \quad a_5 = \frac{1}{5}, \ldots$$



$$b_n = \frac{n-1}{n} \quad \text{esetén}$$

$$b_1 = 0, \quad b_2 = \frac{1}{2}, \quad b_3 = \frac{2}{3},$$

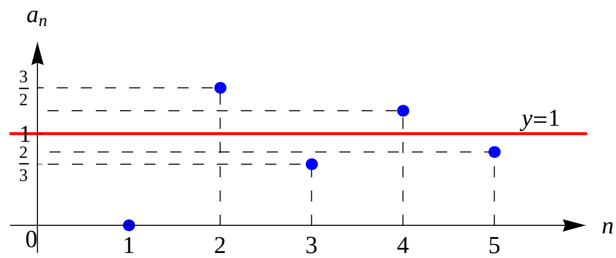
$$b_4 = \frac{3}{4}, \quad b_5 = \frac{4}{5}, \ldots$$



$$c_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{esetén}$$

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad c_3 = 1 - \frac{1}{3},$$

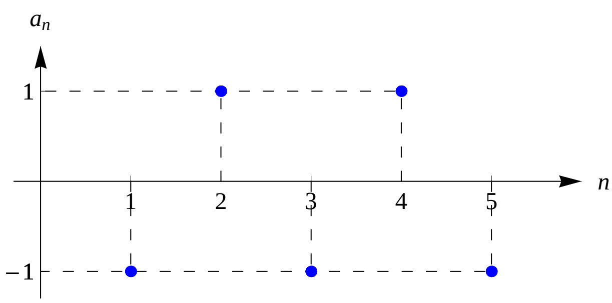
$$c_4 = 1 + \frac{1}{4}, \quad c_5 = 1 - \frac{1}{5}, \ldots$$



$$d_n = (-1)^n \quad \text{esetén}$$

$$d_1 = -1, \quad d_2 = 1, \quad d_3 = -1,$$

$$d_4 = 1, \quad d_5 = -1, \ldots$$

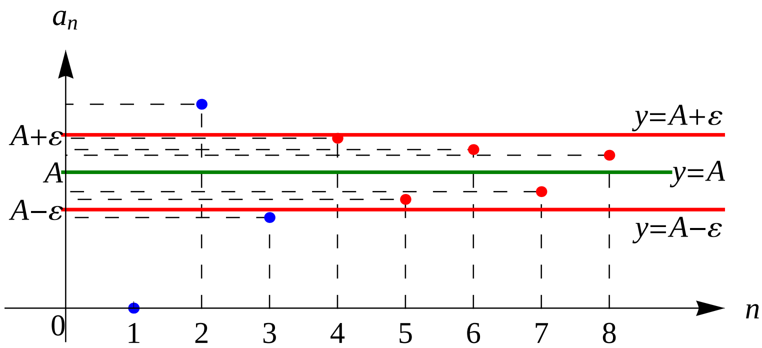


E sorozatokat vizsgálva észrevehető, hogy az $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ sorozatok esetében rendre van egy-egy olyan szám, amelyet a sorozat elemei tetszőlegesen megközelítenek valamilyen módon. Az $\{a_n\}$ sorozat elemei a 0-t, a $\{b_n\}$ és a $\{c_n\}$ sorozat elemei az 1-et. A $\{d_n\}$ sorozat esetében nincs ilyen szám.

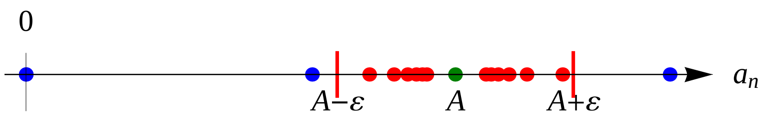
A sorozatok e tulajdonságának pontos meghatározása adja a *konvergencia*, illetve a *határérték* fogalmát. A következőkben két egymással ekvivalens definíciót adunk meg.

2.10. Definíció. *Az $\{a_n\}$ sorozat konvergens, ha létezik olyan A szám, hogy bármely $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $N \in \mathbf{N}$ küszöbszám (vagy küszöbindex) (N függ ε-tól), hogy ha $n \geq N$, akkor a sorozat elemeinek A számtól való eltérése kisebb mint ε, azaz*

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$



2.11. Definíció. *Az $\{a_n\}$ sorozat konvergens, ha létezik olyan A szám, hogy A bármely környezetébe a sorozatnak véges sok elem kivételével minden eleme beletartozik.*



Az A számot az $\{a_n\}$ sorozat *határértékének* vagy *limeszének* nevezzük jelölése pedig

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad \text{illetve} \quad a_n \to A$$

(olvasd: limesz a_n egyenlő A, illetve a_n tart A-hoz, vagy a_n konvergál A-hoz).

2.26. Példa. Vannak olyan sorozatok, amelyeknek nincs határértéke, mint például a

$$a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}, \quad b_n = n, \quad c_n = (-1)^n, \quad d_n = (-1)^n n.$$

2.12. Definíció. *Az olyan sorozatokat, amelyeknek nincs határértékük, divergens sorozatoknak nevezzük.*

A következő tétel a határérték *egyértelműségét* (vagy *unicitását*) mondja ki.

2.5. Tétel. *Konvergens sorozatnak csak egy határértéke van.*

Bizonyítás. A tételt indirekt módon bizonyítjuk, azaz feltesszük, hogy legalább két határértéke van a sorozatnak, például A_1 és A_2 ($A_1 \neq A_2$). Mivel $A_1 \neq A_2$, ezért

$$|A_1 - A_2| = \rho > 0.$$

Tekintsük az A_1 és A_2 $\frac{\rho}{4}$ sugarú környezetét. Ezeknek a környezeteknek - a sugár alkalmas választása miatt - nincs közös része. A határérték 2.11. Definíciója alapján, ha A_1 határértéke a sorozatnak, akkor bármely, így $\frac{\rho}{4}$ sugarú környezetébe is, a sorozatnak végtelen sok eleme esik, és ebből csak véges sok marad ki. Ez azt jelenti, hogy A_2 $\dfrac{\rho}{4}$ sugarú környezetébe csak véges sok eleme eshet a sorozatnak, tehát A_2-nek van olyan környezete, amelyből végtelen sok eleme marad ki a sorozatnak, így A_2 nem lehet a sorozat határértéke. Ezzel ellentmondásba kerültünk a feltételezésünkkel, hogy A_2 is határértéke a sorozatnak. ◇

Az alábbi tételek a konvergens sorozatoknak két fontos tulajdonságát mondják ki.

2.6. Tétel. *Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos is.*

Bizonyítás. Ha $a_n \to A$, akkor $\varepsilon = 1$-hez is van olyan $N_1 \in \mathbf{Z}^+$, hogy $n \geq N_1$-re

$$|a_n - A| < 1, \quad \text{azaz} \quad A - 1 < a_n < A + 1.$$

Ha vesszük az $A+1$ számot és a sorozat nála nagyobb elemeit (ilyen csak véges sok lehet, legfeljebb N_1), és ezek közül kiválasztjuk a legnagyobbikat, akkor ez nyilvánvalóan felső korlátja lesz a sorozatnak. Hasonlóan adhatunk egy alsó korlátot is a sorozathoz. Vagyis, ha

$$K = \max\{A+1, a_1, a_2, \ldots, a_{N_1}\}, \quad k = \min\{A-1, a_1, a_2, \ldots, a_{N_1}\},$$

akkor minden n-re

$$k \leq a_n \leq K$$

teljesül, azaz a sorozat valóban korlátos. ◇

Az állítás nem fordítható meg, azaz a korlátosságból nem következik a konvergencia.

2.27. Példa. *a)* Az $a_n = \dfrac{1}{n}$ sorozat konvergens, tehát korlátos is.

b) A $b_n = n$ sorozat nem korlátos, tehát nem is konvergens.

c) A $c_n = (-1)^n$ sorozat korlátos, de nem konvergens.

Ha egy sorozatból végtelen sok elemet választunk ki abban a sorrendben, ahogy ezek az eredeti sorozatban szerepeltek, a sorozatunk egy *részsorozatát* kapjuk.

2.28. Példa. Tekintsük az $a_n = \dfrac{1}{n}$ sorozatot. Válasszuk ki ennek összes páratlan indexű elemét, ezzel egy új $b_n = \dfrac{1}{2n-1}$ sorozat áll elő: $\dfrac{1}{1}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{5}, \ldots$.

2.7. Tétel. *Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens, és határértéke megegyezik az eredeti sorozat határértékével.*

A sorozatok egy másik, a határértékhez közelálló, de azzal nem azonos jellemzője a *torlódási pont.* Az alábbiakban ezzel ismerkedünk meg.

2.13. Definíció. *Az a számot az $\{a_n\}$ sorozat torlódási pontjának nevezzük, ha a bármely környezete a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza.*

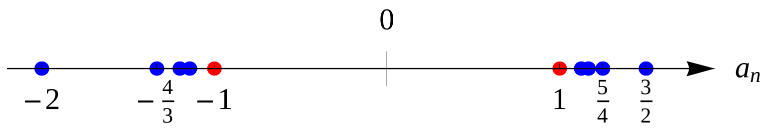
A torlódási pont fogalmát másképpen is lehet definiálni, s a két definíció természetesen egymással ekvivalens.

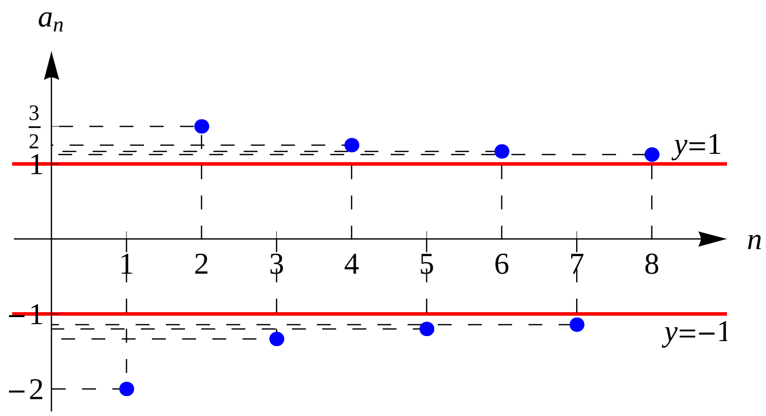
2.14. Definíció. *Az $\{a_n\}$ sorozatnak az a szám torlódási pontja, ha kiválasztható az $\{a_n\}$ sorozatból egy a-hoz konvergáló $\{b_n\}$ részsorozat.*

Nyilvánvaló, hogy a határérték mindig torlódási pont, de ez az állítás fordítva általában nem igaz.

2.29. Példa. Vizsgáljuk meg az $a_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n}$ sorozat elemeit, felrajzolva azokat a számsíkban és a számegyenesen. Ez a sorozat nem konvergens, mert két torlódási pontja van, -1 és 1. Az $\{a_n\}$ sorozat konvergens részsorozatai $b_n = -\dfrac{n+1}{n}$ és $c_n = \dfrac{n+1}{n}$, ahol

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -1 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} c_n = 1.$$





Tudjuk, hogy egy sorozat korlátosságából nem következik a sorozat konvergenciája, igaz viszont a következő tétel.

2.8. Tétel. *(Bolzano-Weierstrass). Korlátos sorozatnak van legalább egy torlódási pontja.*

Megjegyezzük, hogy a Bolzano-Weierstrass tétel egy más megfogalmazása a következő: *Korlátos sorozatból kiválasztható legalább egy konvergens részsorozat.*

2.30. Példa. Az $a_n = (-1)^n$ sorozatból a páros indexű elemeket kiválasztva, 1-hez konvergáló részsorozatot kapunk.

A Bolzano-Weierstrass tétel következménye az alábbi állítás.

2.9. Tétel. *Ha egy korlátos sorozatnak csak egy torlódási pontja van, akkor a sorozat konvergens.*

2.31. Példa. *a)* Az $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ sorozat korlátos és csak egy torlódási pontja van, tehát konvergens.

b) A jól ismert $b_n = (-1)^n$ sorozat ugyan korlátos, de két torlódási pontja van, -1 és 1, ezért nem konvergens.

c) A $c_n = n + (-1)^n n$ sorozatnak csak egy torlódási pontja van, a 0, de nem korlátos, ezért nem konvergens.

Az előzőekben beláttuk, hogy egy konvergens sorozat mindig korlátos, de az állítás megfordítása nem igaz. Ha azonban a korlátos sorozat egyben monoton is, akkor már bizonyosan konvergens.

2.10. Tétel. *Ha egy sorozat korlátos és monoton, akkor konvergens. Ha a sorozat növekvő, akkor a felső határhoz, ha csökkenő, akkor az alsó határhoz konvergál.*

Bizonyítás. Legyen például az $\{a_n\}$ korlátos sorozat növekvő. Ekkor $a_n \leq a_{n+1}$ minden n-re teljesül. A sorozat korlátos, így van felső határa, jelöljük ezt H-val. Ekkor, egyrészt $a_n \leq H$ minden n-re, másrészt tetszőleges pozitív ε számhoz megadható a sorozatnak olyan a_{n^*} eleme, amely $H - \varepsilon$-nál nagyobb, amelyre tehát

$$H - \varepsilon < a_{n^*} < H.$$

Mivel a sorozat növekvő, a fenti egyenlőtlenség a sorozat minden, az a_{n^*}-ot követő elemére igaz. Így a H bármely környezetéből a sorozatnak legfeljebb véges számú eleme marad ki, hiszen

$$H - \varepsilon < a_{n^*} \leq a_n < H$$

teljesül minden n^*-nál nagyobb n-re. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy az $\{a_n\}$ sorozat konvergens, és határértéke H. Csökkenő sorozatra - a sorozat alsó határának létezését kihasználva - a bizonyítás hasonlóan végezhető el. $\diamond$

2.32. Példa. *a)* Az $a_n = \dfrac{n+2}{n+1}$ sorozat monoton csökkenő és korlátos, ezért konvergens.

b) A $b_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$ sorozat monoton növekvő és korlátos, ezért konvergens.

2.5.2. Nullához és végtelenhez tartó sorozatok

A technikai és a gyakorlati alkalmazás szempontjából rendkívül fontosak azok a sorozatok, amelyek "minden határon túl növekednek, illetve csökkennek". Most megadjuk ezen heurisztikus fogalmak pontos definícióját.

2.15. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $\{a_n\}$ sorozat plusz végtelenhez tart, ha minden K valós számhoz létezik olyan $N \in \mathbf{N}$ küszöbszám, hogy $n \geq N$ esetén $a_n > K$. Ezt a tényt a következő módon jelöljük:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \textit{vagy} \quad a_n \to +\infty.$$

2.16. Definíció. *Ha az $\{a_n\}$ sorozat olyan, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}(-a_n) = +\infty$, akkor azt mondjuk, hogy az $\{a_n\}$ sorozat minusz végtelenhez tart, és ezt a tényt a következő módon jelöljük:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \textit{vagy} \quad a_n \to -\infty.$$

Amennyiben az $\{a_n\}$ sorozat valamelyik végtelenhez divergál, szokás azt mondani, hogy *tágabb értelemben konvergens* vagy *valódi divergens* sorozat. Ilyen szóhasználat esetén a $+\infty$ és a $-\infty$ is tekinthető valamely sorozat határértékének, bár egyik sem szám.

2.33. Példa. *a)* A természetes számok $1, 2, 3, ..., n, ...$ sorozata $+\infty$-be divergál.

b) A negatív egész számok $\{-n\}$ sorozata $-\infty$-be divergál, $-n \to -\infty$.

c) A $2, 4, 8, ..., 2^n, ...$ sorozat $+\infty$-be divergál, $2^n \to \infty$.

d) A $-2, -8, -32, ..., -2^{2n-1}, ...$ sorozat $-\infty$-be divergál, $-2^{2n-1} \to -\infty$.

Az $a_n = 2^n$ sorozat a $b_n = n$ sorozatnak, a $c_n = -2^{2n-1}$ sorozat a $d_n = -n$ sorozatnak részsorozata, így a fenti példák azt mutatják, hogy a valódi divergens sorozatok bizonyos tekintetben hasonlóan viselkednek, mint a konvergens sorozatok. Érvényes a következő állítás:

2.11. Tétel. *Ha $\{a_n\}$ valódi divergens sorozat, akkor minden részsorozata is az.*

2.34. Példa. Az $a_n = \dfrac{1}{n}$ sorozat 0-hoz konvergál. A $b_n = n$ sorozat végtelenbe divergál.

Általánosan igaz a következő tétel.

2.12. Tétel. *Ha $a_n \to 0$ $(a_n > 0)$, akkor $\dfrac{1}{a_n} \to \infty$. Ha $a_n \to \infty$, akkor $\dfrac{1}{a_n} \to 0$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $a_n \to 0$, és legyen K tetszőleges adott szám. Azt kell megmutatnunk, hogy elég nagy n-re $\dfrac{1}{a_n} > K$.
Feltehetjük, hogy $K > 0$, mert ha a sorozat tagjai valahonnan kezdve pozitív K-nál nagyobbak, akkor ez negatív K-ra még inkább igaz. Legyen tehát $K > 0$. Ekkor $\dfrac{1}{K}$ is pozitív, és $\dfrac{1}{a_n} > K$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $a_n < \dfrac{1}{K}$ teljesül, ez utóbbi viszont az $a_n \to 0$ feltétel miatt elég nagy n-ekre igaz.
A tétel második részének bizonyításához induljunk ki abból, hogy $a_n \to \infty$, és legyen ε tetszőlegesen megadott pozitív szám. Ekkor

$$\left|\frac{1}{a_n} - 0\right| = \frac{1}{a_n} < \varepsilon$$

teljesül, ha $a_n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, ez pedig az $a_n \to \infty$ feltétel miatt elég nagy n-ekre teljesül, tehát $\dfrac{1}{a_n} \to 0$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ◇

2.13. Tétel. *Ha $a_n \to \infty$ és $c > 0$, akkor $ca_n \to \infty$, míg ha $c < 0$, akkor $ca_n \to -\infty$.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $c > 0$, és K tetszőleges szám. Ekkor $ca_n > K$ minden olyan n-re fennáll, amelyre $a_n > \dfrac{K}{c}$, ez pedig elég nagy n-ekre az $a_n \to \infty$ feltevés miatt igaz. Ezzel bebizonyítottuk, hogy $ca_n \to \infty$.

Legyen most $c < 0$, és k tetszőleges adott szám. Ekkor a $ca_n < k$ minden olyan n-re teljesül, amelyre $a_n > \frac{k}{c}$, ami $a_n \to \infty$ miatt elég nagy n-ekre igaz. Ezzel a tétel bizonyítást nyert. ◇

A végtelenhez tartó sorozatok esetében nem fogalmazhatunk meg a határértékre vonatkozó olyan tételeket, amilyeneket az előzőekben kimondtunk a végeshez konvergáló sorozatok esetében. Így nem mondhatunk semmi biztosat a $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határértékekről. Hasonlóan kritikusak a 1^∞, ∞^0, 0^0 és $\frac{0}{0}$ típusú határértékek is.

2.5.3. Műveletek konvergens sorozatokkal

A következő fejezetben látni fogjuk, hogy még viszonylag egyszerű sorozat konvergenciájának bizonyítása sem triviális. Ezért is van jelentősége a konvergens sorozatok és az alapműveletek kapcsolatának, ugyanis néhány egyszerű sorozat határértékének ismeretében bonyolultabb sorozatok határértéke is meghatározható. Most néhány olyan szabályt mutatunk meg, amelyek a sorozatok határértékének gyors kiszámítását teszik lehetővé.

2.14. Tétel. *Ha az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ sorozatok konvergensek, akkor az $\{a_n + b_n\}$ és az $\{a_n - b_n\}$ sorozatok is konvergensek, mégpedig úgy, hogy*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n, \quad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

2.15. Tétel. *Ha az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ sorozatok konvergensek, akkor az $\{a_n \cdot b_n\}$ sorozat is konvergens, mégpedig úgy, hogy*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

2.16. Tétel. *Ha az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ sorozatok konvergensek, valamint $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, akkor az $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ sorozat is konvergens, mégpedig úgy, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

2.17. Tétel. *Ha az $\{a_n\}$ sorozat konvergens, akkor érvényesek az alábbi egyenlőségek:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(C \cdot a_n) = C \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n, \quad C = \textit{konstans},$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^k = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^k, \quad k \in \mathbf{N}.$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}, \quad k \in \mathbf{N}.$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_a a_n = \log_a \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right), \quad a > 0,\ a \neq 1.$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} e^{a_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}.$

A c) esetben páros k esetén még azt is meg kell követelni, hogy az $\{a_n\}$ sorozat elemei legyenek nemnegatívak, a d) esetben pedig hogy pozitívak legyenek.

2.18. Tétel. *Ha az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ sorozatok konvergensek, és*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n,$$

akkor véges sok n kivételével $a_n \leq b_n$. Ha az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ sorozatok konvergensek és $a_n \leq b_n$ véges sok n kivételével, akkor

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

2.19. Tétel. *(Rendőr-elv.) Ha $a_n \leq b_n \leq c_n$ teljesül véges sok n kivételével, és*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = A,$$

akkor $\{b_n\}$ konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} b_n = A.$$

A fenti tétel Kürschák professzor találó elnevezése nyomán a "*Rendőr-elv*" nevet kapta, amelyet az alábbi érdekes módon tudunk átfogalmazni: Két rendőr két oldalról belekarol egy, az utcán elfogott tolvajba. Ha a két rendőr a rendőrségre megy, akkor világos, hogy a tolvajnak is a rendőrökkel a rendőrségre kell menni.

2.5.4. Néhány nevezetes sorozat határértéke

Az alábbiakban néhány, a feladatmegoldások során gyakran előforduló sorozat konvergenciáját vizsgáljuk. A későbbiekben felhasználjuk a Jacob Bernoulli nevéhez fűződő egyenlőtlenséget, amelyet a következő tételben fogalmazunk meg. A tétel teljes indukcióval bizonyítható.

2.20. Tétel. *(Bernoulli-egyenlőtlenség). Ha $h > -1$ valós szám, akkor minden n természetes számra*

$$(1+h)^n \geq 1 + nh.$$

A következőkben megadjuk néhány nevezetes sorozat határértékét, amelyeket *alaphatárértékeknek* nevezünk.

I. *Ha $a_n = c$, akkor a sorozat konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty} c = c.$$

Bizonyítás. Az $a_n = c$ egy állandó elemű sorozat. Maga az állítás a határérték definíciója alapján nyilvánvaló. $\diamond$

II. *Ha $a_n = \dfrac{1}{n}$, akkor a sorozat konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Bizonyítás. Ennek belátásához a 2.10. Definíció szerint azt kell megmutatni, hogy bármely $\varepsilon > 0$-hoz megadható olyan N (N függ ε-tól!), hogy ha $n \geq N$, akkor $|a_n - 0| < \varepsilon$. Mivel

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > \frac{1}{\varepsilon},$$

ezért az $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ választás megfelel. ◇

III. *Ha q tetszőleges valós szám és $a_n = q^n$, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } |q| < 1, \\ 1, & \text{ha } q = 1, \\ \text{divergens}, & \text{ha } |q| > 1 \text{vagy } q = -1. \end{cases}$$

Bizonyítás. Először a $|q| < 1$ esetet vizsgáljuk. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan N, hogy $n \geq N$ esetén $|q^n - 0| < \varepsilon$. A $|q^n - 0| = |q^n| < \varepsilon$ egyenlőtlenség ekvivalens az

$$\left(\frac{1}{|q|}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon}$$

egyenlőtlenséggel. Alkalmazzuk a Bernoulli egyenlőtlenséget $1 + h = \frac{1}{|q|}$ választás esetén. Ekkor ε-t úgy választjuk, hogy

$$\left(\frac{1}{|q|}\right)^n \geq 1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right) > \frac{1}{\varepsilon}$$

teljesüljön, vagyis $|q^n - 0| < \varepsilon$. A fenti egyenlőtlenségből adódik, hogy

$$n \geq \left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon\left(\frac{1}{|q|} - 1\right)}\right] + 1 = N.$$

Másodszor a $q = 1$ esettel foglalkozunk. Ekkor $q^n = 1$ minden n-re, így $a_n = 1$ állandó elemű sorozatunk van. Ez pedig konvergens és határértéke 1.
Harmadszor a $q = -1$ és a $|q| > 1$ eseteket bizonyítjuk. Ha $q = -1$, akkor $q^{2n} = 1$ és $q^{2n-1} = -1$. Ezek szerint a sorozatnak végtelen sok eleme 1, illetve -1, azaz a sorozatnak két torlódási pontja is van, ezért divergens. Ha $|q| > 1$, akkor alkalmazzuk a Bernoulli egyenlőtlenséget a $1 + h = q^2$ választás mellett. Ekkor $q^{2n} \geq 1 + n(q^2 - 1)$, vagyis az $a_n = q^n$ sorozat páros elemeiből álló részsorozata $1 < |q|$ esetén minden határon túl nő, tehát az $\{a_n\}$ sorozat nem lehet konvergens, így divergens. ◇

IV. *Ha $a > 0$ és $a_n = \sqrt[n]{a}$, akkor a sorozat konvergens, és*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Bizonyítás. Ha $a = 1$, akkor az állítás nyilvánvaló.
Ha $a > 1$, akkor megmutatjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan ε-tól függő N, hogy $n \geq N$ esetén $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$. Az

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon$$

ekvivalens az $a < (1+\varepsilon)^n$ egyenlőtlenséggel. Alkalmazzuk a Bernoulli egyenlőtlenséget $h = \varepsilon$ választás esetén. Ekkor

$$(1+\varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon > n\varepsilon,$$

így ha $a < n\varepsilon$ teljesül, akkor teljesül, hogy $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$. Az $a < n\varepsilon$ egyenlőtlenség pedig minden $n \geq \frac{a}{\varepsilon}$ természetes számra igaz, ezek szerint $N = \left[\frac{a}{\varepsilon}\right] + 1$.
Ha $0 < a < 1$, akkor megmutatjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan ε-tól függő N, hogy $n \geq N$ esetén $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$. Az

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = 1 - \sqrt[n]{a} < \varepsilon$$

ekvivalens az $a > (1-\varepsilon)^n$ egyenlőtlenséggel, ha $0 < a < 1$ és $\varepsilon < 1$. Tehát most $(1-\varepsilon)^n \to 0$, így van olyan N küszöbszám, hogy a kért tulajdonság teljesül. $\diamond$

V. *Ha* $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, *akkor a sorozat konvergens és*

$$\lim_{b\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Bizonyítás. Legyen

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Először megmutatjuk (a Bernoulli egyenlőtlenség akalmazásával), hogy az $\{a_n\}$ sorozat növekvő.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \frac{n+2}{n+1} \geq$$

$$\geq \left(1 + n\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right) \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{(n+1)^3} > 1.$$

Ebből következik, hogy $a_{n+1} > a_n$, azaz az $\{a_n\}$ sorozat növekvő.
Mutassuk még meg, hogy az $\{a_n\}$ sorozat korlátos is. Ehhez vegyük a

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

általános elemű sorozatot. Ugyanazokkal a fogásokkal, amelyekkel az $\{a_n\}$ sorozatról beláttuk, hogy növekvő, a $\{b_n\}$ sorozatról megmutatjuk, hogy csökkenő. Könnyen belátható, hogy

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-n-2} = \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} \geq$$

$$\geq \left(1 + (n+1)\frac{1}{n(n+2)}\right) \frac{n+1}{n+2} = 1 + \frac{1}{n(n+2)^2} > 1.$$

Ebből következik, hogy $b_{n+1} < b_n$, azaz a $\{b_n\}$ sorozat csökkenő.

A b_n és az a_n közötti

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right) = a_n \left(1+\frac{1}{n}\right)$$

összefüggésből következik, hogy $a_n < b_n$ minden n-re. Az $\{a_n\}$ sorozat növekvő, a $\{b_n\}$ pedig csökkenő lévén, minden n-re fennáll az $a_1 \leq a_n < b_1$ egyenlőtlenség, ami azt jelenti, hogy az $\{a_n\}$ sorozat korlátos.
Az $\{a_n\}$ sorozat növekvő és korlátos, tehát konvergens is, határértékét pedig jelöljük e-vel, azaz

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Az e a nevezetes *Euler-féle szám*, amely irracionális és

$$e = 2,718\ 281\ 828\ 459\ 045...$$

Ha egy sorozat konvergens, akkor minden részsorozata is konvergens és ugyanoda konvergál ahová az eredeti sorozat. Ezért a természetes számok sorozatának bármely n_k részsorozatára

$$\lim_{n_k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e.$$

◇

Bizonyítás nélkül megemlítünk még egy fontos alaphatárértéket:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1.$$

FELADATOK.

Igazoljuk a definíció alkalmazásával az alábbi határértékek helyességét. Adott ε esetén számoljuk ki az N küszöbszámot.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, $\varepsilon = 10^{-3}$

Megoldás. Ha ε tetszőlegesen megadott pozitív szám, akkor

$$|a_n - A| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

teljesül, amennyiben $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Találtunk tehát ε-hoz megfelelő küszöbszámot, s ez $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Ha $\varepsilon = 10^{-3}$, akkor a küszöbszám $N = \left[\frac{1}{10^{-3}}\right] + 1 = 1001$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n} = 1$, $\varepsilon = 10^{-5}$

Megoldás. Ha ε tetszőlegesen megadott pozitív szám, akkor

$$|a_n - A| = \left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \left|\frac{n-1-n}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Amennyiben $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, akkor a küszöbszám $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Amennyiben $\varepsilon = 10^{-5}$, akkor a megfelelő küszöbszám $N = \left[\dfrac{1}{10^{-5}}\right] + 1 = 100001$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+3}{n+1} = 2$, $\varepsilon = 10^{-4}$

Megoldás. Amennyiben ε tetszőlegesen megadott pozitív szám, akkor

$$|a_n - A| = \left|\frac{2n+3}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{2n+3-2n-2}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Ha $n+1 > \dfrac{1}{\varepsilon}$, azaz $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$ akkor a küszöbszám $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1$. $\varepsilon = 10^{-4}$ esetén a megfelelő küszöbszám $N = \left[\dfrac{1}{10^{-4}} - 1\right] + 1 = 10000$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-2}{2n-1} = \dfrac{3}{2}$, $\varepsilon = 0.0025$

Megoldás. Tetszőlegesen megadott ε pozitív számra

$$|a_n - A| = \left|\frac{3n-2}{2n-1} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{2(3n-2)-3(2n-1)}{2(2n-1)}\right| =$$

$$= \left|\frac{6n-4-6n+3}{2(2n-1)}\right| = \left|\frac{-1}{2(2n-1)}\right| = \frac{1}{2(2n-1)} < \varepsilon.$$

Ha $4n-2 > \dfrac{1}{\varepsilon}$, azaz $n > \dfrac{1}{4\varepsilon} - \dfrac{1}{2}$, akkor a megfelelő küszöbszám $N = \left[\dfrac{1}{4\varepsilon} - \dfrac{1}{2}\right] + 1$.
Ha $\varepsilon = 0.0025$, akkor a küszöbszám

$$N = \left[\frac{1}{4\cdot 0.0025} - \frac{1}{2}\right] + 1 = [100 - 0.5] + 1 = [99.5] + 1 = 100.$$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n+1}{7-5n} = -\dfrac{4}{5}$, $\varepsilon = 0,0004$

Megoldás. Tetszőlegesen megadott ε pozitív számra

$$|a_n - A| = \left|\frac{4n+1}{7-5n} + \frac{4}{5}\right| = \left|\frac{5(4n+1)+4(7-5n)}{5(7-5n)}\right| =$$

$$= \left|\frac{20n+5+28-20n}{5(7-5n)}\right| = \left|\frac{33}{5(7-5n)}\right| = \frac{33}{5(5n-7)} < \varepsilon.$$

Ha $25n - 35 > \dfrac{33}{\varepsilon}$, azaz $n > \dfrac{33}{25\varepsilon} + \dfrac{7}{5}$, akkor $N = \left[\dfrac{33}{25\varepsilon} + \dfrac{7}{5}\right] + 1$ a megfelelő küszöbszám. $\varepsilon = 0,004$ esetén a küszöbszám

$$N = \left[\frac{33}{25\cdot 0,0004} + \frac{7}{5}\right] + 1 = \left[3300 + \frac{7}{5}\right] + 1 = 3302.$$

A következő feladatokban számítsuk ki az $\{a_n\}$ sorozat határértékét.

A $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú határérték esetében úgy szüntethetjük meg a határozatlanságot, hogy a számlálót és a nevezőt elosztjuk ugyanazzal a végtelenhez tartó kifejezéssel, vagy ami ugyanaz, a számlálóból is és a nevezőből is kiemeljük ugyanazt a végtelenhez tartó kifejezést és ezzel egyszerűsítünk.

6. $a_n = \dfrac{2n-3}{7n+5}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-3}{7n+5} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(2-\frac{3}{n}\right)}{n\left(7+\frac{5}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{3}{n}}{7+\frac{5}{n}} = \frac{2}{7}.$$

7. $a_n = \dfrac{999n+1000}{n^2-n+1}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{999n+1000}{n^2-n+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{999}{n}+\frac{1000}{n^2}}{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

8. $a_n = \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n(2n+1)(3n+2)}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n(2n+1)(3n+2)} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+\frac{1}{n})n(1+\frac{2}{n})n(1+\frac{3}{n})}{n\cdot n(2+\frac{1}{n})n(3+\frac{2}{n})} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})}{(2+\frac{1}{n})(3+\frac{2}{n})} = \frac{1\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 3} = \frac{1}{6}.$$

9. $a_n = \dfrac{n+2}{\sqrt{n^2+3}}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{\sqrt{n^2+3}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+2}{n}}{\sqrt{\frac{n^2+3}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

10. $a_n = \dfrac{2n+3}{n+\sqrt[3]{n^2}}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n+\sqrt[3]{n^2}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{1+\sqrt[3]{\frac{n^2}{n^3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{1+\sqrt[3]{\frac{1}{n}}} = \frac{2}{1} = 2.$$

11. $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{3n^2+7n+1}}{2n+3}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{3n^2+7n+1}}{2n+3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{3n^2+7n+1}{n^3}}}{\frac{2n+3}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}+\frac{1}{n^3}}}{2+\frac{3}{n}} = \frac{0}{2} = 0.$$

12. $a_n = \dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{n+\sqrt{n}}{n}}}{\sqrt{\frac{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}{n}}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{1}{n\sqrt{n}}}}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

13. $a_n = \dfrac{2^n+2\cdot 3^{n+1}}{5\cdot 2^{n+1}+3^n}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n+2\cdot 3^{n+1}}{5\cdot 2^{n+1}+3^n} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n\left(\frac{2^n}{3^n}+2\cdot 3\right)}{3^n\left(5\cdot\frac{2^{n+1}}{3^n}+1\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2+6}{10\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+1} = \frac{0+6}{0+1} = 6.$$

14. $a_n = \dfrac{(n+1)(n^2+1)(n^3+1)\cdots(n^{100}+1)}{((100n)^{100}+1)^{\frac{101}{2}}}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n^2+1)(n^3+1)\cdots(n^{100}+1)}{((100n)^{100}+1)^{\frac{101}{2}}} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\cdot n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\cdots n^{100}\left(1+\frac{1}{n^{100}}\right)}{\left(n^{100}\left(100^{100}+\frac{1}{n^{100}}\right)\right)^{\frac{101}{2}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1+2+3+\cdots+100}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^{100}}\right)}{n^{\frac{100\cdot 101}{2}}\left(100^{100}+\frac{1}{n^{100}}\right)^{\frac{101}{2}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{5050}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^{100}}\right)}{n^{5050}\left(100^{100}+\frac{1}{n^{100}}\right)^{\frac{101}{2}}} = \frac{1}{(100^{100})^{\frac{101}{2}}} = \frac{1}{100^{5050}}.$$

15. $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2+1}-3}{\sqrt[4]{n^2+5n}+\sqrt[3]{2n^2}}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+1}-3}{\sqrt[4]{n^2+5n}+\sqrt[3]{2n^2}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{n^2+1}-3}{\sqrt[3]{n^2}}}{\frac{\sqrt[4]{n^2+5n}+\sqrt[3]{2n^2}}{\sqrt[3]{n^2}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}-\frac{3}{\sqrt[3]{n^2}}}{\sqrt[12]{\frac{(n^2+5n)^3}{n^8}}+\sqrt[3]{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}-\frac{3}{\sqrt[3]{n^2}}}{\sqrt[12]{\frac{1}{n^2}(1+\frac{5}{n})^3}+\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Ha a határérték $\infty-\infty$ típusú határozatlan kifejezés, akkor irracionális kifejezés esetén gyöktelenítéssel, törtek különbsége esetén közös nevezőre hozással tudunk megszabadulni a határozatlanságtól.

16. $a_n = \sqrt{n+2}-\sqrt{n}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right) = \infty-\infty = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

17. $a_n = \sqrt{n^2-2n+3}-n$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right) = \infty-\infty =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2-2n+3}+n}{\sqrt{n^2-2n+3}+n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2n+3-n^2}{\sqrt{n^2-2n+3}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-2n+3}{\sqrt{n^2-2n+3}+n} = \frac{-\infty}{\infty} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1} = \frac{-2}{\sqrt{1}+1} = -1.$$

18. $a_n = \sqrt{4n^4+3n^2}-2n^2$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^4+3n^2}-2n^2\right) = \infty-\infty =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{4n^2+3}-2n\right)\frac{\sqrt{4n^2+3}+2n}{\sqrt{4n^2+3}+2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\,(4n^2+3-4n^2)}{\sqrt{4n^2+3}+2n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n\left(\sqrt{4+\frac{3}{n^2}}+2\right)} = \frac{3}{\sqrt{4}+2} = \frac{3}{4}.$$

19. $a_n = n - \sqrt[3]{n^3+4}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(n - \sqrt[3]{n^3+4}\right) = \infty - \infty =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3} - \sqrt[3]{n^3+4}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{(n^3)^2}+\sqrt[3]{n^3(n^3+4)}+\sqrt[3]{(n^3+4)^2}}{\sqrt[3]{(n^3)^2}+\sqrt[3]{n^3(n^3+4)}+\sqrt[3]{(n^3+4)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^3-(n^3+4)}{\sqrt[3]{n^6}+\sqrt[3]{n^3(n^3+4)}+\sqrt[3]{(n^3+4)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-4}{n^2+\sqrt[3]{n^3(n^3+4)}+\sqrt[3]{(n^3+4)^2}} = \frac{-4}{\infty} = 0.$$

20. $a_n = \dfrac{21\sqrt{2}}{\sqrt{n^2+15n-10}-\sqrt{n^2-6n+5}}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{21\sqrt{2}}{\sqrt{n^2+15n-10}-\sqrt{n^2-6n+5}} = \frac{const}{\infty-\infty} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{21\sqrt{2}}{\sqrt{n^2+15n-10}-\sqrt{n^2-6n+5}}\cdot\frac{\sqrt{n^2+15n-10}+\sqrt{n^2-6n+5}}{\sqrt{n^2+15n-10}+\sqrt{n^2-6n+5}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{21\sqrt{2}\left(\sqrt{n^2+15n-10}+\sqrt{n^2-6n+5}\right)}{n^2+15n-10-(n^2-6n+5)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{21\sqrt{2}\left(\sqrt{n^2+15n-10}+\sqrt{n^2-6n+5}\right)}{21n-15} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{21\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\frac{15}{n}-\frac{10}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{6}{n}+\frac{5}{n^2}}\right)}{21-\frac{15}{n}} = \frac{21\sqrt{2}\cdot 2}{21} = 2\sqrt{2}.$$

21. $a_n = \dfrac{\sqrt{2n^2+2n+3}-\sqrt{2n^2+6n+5}}{\sqrt{3n^2+5n+1}-\sqrt{3n^2+7n-1}}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+2n+3}-\sqrt{2n^2+6n+5}}{\sqrt{3n^2+5n+1}-\sqrt{3n^2+7n-1}} = \frac{\infty-\infty}{\infty-\infty} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+2n+3}-\sqrt{2n^2+6n+5}}{\sqrt{3n^2+5n+1}-\sqrt{3n^2+7n-1}}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sqrt{2n^2+2n+3}+\sqrt{2n^2+6n+5}}{\sqrt{2n^2+2n+3}+\sqrt{2n^2+6n+5}}\cdot\frac{\sqrt{3n^2+5n+1}+\sqrt{3n^2+7n-1}}{\sqrt{3n^2+5n+1}+\sqrt{3n^2+7n-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+2n+3-(2n^2+6n+5)}{3n^2+5n+1-(3n^2+7n-1)}\cdot\frac{\sqrt{3n^2+5n+1}+\sqrt{3n^2+7n-1}}{\sqrt{2n^2+2n+3}+\sqrt{2n^2+6n+5}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-4n-2}{-2n+2}\cdot\frac{\sqrt{3n^2+5n+1}+\sqrt{3n^2+7n-1}}{\sqrt{2n^2+2n+3}+\sqrt{2n^2+6n+5}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-4-\frac{2}{n}}{-2+\frac{2}{n}} \cdot \frac{\sqrt{3+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{3+\frac{7}{n}-\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{2+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{2+\frac{6}{n}+\frac{5}{n^2}}} = \frac{-4}{-2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{6}.$$

22. $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{n-\sqrt[3]{n^3+2}}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n-\sqrt[3]{n^3+2}} = \frac{\infty-\infty}{\infty-\infty} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n-\sqrt[3]{n^3+2}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n} \cdot \frac{\sqrt[3]{(n^3)^2}+\sqrt[3]{n^3(n^3+2)}+\sqrt[3]{(n^3+2)^2}}{\sqrt[3]{(n^3)^2}+\sqrt[3]{n^3(n^3+2)}+\sqrt[3]{(n^3+2)^2}} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1-n^2}{n^3-n^3-2} \cdot \frac{\sqrt[3]{n^6}+\sqrt[3]{n^3(n^3+2)}+\sqrt[3]{(n^3+2)^2}}{\sqrt{n^2+1}+n} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{n^2\left(1+\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^3}}+\sqrt[3]{(1+\frac{2}{n^3})^2}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{n\left(1+\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^3}}+\sqrt[3]{(1+\frac{2}{n^3})^2}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} \right) = -\frac{1}{2} \cdot \infty = -\infty.$$

23. $a_n = \sqrt{n^2+2n+3} - \sqrt[3]{n^3+5n}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n+3} - \sqrt[3]{n^3+5n}\right) = \infty - \infty =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n+3} - n + n - \sqrt[3]{n^3+5n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n+3} - n\right) + \lim_{n\to\infty} \left(n - \sqrt[3]{n^3+5n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n+3} - n\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2+2n+3}+n}{\sqrt{n^2+2n+3}+n} +$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \left(n - \sqrt[3]{n^3+5n}\right) \cdot \frac{n^2+n\sqrt[3]{n^3+5n}+\sqrt[3]{(n^3+5n)^2}}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+5n}+\sqrt[3]{(n^3+5n)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+3-n^2}{\sqrt{n^2+2n+3}+n} + \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-(n^3+5n)}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+5n}+\sqrt[3]{(n^3+5n)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{\sqrt{n^2+2n+3}+n} + \lim_{n\to\infty} \frac{-5n}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+5n}+\sqrt[3]{(n^3+5n)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1} + \lim_{n\to\infty} \frac{-5}{n+\sqrt[3]{n^3+5n}+\sqrt[3]{(1+n^2)^2}} = 1 - 0 = 1.$$

24. $a_n = \dfrac{5n^2+2}{10n-1} - \dfrac{2n^2+1}{4n+3}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+2}{10n-1} - \frac{2n^2+1}{4n+3}\right) = \infty - \infty =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(5n^2+2)(4n+3)-(2n^2+1)(10n-1)}{(10n-1)(4n+3)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{20n^3+15n^2+8n+6-20n^3+2n^2-10n+1}{(10n-1)(4n+3)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{17n^2-2n+7}{(10n-1)(4n+3)} = \frac{17}{40}.$$

25. $a_n = \dfrac{3n^2}{2n+1} + \dfrac{1-6n^3}{1+4n^2}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2}{2n+1} + \frac{1-6n^3}{1+4n^2}\right) = \infty - \infty =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2(1+4n^2)+(1-6n^3)(2n+1)}{(2n+1)(1+4n^2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+12n^4+2n+1-12n^4-6n^3}{(2n+1)(1+4n^2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-6n^3+3n^2+2n+1}{(2n+1)(1+4n^2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{-6+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{(2+\frac{1}{n})(\frac{1}{n^2}+4)} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}.$$

Ha a határérték 1^∞ típusú, akkor a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ alaphatárérték alkalmazásával oldható fel a határozatlanság, vagy erre vezetjük vissza $f(n) = t$ helyettesítéssel, ha $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{f(n)}\right)^{f(n)}$ alakú, de csak abban az esetben, ha $n \to \infty$ esetén $f(n) \to \infty$ is érvényes.

26. $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+2}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2} = 1^\infty = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = e\cdot 1 = e.$$

27. $a_n = \left(\dfrac{n+3}{n}\right)^n$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^n = 1^\infty = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{n\cdot\frac{3}{3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^3 = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^3 == \left[\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right]^3 = e^3,$$

ahol bevezettük az $\dfrac{n}{3} = k$ helyettesítést, amely esetében $k \to \infty$, ha $n \to \infty$.

28. $a_n = \left(\dfrac{3n+1}{3n}\right)^n$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n}\right)^n = 1^\infty = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n\cdot\frac{1}{3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^{\frac{1}{3}} = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^{\frac{1}{3}} = \left[\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right]^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e},$$

ahol bevezettük a $3n = k$ helyettesítést, amely esetében $k \to \infty$, ha $n \to \infty$.

29. $a_n = \left(\dfrac{n+5}{n}\right)^{3n}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n}\right)^{3n} = 1^\infty = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^{3n\cdot\frac{5}{5}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^{\frac{n}{5}}\right]^{15} = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^{\frac{n}{5}}\right]^{15} = \left[\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right]^{15} = e^{15},$$

ahol bevezettük az $\dfrac{n}{5} = k$ helyettesítést, amely esetében $k \to \infty$, ha $n \to \infty$.

30. $a_n = \left(\dfrac{3n+1}{3n-2}\right)^{\frac{n+1}{2}}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^{\frac{n+1}{2}} = 1^\infty = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{3n-2}\right)^{\frac{n+1}{2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3n-2}{3}}\right)^{\frac{n+1}{2}\cdot\frac{3n-2}{3}\cdot\frac{3}{3n-2}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3n-2}{3}}\right)^{\frac{3n-2}{3}}\right]^{\frac{3n+3}{6n-4}} =$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3n-2}{3}}\right)^{\frac{3n-2}{3}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+3}{6n-4}} = \left[\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+3}{6n-4}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e},$$

ahol bevezettük az $\dfrac{3n-2}{3} = k$ helyettesítést, amely esetében $k \to \infty$, ha $n \to \infty$.

31. $a_n = \left(\dfrac{6n+1}{6n-2}\right)^{n^2}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n+1}{6n-2}\right)^{n^2} = 1^\infty = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n-2+3}{6n-2}\right)^{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{6n-2}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{6n-2}{3}}\right)^{\frac{6n-2}{3}\cdot\frac{3}{6n-2}\cdot n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{6n-2}{3}}\right)^{\frac{6n-2}{3}}\right]^{\frac{3n^2}{6n-2}} = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{6n-2}{3}}\right)^{\frac{6n-2}{3}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2}{6n-2}} =$$

$$= \left[\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2}{6n-2}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2}{6n-2}} = e^\infty = \infty,$$

ahol bevezettük a $\dfrac{6n-2}{3} = k$ helyettesítést, amely esetében $k \to \infty$, ha $n \to \infty$.

32. $a_n = \left(\dfrac{2n^2+n+1}{2n^2-n+1}\right)^{3n+1}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n+1}{2n^2-n+1}\right)^{3n+1} = 1^\infty = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n^2+n+1}{2n^2-n+1}-1\right)^{3n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n^2+n+1-2n^2+n-1}{2n^2-n+1}\right)^{3n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n}{2n^2-n+1}\right)^{3n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n^2-n+1}{2n}}\right)^{(3n+1)\cdot\frac{2n^2-n+1}{2n}\cdot\frac{2n}{2n^2-n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2n^2-n+1}{2n}}\right)^{\frac{2n^2-n+1}{2n}}\right]^{\frac{2n(3n+1)}{2n^2-n+1}} =$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n^2-n+1}{2n}}\right)^{\frac{2n^2-n+1}{2n}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n(3n+1)}{2n^2-n+1}} = \left[\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^2+2n}{2n^2-n+1}} = e^3,$$

ahol bevezettük a $\dfrac{2n^2-n+1}{2n} = k$ helyettesítést, amely esetében $k \to \infty$, ha $n \to \infty$.

33. $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = 1^\infty = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{n}{n-1}}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1+1}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)} = \frac{1}{1\cdot e} = \frac{1}{e},$$

ahol bevezettük a $n-1=k$ helyettesítést, amelynél $k\to\infty$, ha $n\to\infty$.

34. $a_n = \left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)^{\frac{4n+2}{3}}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{\frac{4n+2}{3}} = 1^\infty = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{n+3}{n+2}}\right)^{\frac{4n+2}{3}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n+2}}\right)^{\frac{4n+2}{3}} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{\frac{4n+2}{3}\cdot\frac{n+2}{n+2}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\right]^{\frac{4n+2}{3n+6}}} =$$

$$= \frac{1}{\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+2}{3n+6}}} = \frac{1}{\left[\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+2}{3n+6}}} = \frac{1}{e^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e^4}} = \frac{1}{e\sqrt[3]{e}},$$

ahol bevezettük a $n+2=k$ helyettesítést, amelynél $k\to\infty$, ha $n\to\infty$.

35. $a_n = \left(\dfrac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n^2+5}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n^2+5} = 1^\infty = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{n^2+3}{n^2+2}}\right)^{n^2+5} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+2}\right)^{n^2+5}} = \frac{1}{e},$$

mivel

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+2}\right)^{n^2+5} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+2}\right)^{n^2+2+3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2+2}\right)^{n^2+2}\cdot\left(1+\frac{1}{n^2+2}\right)^3\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+2}\right)^{n^2+2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+2}\right)^3 = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\cdot 1 = e,$$

ahol bevezettük a $n^2+2=k$ helyettesítést, amely esetében $k\to\infty$, ha $n\to\infty$.

A következő három feladatban használjuk fel a $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ alaphatárértékeket, ahol a pozitív valós szám, hogy a feloldjuk a határozatlanságot a ∞^0 típusú határozatlan kifejezéseknél.

36. $a_n = \sqrt[n]{5n}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5n} = \left(\infty^0\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{5} \cdot \sqrt[n]{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

37. $a_n = \sqrt[n]{7n^2}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7n^2} = \left(\infty^0\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{7} \cdot \left(\sqrt[n]{n}\right)^2\right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7} \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)^2 = 1.$$

38. $a_n = \sqrt[n]{3n+2}$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n+2} = \left(\infty^0\right).$$

A határértéket a *Rendőr-elv* alapján oldjuk meg. Mivel $n \geq 2$ esetén

$$3n < 3n+2 \leq 3n+n, \quad \text{vagyis} \quad 3n \leq 3n+2 \leq 4n,$$

ezért

$$\sqrt[n]{3n} \leq \sqrt[n]{3n+2} \leq \sqrt[n]{4n},$$

és a megfelelő tétel alapján

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n+2} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4n},$$

vagyis

$$1 \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n+2} \leq 1,$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n+2} = 1.$$

A következő két sorozat határértékét számoljuk ki a monotonitási és korlátossági tulajdonság felhasználásával.

39. $a_n = \dfrac{c^n}{n!}$, $c > 0$

Megoldás. Az $\{a_n\}$ pozitív tagú sorozat szigorúan monoton csökkenő, mert

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{c^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{c^n}{n!}} = \frac{\frac{c\cdot c^n}{(n+1)\cdot n!}}{\frac{c^n}{n!}} = \frac{c}{n+1} < 1,$$

ha $n > c-1$, tehát a $(c-1)$-től nagyobb indexekre érvényes lesz az a feltétel, hogy $a_{n+1} < a_n$. Mivel az $\{a_n\}$ sorozat pozitív tagú, ezért alulról korlátos (például a

0-val) és szigorúan monoton csökkenő, ezért ez a sorozat konvergens, tehát létezik határértéke. Legyen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{és} \quad a_{n+1} = a_n \cdot \frac{c}{n+1},$$

ahonnan

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(a_n \cdot \frac{c}{n+1} \right) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{c}{n+1}.$$

Ebből következik, hogy $a = a \cdot 0$, illetve $a = 0$, amely alapján kimondható, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!} = 0, \quad \text{ha} \quad c > 0.$$

40. $a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}$, ahol n gyök szerepel a kifejezésben

Megoldás. Igazoljuk először, hogy $a_n < 2$ minden n természetes számra. Ennek bizonyítását matematikai indukcióval végezzük.

1^o $n = 1$ esetén $a_1 = \sqrt{2} < 2$.

2^o Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$-ra, azaz $a_k < 2$.

3^o Az állítás $n = k + 1$ esetén is igaz, mert $a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} < \sqrt{2 + 2} = 2$, tehát $\{a_n\}$ korlátos sorozat.

Igazoljuk most szintén matematikai indukcióval, hogy $a_n < a_{n+1}$ minden n természetes számra.

1^o $n = 1$ esetén $a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2 + \sqrt{2}} = a_2$.

2^o Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$-ra, azaz $a_k < a_{k+1}$.

3^o Az állítás $n = k + 1$ esetén is igaz, mert $a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} < \sqrt{2 + a_{k+1}} = a_{k+2}$, tehát $\{a_n\}$ szigorúan monoton növekvő sorozat.

Mivel az $\{a_n\}$ sorozat szigorúan monoton növekvő és felülről korlátos (például a 2-vel), ezért ez a sorozat konvergens, tehát létezik határértéke. Legyen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{valamint} \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

Ebből következik, hogy $a_{n+1}^2 = 2 + a + n$, illetve

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_{n+1} \right)^2 = \lim_{n\to\infty} (2 + a_n)$$

ahonnan $a^2 = 2 + a$. Ebből az egyenletből $a = 2$ vagy $a = -1$ következik, de a pozitivitás miatt $a = 2$ az egyetlen megoldás. Ezért

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}} = 2.$$

2.5.5. Végtelen mértani sor

2.17. Definíció. *Egy mértani sorozat elemeiből képzett végtelen sok tagú "összeget" végtelen mértani sornak nevezzük.*

Tekintsük az $a,\ aq,\ aq^2, \ldots,\ aq^{n-1}, \ldots$ mértani sorozatot, ahol $a \neq 0$ és $q \neq 0$. Tudjuk, hogy a mértani sorozat első n elemének összege

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Ha a mértani sorozat minden elemét össze akarjuk adni, akkor valójában az

$$S = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \ldots$$

összeget keressük, amelynek értékét a mértani sor $\{S_n\}$ részletösszeg sorozatának határértékeként tudunk kiszámolni, vagyis az

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

képlet segítségével, amennyiben ez a határérték létezik. Mivel

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} \lim_{n\to\infty}(1-q^n) = \frac{a}{1-q}\left(1 - \lim_{n\to\infty} q^n\right),$$

így megállapíthatjuk, hogy ez a határérték csak $|q| < 1$ esetén létezik, ugyanis csak akkor konvergens a $\{q^n\}$ sorozat. $q \leq -1$ és $q > 1$ esetében $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ nem létezik, tehát az S összeg sem számítható ki. $q = 1$ esetén $S_n = n \cdot a$ és $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(n \cdot a) = \pm\infty$ (az első elem előjelétől függően). Ezek szerin a végtelen mértani sor összege

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots = \frac{a}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

Ezt a képletet szokás

$$S = \frac{a_1}{1-q}, \quad |q| < 1$$

alakban is írni, kihangsúlyozva, hogy a_1 a mértani sorozat első eleme.

2.35. Példa. Ha az

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

szeretnénk kiszámítani, akkor azt kell észrevennünk, hogy ennek a végtelen összegnek a tagjai

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2}, \ldots,\ \frac{1}{2^n}, \ldots$$

egy mértani sorozat elemei, amelyben $a_1 = 1$ és $q = \dfrac{1}{2}$. Mivel a hányados eleget tesz a $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$ feltételnek, így a végtelen mértani sor összege

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

FELADATOK.

1. Számítsuk ki az $1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \frac{27}{64} + \cdots + (-1)^n \left(\frac{3}{4}\right)^n + \cdots$ végtelen összeget.

Megoldás. Az összeg egy végtelen mértani sor, mert tagjai az

$$1,\ -\frac{3}{4},\ \frac{9}{16},\ -\frac{27}{64},\ \cdots,\ (-1)^n \left(\frac{3}{4}\right)^n,\ \cdots$$

mértani sorozat elemei, amelynek hányadosa $q = -\frac{3}{4}$ eleget tesz az $\left|-\frac{3}{4}\right| < 1$ feltételnek, ezért a keresett összeg

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{7}{4}} = \frac{4}{7}.$$

2. Számítsuk ki az $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots$ végtelen összeget, ha tudjuk, hogy $|x| < 1$.

Megoldás. Ha $|x| < 1$, akkor $|x^2| < 1$ is érvényes. A keresett összeg egy végtelen mértani sor, mert az $1,\ x^2,\ x^4,\ x^6,\ \cdots$ elemekkel rendelkező és $q = x^2$ hányadosú mértani sorozat elemeit adjuk össze. Mivel a hányadosra teljesül a $|q| < 1$ feltétel, ezért a keresett S összeg létezik és

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-x^2}.$$

3. Írjuk fel tört alakjában az $1,\overline{34}$ szakaszos tizedes számot.

Megoldás. Írjuk fel az adott számot több tizedes számjeggyel és bontsuk fel a következő módon:

$$\begin{aligned} 1,\overline{34} &= 1,343434\cdots = 1 + 0,34 + 0,0034 + 0,000034 + \cdots \\ &= 1 + \frac{34}{100} + \frac{34}{10000} + \frac{34}{1000000} + \cdots \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a második tagtól kezdve egy végtelen mértani sor tagjait kell összegeznünk, melyben $a_1 = \frac{34}{100}$ és $q = \frac{1}{100}$, amelyre $\left(\frac{1}{100}\right) < 1$. Ezért

$$1,\overline{34} = 1 + \frac{\frac{34}{100}}{1-\frac{1}{100}} = 1 + \frac{34}{99} = \frac{133}{99}.$$

4. Az $a = 1$ befogójú egyenlőszárú derékszögű háromszög oldalainak felezőpontjait összekötve egy újabb egyenlőszárú derékszögű háromszöget kapunk. Felezzük meg ennek az oldalait is és újra kössük össze a felezőpontokat. Folytassuk ezt az eljárást a végtelenségig, majd számítsuk ki az eredeti és a beírt háromszögek kerületeinek és területeinek összegét.

Megoldás. Ha az egyenlőszárú derékszögű háromszög oldala a, akkor kerülete $K = 2a + a\sqrt{2} = a(2+\sqrt{2})$, területe pedig $T = \frac{a^2}{2}$. Az eredetivel együtt a háromszögek befogói sorban az a, $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{4}$, $\frac{a}{8}$, $\ldots$ mértani sorozatot adják. A háromszögek kerületeinek összege

$$K = a(2+\sqrt{2}) + \frac{a}{2}(2+\sqrt{2}) + \frac{a}{4}(2+\sqrt{2}) + \frac{a}{8}(2+\sqrt{2}) + \cdots,$$

ahonnan

$$K = a(2+\sqrt{2})\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right) = a(2+\sqrt{2}) \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2a(2+\sqrt{2}).$$

Mivel $a = 1$, így az összes háromszög kerületének összege $K = 2(2+\sqrt{2}) = 4+2\sqrt{2}$. A háromszögek területeinek összege

$$T = \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{8}\right)^2 + \cdots,$$

ahonnan

$$T = \frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \right) = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2a^2}{3}.$$

Mivel $a = 1$, így az összes háromszög területének összege $T = \frac{2}{3}$.

5. Az adott R sugarú körbe írjunk egyenlőoldalú háromszöget, majd abba kört, és folytassuk ezt az eljárást a végtelenségig. Számítsuk ki a körök kerületeinek és a háromszögek területeinek összegét.

Megoldás. Az R sugarú körbe írt egyenlőoldalú háromszög oldala $a = R\sqrt{3}$. Ha ebbe a háromszögbe kört írunk, akkor annak sugara $R_1 = \frac{R}{2}$, az újabb beírt egyenlőoldalú háromszög oldala pedig $a_1 = \frac{a}{2}$. Ezért a körök sugarai és az egyenlőoldalú háromszögek oldalai az R, $\frac{R}{2}$, $\frac{R}{4}$, $\frac{R}{8}, \ldots$ és az a, $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{4}$, $\frac{a}{8}$, $\ldots$ mértani sorozatokat alkotják. A körök kerületeinek összege

$$K = 2R\pi + 2 \cdot \frac{R}{2}\pi + 2 \cdot \frac{R}{4}\pi + 2 \cdot \frac{R}{8}\pi + \cdots,$$

amelyből rendezés után

$$K = 2R\pi\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right) = 2R\pi \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 4R\pi,$$

vagyis az öszes így előállított kör kerületének összege $K = 4R\pi$. Az említett módon előállított háromszög területének összege

$$T = a^2\frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{a}{2}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{a}{4}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{a}{8}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4} + \cdots,$$

amely rendezés után a

$$T = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$$

kifejezést adja. Mivel $a = R\sqrt{3}$, így az összes háromszög területének összege

$$T = \frac{3R^2\sqrt{3}}{3} = R^2\sqrt{3}.$$