1. Halmazok, relációk, függvények

1.1. Halmazelméleti alapfogalmak

1.1.1. A halmaz fogalma

A *halmazt* a halmazelmélet alapfogalmának tekintjük és ezért nem definiáljuk. Szokás azt mondani, hogy a halmaz *különböző dolgok összessége.* Ez nem definíció, hanem a halmaz más szavakkal való körülírása. A geometriában ugyancsak definíció nélkül, alapfogalomként használjuk például a pont, az egyenes és a sík fogalmát is.
Valamely halmazt akkor tekintünk adottnak, ha bármely pontosan meghatározott dologról egyértelműen el tudjuk dönteni, hogy hozzátartozik-e a szóban forgó halmazhoz (eleme-e a halmaznak). A halmazt alkotó dolgok a *halmaz elemei.* A halmazokat nagybetűvel, elemeit pedig kisbetűvel jelöljük. Azt a tényt, hogy x az A halmaz eleme, így jelöljük: $x \in A$. Ha valamely y elem nem tartozik az A halmazba, akkor ennek jelölése: $y \notin A$. Egy halmazban egy elem csak egyszer fordulhat elő, de a felsorolás sorrendje tetszőleges lehet.

1.1. Példa. Ha $\mathbf{Q}$-val jelöljük a racionális számok halmazát, akkor: $\frac{2}{3} \in \mathbf{Q}$, $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

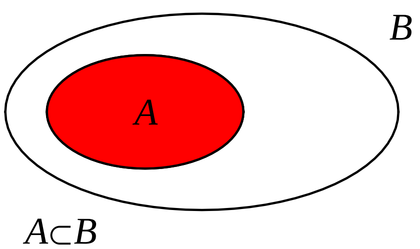
Egy halmazt általában kétféle módon adhatunk meg: vagy felsoroljuk a halmaz elemeit, vagy a halmaz elemeinek pontos körülírását adjuk.

1.2. Példa. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ és $B = \{x \in \mathbf{N} | x < 5\}$ az ötnél kisebb természetes számok halmazát jelöli.

1.3. Példa. A $C = \{x \in \mathbf{R} | 0 < x \leq 4\}$ halmaz a 0 és 4 közé eső valós számok halmazát jelöli. A 0 hozzátartozik a C halmazhoz, a 4 viszont nem.

1.1. Definíció. *Ha az A halmaz minden eleme a B halmaznak is eleme, akkor az A halmazt az B halmaz részhalmazának nevezzük, és ezt a kapcsolatot így jelöljük: $A \subseteq B$ vagy $B \supseteq A$ (olv: A részhalmaza B-nek).*

1.2. Definíció. *Ha az A halmaz minden eleme a B halmaznak is eleme, és a B halmaznak van olyan eleme, amely nem eleme A-nak, akkor az A halmazt az B halmaz valódi részhalmazának nevezzük, és ezt a kapcsolatot így jelöljük: $A \subset B$ vagy $B \supset A$ (olv: A valódi részhalmaza B-nek).*



A természetes számok $\mathbf{N}$ halmazára és az egész számok $\mathbf{Z}$ halmazára igaz, hogy $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$. Minden halmaz részhalmaza önmagának, azaz $A \subseteq A$.

1.3. Definíció. *A valós számok $\mathbf{R}$ halmazának olyan részhalmazait, melyek a és b két valós szám között vannak, intervallumoknak nevezzük. Nevezetesen:*
$(a,b) = \{x \in \mathbf{R} | a < x < b\}$ *nyitott intervallum,*
$[a,b] = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x \leq b\}$ *zárt intervallum,*
$(a,b] = \{x \in \mathbf{R} | a < x \leq b\}$ *balról nyitott jobbról zárt intervallum,*
$[a,b) = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x < b\}$ *balról zárt jobbról nyitott intervallum.*

A 1.3. Példa C halmaza felírható intervallumként is, $C = (0,4]$.

1.4. Definíció. *Az A és B halmazt egyenlőnek nevezzük, azaz $A = B$ akkor és csakis akkor, ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$.*

Ha két halmaz egyenlő, akkor az elemeik megegyeznek. Az 3.37. Példa halmazaira tehát igaz, hogy: $A = B$.

1.5. Definíció. *Üres halmazon az olyan $\emptyset$ vagy $\{\}$ szimbólummal jelölt halmazt értjük, amelynek egy eleme sincs. Eszerint $\emptyset = \{x | x \neq x\}$.*

1.4. Példa. Tekintsük az $A = \{x \in \mathbf{R} | x^2 + 1 = 0\}$ halmazt. Mivel $\mathbf{R}$ a valós számok halmazát jelöli, és $x^2 + 1 = 0$ semmilyen valós számra nem teljesül, így az A halmaznak nincs eleme, azaz A üres halmaz.

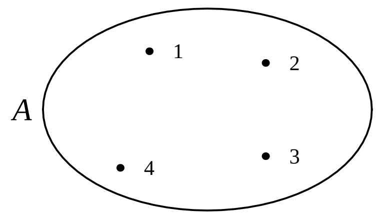
Ha figyelembe vesszük, hogy akárhogyan is adjuk meg az üres halmazt, mindig ugyanarról a halmazról van szó (pontosan arról, amelyiknek nincs eleme), akkor nyilvánvaló, hogy csak egy üres halmaz van. Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza.

Ha valamilyen halmazokról beszélünk, akkor általában ismertnek veszünk egy *alaphalmazt*, amelyből a szemlélt halmazok elemeit vesszük. Például, ha a páros természetes számok halmazát tekintjük, vagy a prímszámok halmazát szemléljük, akkor ezek a természetes számok $\mathbf{N}$ halmazának a részhalmazai. Hasonlóképpen bármilyen nyitott (a,b) vagy zárt $[a,b]$ intervallum a valós számtengelyen a valós számok $\mathbf{R}$ halmazának a részhalmazai. Ezt az alaphalmazt gyakran nem is említjük, de alapértelmezés szerint ismertnek vesszük. Nevezzük ezt az alaphalmazt *univerzális* halmaznak és jelöljük U-val.

1.6. Definíció. *A halmaz elemeinek számát a halmaz kardinális számának nevezzük. Az A halmaz kardinális száma jelölhető $|A|$, $\#A$ vagy $\mathrm{Card}(A)$ módon.*

A halmazok jól szemléltethetők *Venn-diagrammal*, azaz zárt görbével határolt síkidommal, amelyben a halmazhoz tartozó elemek a síkidom belsejében levő pontok.

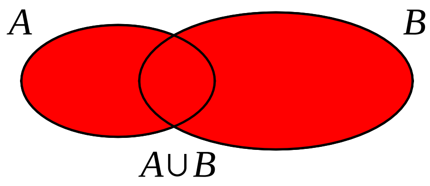
1.5. Példa. Az $A = \{1,2,3,4\}$ halmaz Venn-diagrammal való ábrázolása:



1.1.2. Műveletek halmazokkal

Az alábbiakban olyan műveleteket értelmezünk, amelyek segítségével adott halmazokból meghatározott elemeket tartalmazó újabb halmazokat állíthatunk elő.

1.7. Definíció. *Az A és B halmazok unióján (egyesítésén) azt a halmazt értjük, amelynek elemei az A vagy B halmazok legalább egyikének elemei, tehát $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$.*



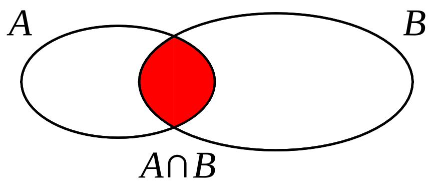
1.6. Példa. Ha $A = \{2, 4, 6, 8\}$ és $B = \{n \in \mathbf{N} | n < 5\}$, akkor $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$.

A definícióból nyílvánvaló, hogy $A \subseteq (A \cup B)$ és $B \subseteq (A \cup B)$.
Az egyesítés művelete kettőnél több halmaz esetén is értelmezhető. Az A_1, A_2, ..., A_n halmazok unióját az

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

szimbólummal jelöljük, és azokból és csakis azokból az elemekből áll, amelyek az uniót alkotó halmazok közül legalább egynek elemei.

1.8. Definíció. *Az A és B halmazok metszetén (közös részén) azt a halmazt értjük, amelynek elemei A-nak is és B-nek is elemei, tehát $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$.*



1.7. Példa. Ha $A = \{2, 4, 6, 8\}$ és $B = \{n \in \mathbf{N} | n < 5\}$, akkor $A \cap B = \{2, 4\}$.

A definícióból nyílvánvaló, hogy $(A \cap B) \subseteq A$ és $(A \cap B) \subseteq B$.

1.9. Definíció. *Ha az A és a B halmazoknak nincs közös eleme, azaz $A \cap B = \emptyset$, akkor azt mondjuk, hogy A és B diszjunkt halmazok.*

A közösrészképzés művelete kettőnél több halmaz esetén is értelmezhető. Az A_1, A_2, ..., A_n halmazok metszetét az

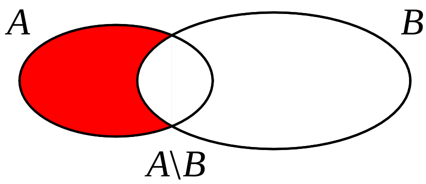
$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

szimbólummal jelöljük, és azokból és csakis azokból az elemekből áll, amelyek a metszetet alkotó halmazok mindegyikének elemei.

1.8. Példa. Az $A = \{x \in \mathbf{R} | -2 \leq x < 1\} = [-2, 1)$ és $B = \{x \in \mathbf{R} || x| \leq 1\} = [-1, 1]$ halmazok (intervallumok) uniója és metszete

$$A \cup B = [-2, 1] \quad \text{és} \quad A \cap B = [-1, 1).$$

1.10. Definíció. *Az A és B halmazok különbségén azt a halmazt értjük, amely azokat és csakis azokat az elemeket tartalmazza, amelyek A-nak elemei, de B-nek nem elemei, tehát $A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$.*



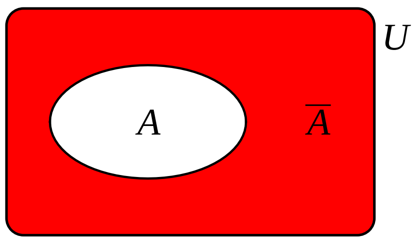
A definícióból azonnal látható, hogy ha A és B diszjunktak, azaz $A \cap B = \emptyset$, akkor $A \setminus B = A$ és $B \setminus A = B$.

1.9. Példa. Ha $A = \{2, 4, 6, 8\}$ és $B = \{n \in \mathbf{N} | n < 5\}$, akkor $A \setminus B = \{6, 8\}$ és $B \setminus A = \{1, 3\}$.

1.10. Példa. Ha $A = \{x \in \mathbf{R} | -2 \leq x < 1\} = [-2, 1)$ és $B = \{x \in \mathbf{R} || x| \leq 1\} = [-1, 1]$ adott halmazok (intervallumok), akkor

$$A \setminus B = [-2, -1) \quad \text{és} \quad B \setminus A = \{1\}.$$

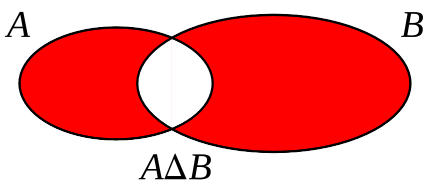
1.11. Definíció. *Legyen A az U univerzális halmaz részhalmaza. Ekkor A-nak az U-ra vonatkozó komplementerén értjük az $U \setminus A$ halmazt, amelyet $\overline{A}$ vagy A' módon jelölünk.*



Könnyen belátható, hogy $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

1.12. Definíció. *Legyen A a B halmaz részhalmaza. Ekkor A-nak a B-re vonatkozó komplementerén értjük a $B \setminus A$ halmazt, amelyet $\overline{A}_B$ módon jelölünk.*

1.13. Definíció. *Az A és B halmazok szimmetrikus különbségén azt az $A \Delta B$ módon jelölt halmazt értjük, amelynek elemei vagy csak az A halmaz vagy csak a B halmaz elemei, vagyis $A \Delta B = \{x | x \in A \veebar x \in B\}$.*



1.11. Példa. Ha $A = \{2, 4, 6, 8\}$ és $B = \{n \in \mathbf{N} | n < 5\}$, akkor $A\Delta B = \{1, 3, 6, 8\}$.

Könnyen belátható, hogy $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

1.1. Tétel. *Az A, B és C tetszőleges halmazokra igazak a következő állítások:*

1. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ *(idempotencia);*
2. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ *(kommutativitás);*
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(asszociativitás);*
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(az unió és a metszet kölcsönös disztributivitása);*
5. $A\Delta B = B\Delta A$ *(kommutativitás),* $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$ *(asszociativitás);*
6. $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \setminus \emptyset = A$, $\emptyset \setminus A = \emptyset$, $A\Delta A = \emptyset$;
7. $\overline{\overline{A}} = A$ *(involúció),* $A \cap \overline{A} = \emptyset$, $A \cup \overline{A} = U$;
8. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ *(De Morgan-féle azonosságok).*

1.14. Definíció. *Az A halmaz összes részhalmazainak halmazát az A halmaz hatványhalmazának vagy partitív halmazának nevezzük. Ennek jelölésére a $P(A)$ szimbólumot használjuk, tehát $P(A) = \{B | B \subseteq A\}$.*

Ha A elemeinek száma n, akkor $P(A)$ elemeinek száma 2^n.

1.12. Példa. Ha $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ és $B = \{1, 2, 3\}$, akkor $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ és $P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

1.15. Definíció. *Az x és y elemekből alkotott rendezett pár (x, y), ahol x a rendezett pár első komponense, y pedig a második komponense. Rendezett párok egyenlősége a megfelelő komponensek egyenlőségét jelenti: $(x, y) = (u, v) \Longleftrightarrow x = u \wedge y = v$.*

A rendezett pár fogalma általánosítható, így beszélhetünk *rendezett n-esek*ről is, amelyek alakja $(x_1, x_2, ..., x_n)$, ahol x_i az i-edik komponens $(i = 1, 2, ..., n)$. Rendezett n-esek között az egyenlőség komponensenkénti egyenlőséget jelent:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ..., y_n) \Longleftrightarrow x_i = y_i \ (i = 1, 2, ..., n).$$

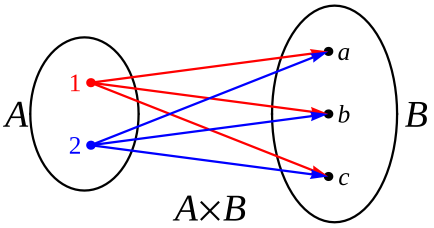
1.16. Definíció. *Az A és B halmazok Descartes-féle szorzatán az (x, y) rendezett párokból alkotott és az $A \times B$ szimbólummal jelölt halmazt értjük, ahol $x \in A$ és $y \in B$, azaz $A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$.*

Ha $A = B$, akkor az $A \times A = A^2$ jelölés használatos. Ha A vagy B üres halmaz, akkor $A \times B = \emptyset$.

A Descartes-féle szorzat általánosítása:

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge ... \wedge x_n \in A_n\}.$$

1.13. Példa. Ha $A = \{1, 2\}$ és $B = \{a, b, c\}$, akkor $A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$,
$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$,
$A \times A \times B = \{(1, 1, a), (1, 1, b), (1, 1, c), (1, 2, a), (1, 2, b), (1, 2, c), (2, 1, a), (2, 1, b), (2, 1, c), (2, 2, a), (2, 2, b), (2, 2, c)\}$.



1.1.3. Relációk, leképezések (függvények)

1.17. Definíció. *Legyen A és B két nem üres halmaz. Az A és B halmazok elemei közötti ρ relációnak nevezzük az $A \times B$ halmaz bármely részhalmazát, azaz $\rho \subseteq A \times B$.*

A relációt alkotó rendezett párok első komponenseinek halmaza a reláció *értelmezési tartománya*, a második komponensek halmaza pedig a reláció *értékkészlete.*

1.18. Definíció. *Legyenek A és B nemüres halmazok. Az A és B halmazok elemei közötti $f \subseteq A \times B$ relációt függvénynek (leképezésnek) nevezzük, ha az A halmaz minden eleméhez a B halmaz egy és csakis egy elemét rendeli hozzá, azaz*

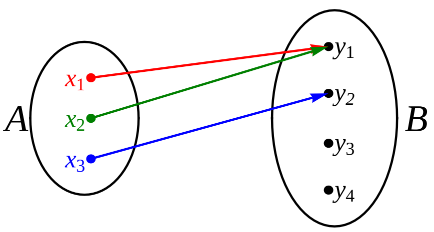
1° $(\forall x \in A)\ (\exists y \in B)\ (x, y) \in f;$

2° $(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Longrightarrow y_1 = y_2.$

Ebben a leképezésben az A halmazt a függvény értelmezési tartományának (domenjének), a B halmazt pedig a függvény képtartományának (kodomenjének) nevezzük. A B halmaz azon elemei, amelyek e hozzárendelésben részt vesznek (azaz a képelemek), a függvény $f(A)$ értékkészletét alkotják.

Az értékkészlet tehát része a képtartománynak.
A függvény értelmezésekor szokás az a szóhasználat is, hogy az f függvény az A halmazt a B halmazba képezi le. Ezért mondjuk a függvényt *leképezésnek* is. Ennek egyik jelölési módja: $f : A \to B$. Az f függvény *értelmezési tartományának* jelölése D_f, az *értékkészletének* jelölése pedig R_f. Az értékkészletet $f(A)$ módon is lehet jelölni.
Ha a függvényt f jelöli és $a \in D_f$, akkor az a-hoz rendelt R_f-beli elemet $f(a) = b$ jelöli, amit az f függvény a helyhez tartozó *helyettesítési értékének* nevezzük, és ezt jelölhetjük még $f : a \mapsto b$ vagy $(a, b) \in f$ módon is.

1.14. Példa. Az $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ halmaz $B = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ halmazba való
$f = \{(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_3, y_2)\}$ leképezése nyildiagrammal ábrázolva:



Az f függvény megadásához meg kell adni a D_f értelmezési tartományt, az R_f képtartományt és azt a hozzárendelési szabályt, amelynek segítségével minden $x \in D_f$ elemhez meghatározható (kiszámítható) a hozzátartozó $y \in R_f$ elem.
Ha az értelmezési tartomány véges halmaz, akkor a függvény megadható a leképezést definiáló rendezett párok halmazával, a rendezett párok táblázatával, vagy egy formulával (képlettel).

1.15. Példa. Legyen az $A = \{1, 2, 3, 4\}$ halmaz az f leképezés értelmezési tartománya, értékkészlete pedig a $B = \{a, b, c, d\}$ halmaz. Mivel mindkét halmaz véges, ezért a leképezést megadhatjuk rendezett párok halmazával vagy táblázattal a következő módokon:

$$f = \{(1, a), (2, c), (3, b), (4, d)\}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & c & b & d \end{pmatrix},$$

x	1	2	3	4
$f(x)$	a	c	b	d

1.16. Példa. Legyen $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ az f függvény értelmezési tartománya, $\mathbf{Z}$ a képtartománya, $f(x) = 3 - 2x$ pedig a leképezés szabálya. Ekkor $f(-1) = 5$, $f(0) = 3$, $f(1) = 1$, $f(2) = -1$, $f(3) = -3$, s így $f(A) = \{5, 3, 1, -1, -3\}$ az adott függvény értékkészlete, vagyis $f(A) \subset \mathbf{Z}$. Ez az f leképezés rendezett párokkal és táblázattal is felírható:

$$f = \{(-1, 5), (0, 3), (1, 1), (2, -1), (3, -3)\},$$

$$f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix},$$

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	5	3	1	-1	-3

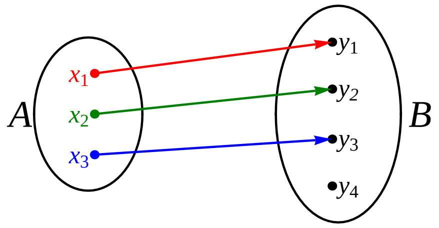
Ha az értelmezési tartomány végtelen halmaz, akkor a függvény a leképezés szabályát kifejező képlettel adható meg.

1.17. Példa. Legyen $f(x) = 2x + 3$ az $\mathbf{R}$ halmaznak az $\mathbf{R}$ halmazba való leképezése. Ekkor az értelmezési tartománynak és az értékkészletnek is végtelen sok eleme van, tehát nem sorolható mind fel. A leképezési szabály segítségével azonban bármely x eredeti elemhez meghatározható az $f(x)$ képelem. Például, $f(0) = 3$, $f(a) = 2a + 3$ és így tovább.

1.19. Definíció. *Az $f_1 : A_1 \to B_1$ és $f_2 : A_2 \to B_2$ függvények egyenlőek, ha megegyezik az értelmezési tartományuk, azaz $A_1 = A_2$ és ha $f_1(x) = f_2(x)$ minden $x \in A_1$ esetén.*

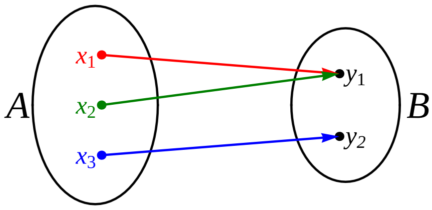
1.20. Definíció. *Az $f : A \to B$ függvény injektív (vagy 1-1 leképezés), ha minden $x_1, x_2 \in A$ esetén igaz, hogy: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.*

1.18. Példa. Az $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ halmaz $B = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ halmazba való $f = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$ injektív leképezés nyíldiagrammal ábrázolva:



1.21. Definíció. *Az $f : A \to B$ függvény szürjektív (vagy halmazra való leképezés), ha minden $y \in B$ elemhez van olyan $x \in A$ elem, hogy $y = f(x)$.*

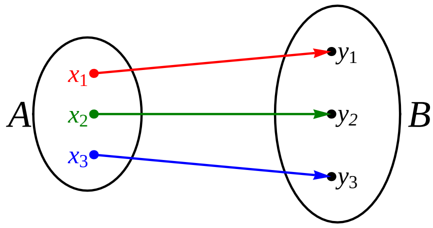
1.19. Példa. Az $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ halmaz $B = \{y_1, y_2\}$ halmazra való $f = \{(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_3, y_2)\}$ szürjektív leképezés nyíldiagrammal ábrázolva:



1.2. Tétel. *Az $f : A \to B$ függvény akkor és csak akkor szürjektív, ha $f(A) = B$, azaz a függvény értékkészlete egyenlő a képtartományával.*

1.22. Definíció. *Az $f : A \to B$ függvényt bijektívnek nevezzük, ha egyidejűleg injektív és szürjektív.*

1.20. Példa. Az $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ halmaz $B = \{y_1, y_2, y_3\}$ halmazra való $f = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$ bijektív leképezés nyíldiagrammal ábrázolva:



1.23. Definíció. *Az $i_A : A \to A$ bijektív függvényt az A halmaz A halmazra való identikus leképezésének nevezzük, ha minden $x \in A$ esetén $i_A(x) = x$.*

Ha egyértelmű, hogy melyik halmaz identikus leképezéséről beszélünk, akkor az identikus leképezés jelölésére az i jelölést használjuk.

1.24. Definíció. *Legyenek A és B adott halmazok. Ha az A halmaz bijektív módon leképezhető a B halmazra, akkor azt mondjuk, hogy az A és B halmazok egyenlő számosságúak vagy számosságilag ekvivalensek.*

1.25. Definíció. *Egy halmazt végtelen számosságúnak vagy egyszerűen végtelennek nevezünk, ha van olyan valódi részhalmaza, amellyel számosságilag ekvivalens. Egy halmazt véges számosságúnak vagy végesnek nevezünk, ha nincs egyetlen olyan valódi részhalmaza sem, amellyel számosságilag ekvivalens.*

1.21. Példa. Tekintsük a természetes számok $\mathbf{N}$ halmazát és a páros természetes számok $\mathbf{P}$ halmazát, ahol $\mathbf{P} \subset \mathbf{N}$. Legyen $f : \mathbf{N} \to \mathbf{P}$ olyan leképezés, hogy $f(n) = 2n$. Mivel f bijekció, az $\mathbf{N}$ halmaz végtelen.

1.26. Definíció. *Egy halmazt megszámlálhatóan végtelennek nevezünk, ha a természetes számok halmazával számosságilag ekvivalens. Ha egy végtelen halmaz számossága nem megszámlálhatóan végtelen, akkor kontinuumszámosságról beszélünk.*

1.22. Példa. A természetes számok $\mathbf{N}$, a páros természetes számok $\mathbf{P}$, az egész számok $\mathbf{Z}$ és a racionális számok $\mathbf{Q}$ halmaza megszámlálhatóan végtelen, viszont a valós számok $\mathbf{R}$ halmaza, az egyenes pontjai, a kör pontjai kontinuumszámosságúak.

1.27. Definíció. *Egy halmazt megszámlálhatónak nevezünk, ha vagy véges, vagy megszámlálhatóan végtelen.*

1.28. Definíció. *Legyenek A, B és C nemüres halmazok, $f : B \to C$ és $g : A \to B$ pedig adott függvények. Az A halmaznak a C halmazba való $f \circ g$-vel jelölt leképezését összetett függvénynek (vagy a függvények kompozíciójának, összetételének) nevezzük és $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ módon értelmezzük minden $x \in A$ elemre.*

1.23. Példa. Ha $f(x) = x + 12$ és $g(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$, akkor
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 12$, $x \in \mathbf{R}$,
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 12) = (x + 12)^2$, $x \in \mathbf{R}$.

A fenti példából belátható, hogy $f \circ g = g \circ f$ általánosan nem érvényes, vagyis a leképezések kompozíciója nem kommutatív művelet.

1.3. Tétel. *Legyenek $h : A \to B$, $g : B \to C$ és $f : C \to D$ tetszőleges leképezések. Ekkor érvényes, hogy $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, azaz a leképezések kompozíciója asszociatív művelet.*

Bizonyítás. Mindkét leképezés, $(f \circ g) \circ h$ és $f \circ (g \circ h)$ is, az A halmazon értelmezett. Továbbá minden $x \in A$ elemre igaz, hogy

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f((g \circ h)(x)) = (f \circ (g \circ h))(x),$$

amivel állításunkat igazoltuk. $\diamond$

Ha $f : A \to B$ függvény bijektív, akkor minden $y \in B$ elemre van olyan $x \in A$ elem, hogy $y = f(x)$. Ez azt jelenti, hogy az f függvényt megadó rendezett párok komponenseit felcserélve ismét függvényt kapunk, ami lehetővé teszi az *inverz függvény* fogalmának bevezetését.

1.29. Definíció. *Legyen $f : A \to B$ bijektív függvény úgy, hogy $f(x) = y$, ha $x \in A$ és $y \in B$. Ekkor az $f^{-1} : B \to A$ leképezést az f függvény inverzének nevezzük, ha $f^{-1}(y) = x$ minden $y \in B$ esetén.*

Az f függvény f^{-1} inverzfüggvénye szintén bijektív. Minden $x \in A$ elemre érvényes, hogy $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ és minden $y \in B$ elemre $(f \circ f^{-1})(y) = y$.

1.24. Példa. Legyen az $A = \{1, 2, 3, 4\}$ halmaz az f leképezés értelmezési tartománya, értékkészlete pedig a $B = \{a, b, c, d\}$ halmaz. Az $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & c & b & d \end{pmatrix}$ bijektív függvény inverze az $f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ függvény. Ezek $f^{-1} \circ f$ összetétele valóban az A halmaz identikus leképezése, mert

$$f^{-1} \circ f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & c & b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.25. Példa. Az $f(x) = 2x + 3$ függvény inverzét változócserével a következőképen határozzuk meg: ha $y = 2x + 3$, akkor a változócsere után $x = 2y + 3$. Ebből $y = \frac{x-3}{2}$, azaz $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$ az inverz függvény. Az f függvényre és f^{-1} inverzére valóban teljesül, hogy

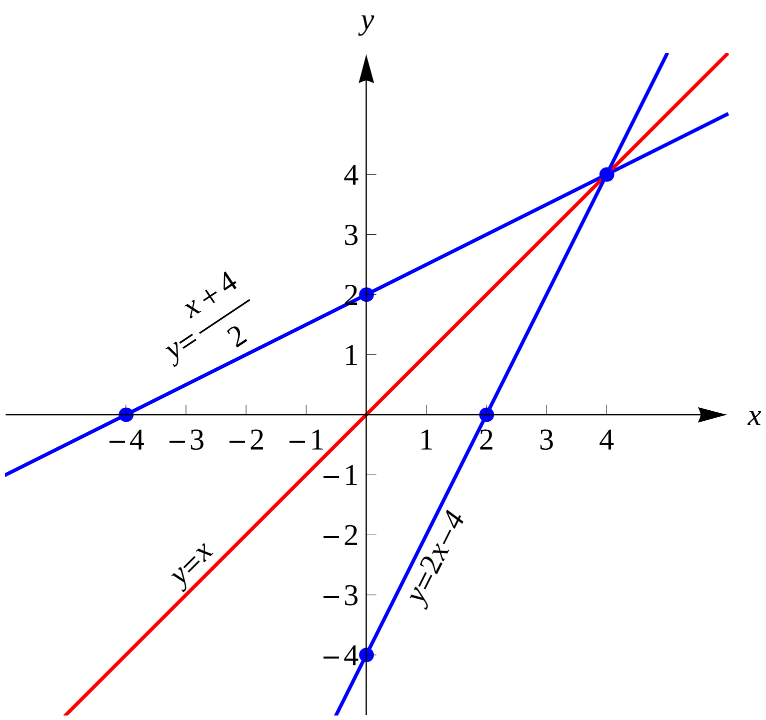
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x+3) = \frac{2x+3-3}{2} = x \ ,$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\frac{x-3}{2}) = 2 \cdot \frac{x-3}{2} + 3 = x \ .$$

Az $f(x) = 2x + 3$ függvény inverzét a definícióból kiindulva is meghatározhatjuk. Mivel a definíció szerint $f^{-1}(f(x)) = x$, ezért $f^{-1}(2x + 3) = x$. Legyen $2x + 3 = t$, ebből pedig $x = \frac{t-3}{2}$. Ezt behelyettesítve az $f^{-1}(2x + 3) = x$ egyenlőségbe adódik, hogy $f^{-1}(t) = \frac{t-3}{2}$, azaz $t = x$ esetén $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$ a keresett függvény.

1.30. Definíció. *A $G_f = \{(x, f(x))|x \in A\}$ halmazt az $f : A \to B$ függvény grafikonjának nevezzük. $y = f(x)$ a grafikon egyenlete, ahol x a független változó, y pedig a függő változó.*

Ha az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ bijektív függvény grafikonja megrajzolható, akkor az f^{-1} grafikonja is megrajzolható, és ez az f függvény grafikonjának az $y = x$ egyenesre vonatkozó tükörképe a Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben. Például az $f(x) = \frac{x+4}{2}$ függvény és $f^{-1}(x) = 2x - 4$ inverzének grafikonja a koordinátarendszerben az alábbi ábrán látható. Megfigyelhető a két grafikon szimmetrikussága az $y = x$ egyeneshez viszonyítva.



1.31. Definíció. *Függvényegyenletnek nevezzük az olyan egyenletet, amelyben egy (vagy több) ismeretlen függvény és az(ok) független változói szerepelnek.*

FELADATOK

1. Legyenek f_1, f_2 és f_3 az $A = \{2, 4, 6, 8\}$ halmaz $B = \{a, b, c\}$ halmazba való leképezései. Vizsgáljuk ki, hogy közülük melyek szürjektívek, azaz halmazra való leképezések, ha

$$f_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ a & b & c & a \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ a & b & a & b \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad f_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ a & a & a & a \end{pmatrix}.$$

Megoldás. A feladat megoldásához azt kell megvizsgálni, hogy az $f(A)$ értékkészlet megegyezik-e a B képtartománnyal.

Mivel

$$f_1(A) = \{f_1(2), f_1(4), f_1(6), f_1(8)\} = \{a, b, c, a\} = \{a, b, c\} = B,$$

ezért f_1 szürjektív.

Mivel

$$f_2(A) = \{f_2(2), f_2(4), f_2(6), f_2(8)\} = \{a, b, a, b\} = \{a, b\} \subset B,$$

ezért f_2 nem szürjektív.

Mivel

$$f_3(A) = \{f_3(2), f_3(4), f_3(6), f_3(8)\} = \{a, a, a, a\} = \{a\} \subset B,$$

ezért f_3 nem szürjektív.

2. Legyenek f_1, f_2 és f_3 az $A = \{1, 3, 5\}$ halmaz $B = \{p, q, r, s\}$ halmazba való leképezései. Vizsgáljuk ki, hogy közülük melyek injektívek, (1-1 leképezések), ha

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ p & q & r \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ s & r & s \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ q & q & q \end{pmatrix}.$$

Megoldás. A feladat megoldásához azt kell megvizsgálni, hogy vajon különböző eredeti elemek képelemei is különbözőek-e.

Mivel $f_1(1) = p$, $f_1(3) = q$, $f_1(5) = r$, így ha $x_1 \neq x_2$, akkor $f_1(x_1) \neq f_1(x_2)$, tehát az f_1 leképezés injektív.

Mivel $f_2(1) = s = f_2(5)$, így $1 \neq 5$, de $f_2(1) = f_2(5)$, tehát az f_2 leképezés nem injektív.

Mivel $f_3(1) = f_3(3) = f_3(5) = q$, így $1 \neq 3 \neq 5$, de $f_3(1) = f_3(3) = f_3(5)$, tehát az f_3 leképezés nem injektív.

3. Legyen f az $A = \{a, b, c, d\}$ halmaz $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazba való leképezése. Oldjuk meg az $f(x) = 1$, $f(x) = 2$, $f(x) = 3$, $f(x) = 4$ és $f(x) = 5$ egyenleteket, ha

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. $f(x) = 1$ esetén $x = a$ vagy $x = b$.
$f(x) = 2$ és $f(x) = 4$ esetén nincs megoldás.
Ha $f(x) = 3$, akkor $x = c$.
Amennyiben $f(x) = 5$, $x = d$ a megoldás.

4. Legyen f az $A = \{a, b, c, d\}$ halmaz önmagába való leképezése. Oldjuk meg az $f(x) = a$, $f(x) = b$, $f(x) = c$, $f(x) = d$, $f(f(x)) = b$, $f(f(f(x))) = d$ és $f(f(f(f(x)))) = a$ egyenleteket, ha $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & b & d & a \end{pmatrix}$.

Megoldás. $f(x) = a$ esetén $x = d$.
Ha $f(x) = b$, akkor $x = a$ vagy $x = b$.
$f(x) = c$ esetén nincs megoldás.
Amennyiben $f(x) = d$, a megoldás $x = c$.
Ha $f(f(x)) = b$, akkor $f(x) = a$ vagy $f(x) = b$, amiből pedig következik, hogy $x = d$ vagy $x = a$ vagy $x = b$.
Ha $f(f(f(x))) = d$, akkor $f(f(x)) = c$, ezért most nincs megoldás.
$f(f(f(f(x)))) = a$ esetén $f(f(f(x))) = d$, ezért szintén nincs megoldás.

5. Legyen f az $A = \{1, 2, 3, 4\}$ halmaz önmagába való leképezése és $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Határozzuk meg az f^3 és f^4 leképezéseket.
b) Számítsuk ki mivel egyenlő $(f \circ (f \circ f))(3)$, $((f \circ f) \circ f))(4)$ és $((f \circ f) \circ (f \circ f))(1)$.
c) Oldjuk meg az $(f \circ (f \circ f))(x) = 4$ és az $((f \circ f) \circ (f \circ f))(x) = 2$ egyenleteket.

Megoldás.
a)

$$\begin{aligned} f^3 &= (f \circ f) \circ f = f \circ (f \circ f) = \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = f, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^4 &= (f \circ f) \circ (f \circ f) = \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right) \circ \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = i. \end{aligned}$$

b) $(f \circ (f \circ f))(3) = f^3(3) = 3,$
$((f \circ f) \circ f))(4) = f^3(4) = 1,$
$((f \circ f) \circ (f \circ f))(1) = f^4(1) = 1.$

c) Az $(f \circ (f \circ f))(x) = 4$, azaz $f^3(x) = 4$ egyenlet megoldása $x = 1$.
Az $((f \circ f) \circ (f \circ f))(x) = 2$, vagyis $f^4(x) = 2$ egyenlet megoldása $x = 2$.

6. Adottak az $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ és $C = \{p, q, r, s\}$ halmazok, valamint az $f : A \to B$, $g : B \to C$ és $h : C \to A$ leképezések. Határozzuk meg a $g \circ f$, $h \circ g$, $f \circ h$ és $h \circ (g \circ f)$ leképezéseket, ha

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b & c & d & a \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ s & r & q & p \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Megoldás.

$$g \circ f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ s & r & q & p \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b & c & d & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ r & q & p & s \end{pmatrix}$$

$$h \circ g = \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ s & r & q & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f \circ h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b & c & d & a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ c & b & a & d \end{pmatrix}$$

$$h \circ (g \circ f) = \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ s & r & q & p \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b & c & d & a \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ r & q & p & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Adottak az $A = \{a, b, c\}$ és $B = \{10, 20, 30\}$ halmazok, valamint az $f : A \to B$ és $g : B \to C$ bijektív leképezések. Határozzuk meg az f^{-1} és g^{-1} inverzfüggvényeket, majd a $g^{-1} \circ f^{-1}$, $f^{-1} \circ g^{-1}$, $f^{-1} \circ f$, $g^{-1} \circ g$ függvénykompozíciókat, ha

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 20 & 30 & 10 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$

Megoldás.

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ c & b & a \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 20 & 30 & 10 \end{pmatrix},$$

$$g^{-1} \circ f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 30 & 20 & 10 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ c & a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 10 & 30 & 20 \end{pmatrix},$$

$$f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ c & a & b \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 30 & 20 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix},$$

$$f^{-1} \circ f = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ c & a & b \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 20 & 30 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} = i_A,$$

$$g^{-1} \circ g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 30 & 20 & 10 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ c & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 10 & 20 & 30 \end{pmatrix} = i_B.$$

8. Adott az $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ halmazon értelmezett $f(x) = 3x - 4$ leképezés. Határozzuk meg az $f(A)$ értékkészletet, írjuk fel az f leképezést és vizsgáljuk ki, hogy az $f : A \to f(A)$ leképezés bijektív-e.

Megoldás. Mivel $f(-2) = 3 \cdot (-2) - 4 = -10$, $f(-1) = 3 \cdot (-1) - 4 = -7$, $f(0) = 3 \cdot 0 - 4 = -4$, $f(1) = 3 \cdot 1 - 4 = -1$ és $f(2) = 3 \cdot 2 - 4 = 2$, ezért $f(A) = \{-10, -7, -4, -1, 2\}$. Maga az f függvény így írható le:

$$f = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -10 & -7 & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mivel az értékkészlet is és a képtartomány is $f(A)$, ezért a függvény szürjektív. Mivel minden eredeti elemhez más-más képelem tartozik, így teljesül, hogy ha $x_1 \neq x_2$, akkor $f(x_1) \neq f(x_2)$, tehát az f leképezés injektív is, amiből az következik, hogy f bijektív.

9. Adott az $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ halmazon értelmezett $f : A \to \mathbf{R}$ függvény az $f(x) = 3 - 3|x|$ leképezési szabállyal. Határozzuk meg az $f(A)$ értékkészletet, írjuk fel az f leképezést és vizsgáljuk ki, hogy az $f : A \to \mathbf{R}$ és $f : A \to f(A)$ leképezések bijektívek-e.

Megoldás. A függvényértékek $f(-2) = 3 - 3|-2| = -3$, $f(-1) = 3 - 3|-1| = 0$, $f(0) = 3 - 3|0| = 3$, $f(1) = 3 - 3|1| = 0$ és $f(2) = 3 - 3|2| = -3$, ezért az értékkészlet $f(A) = \{-3, 0, 3\}$. Az f függvény így írható le:

$$f = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Mivel $f(A) \subset \mathbf{R}$, ezért az $f : A \to \mathbf{R}$ függvény nem szürjektív. Mivel $2 \neq -2$, de $f(-2) = f(2) = -3$, ezért az $f : A \to f(A)$ leképezés nem injektív, amiből az következik, hogy egyik leképezés sem bijektív.

10. Adott az $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ halmazon értelmezett $f : A \to \mathbf{R}$ függvény az $f(x) = x^2 - 4$ leképezési szabállyal. Határozzuk meg az $f(A)$ értékkészletet, írjuk fel az f leképezést és vizsgáljuk ki, hogy az $f : A \to \mathbf{R}$ és $f : A \to f(A)$ leképezések bijektívek-e.

Megoldás. A függvényértékek $f(-2) = (-2)^2 - 4 = 0$, $f(-1) = (-1)^2 - 4 = -3$, $f(0) = (0)^2 - 4 = -4$, $f(1) = 1^2 - 4 = -3$ és $f(2) = 2^2 - 4 = 0$, ezért az értékkészlet $f(A) = \{-4, -3, 0\}$. Az f függvény így írható le:

$$f = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel $f(A) \subset \mathbf{R}$, ezért az $f : A \to \mathbf{R}$ függvény nem szürjektív. Mivel $-1 \neq 1$, de $f(-1) = f(1) = -3$, ezért az $f : A \to f(A)$ leképezés nem injektív, amiből az következik, hogy egyik leképezés sem bijektív.

11. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = 3x - 4$ leképezési szabállyal definiált $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény bijektív, majd határozzuk meg az $f^{-1}(x)$ inverzfüggvényt.

Megoldás. Egy függvény akkor bijektív, ha injektív is és szürjektív is. Vizsgáljuk először az injektivitást! Ha $x_1 \neq x_2$, akkor $3x_1 \neq 3x_2$ és $3x_1 - 4 \neq 3x_2 - 4$, amiből következik, hogy $f(x_1) \neq f(x_2)$, azaz az f függvény injektív. A szürjektív tulajdonság kivizsgálásához tekintsük az értékkészlet egy tetszőleges $y \in \mathbf{R}$ elemét, amelyet úgy kaptunk, hogy az értelmezési tartomány egy elemét az f függvénnyel leképeztünk, azaz $y = 3x - 4$, valamely $x \in \mathbf{R}$ elemre. Ebből $x = \dfrac{y+4}{3}$, tehát az $y \in \mathbf{R}$ képelem az $x = \dfrac{y+4}{3}$ eredeti elemnek a képe. Ez azt jelenti, hogy az értékkészlet minden egyes y képeleméhez hozzárendelhető egy eredeti x elem, tehát az $f(x) = 3x - 4$ leképezés szürjektív is. Mivel ezek szerint a függvény bijektív, ezért van inverze. Az inverz függvény meghatározása a definíció szerint: mivel $f^{-1}(f(x)) = x$, ezért $f^{-1}(3x - 4) = x$. Legyen $3x - 4 = t$, ebből pedig $x = \dfrac{t+4}{3}$. Ezt behelyettesítve adódik, hogy $f^{-1}(t) = \dfrac{t+4}{3}$, azaz $t = x$ esetén a keresett függvény

$$f^{-1}(x) = \frac{x+4}{3}.$$

12. Legyen $f(x) = 3 - |x|$ az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény leképezési szabálya. Bizonyítsuk be, hogy az f függvény se nem injektív, se nem szürjektív, majd határozzuk meg a D_f és R_f halmazokat úgy, hogy az f függvény bijektív legyen. Keressük meg az így kapott függvény $f^{-1}(x)$ inverzét.

Megoldás. Az f függvény nem injektív, mert például az $y = 0$ értéket a függvény $x = -1$-ben is és $x = 1$-ben is felveszi, azaz $-1 \neq 1$, de $f(-1) = f(1)$. Ugyanakkor a függvény nem szürjektív, mert 3-nál nagyobb értékeket az f függvény nem vesz fel. Így például nincs olyan valós x érték, amelyre $f(x) = 4$. Ha az értelmezési tartományt és az értékkészletet leszűkítjük $D_f = [0, +\infty)$ és $R_f = (-\infty, 3]$ tartományokra, akkor az $f : D_f \to R_f$ függvény bijektív. Ekkor az f függvény leképezési szabálya $f(x) = 3 - 3x$, ennek inverze pedig

$$f^{-1}(x) = \frac{3-x}{3}, \quad x \in (-\infty, 3].$$

13. Legyen $f(x) = x^2 - 4$ az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény leképezési szabálya. Bizonyítsuk be, hogy az f függvény se nem injektív, se nem szürjektív, majd határozzuk meg a D_f és R_f halmazokat úgy, hogy az f függvény bijektív legyen. Keressük meg az így kapott függvény $f^{-1}(x)$ inverzét.

Megoldás. Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény nem injektív, mert például az $y = 0$ értéket a függvény $x = -2$-ben is és $x = 2$-ben is felveszi, azaz $-2 \neq 2$, de $f(-2) = f(2)$. Ugyanakkor a függvény nem szürjektív, mert -4-től kisebb értékeket az f függvény nem vesz fel. Így például nincs olyan valós x érték, amelyre $f(x) = -5$. Ha az értelmezési tartományt és az értékkészletet leszűkítjük a $D_f = [0, +\infty)$ és az $R_f = [-4, +\infty)$ tartományokra, akkor az $f : D_f \to R_f$ függvény bijektív. Ekkor az f függvény inverze az

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}, \quad x \in [-4, +\infty).$$

14. Állítsuk össze az $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -x$, $f_3(x) = \dfrac{1}{x}$ és $f_4(x) = -\dfrac{1}{x}$ függvények összetételének (kompozíciójának) táblázatát.

Megoldás. Mivel az $f_1(x) = x = i(x)$, így megállapíthatjuk, hogy

$$f_1 \circ f_k = f_k \circ f_1 = f_k, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

A többi esetben a következő számításokat végezhetjük el:

$$(f_2 \circ f_2)(x) = f_2(f_2(x)) = f_2(-x) = -(-x) = x = f_1(x),$$

$$(f_2 \circ f_3)(x) = f_2(f_3(x)) = f_2\left(\frac{1}{x}\right) = -\left(\frac{1}{x}\right) = f_4(x),$$

$$(f_2 \circ f_4)(x) = f_2(f_4(x)) = f_2\left(-\frac{1}{x}\right) = -\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} = f_3(x),$$

$$(f_3 \circ f_2)(x) = f_3(f_2(x)) = f_3(-x) = \frac{1}{-x} = -\left(\frac{1}{x}\right) = f_4(x),$$

$$(f_3 \circ f_3)(x) = f_3(f_3(x)) = f_3\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x = f_1(x),$$

$$(f_3 \circ f_4)(x) = f_3(f_4(x)) = f_3\left(-\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{-\left(\frac{1}{x}\right)} = -x = f_2(x),$$

$$(f_4 \circ f_2)(x) = f_4(f_2(x)) = f_4(-x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x} = f_3(x),$$

$$(f_4 \circ f_3)(x) = f_4(f_3(x)) = f_4\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{\frac{1}{x}} = -x = f_2(x),$$

$$(f_4 \circ f_4)(x) = f_4(f_4(x)) = f_4\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{-\frac{1}{x}} = x = f_1(x),$$

A keresett táblázat:

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

15. *Legyen az $f_1(x) = \dfrac{1}{1-x}$ és $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$, $n \in \mathbf{N}$. Számítsuk ki az $f_{2009}(2010)$ függvényértéket.

Megoldás.

$$f_2(x) = f_1(f_1(x)) = f_1\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x},$$

$$f_3(x) = f_1(f_2(x)) = f_1\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = x = i(x),$$

$f_4(x) = f_1(f_3(x)) = f_1\,(x),$

$f_5(x) = f_1(f_4(x)) = f_1\,(f_1(x)) = f_2(x),$

$f_6(x) = f_1(f_5(x)) = f_1\,(f_2(x)) = f_3(x) = i(x)$, és így tovább.

Ebből következik, hogy

$$f_{3n}(x) = x, \quad f_{3n+1}(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{és} \quad f_{3n+2}(x) = \frac{x-1}{x}.$$

Mivel $2009 = 3 \cdot 699 + 2$, ezért

$$f_{2009}(x) = f_{3\cdot 699+2}(x) = \frac{x-1}{x} \quad \text{és} \quad f_{2009}(2010) = \frac{2010-1}{2010} = \frac{2009}{2010}.$$

16. **Ha az $f_n(x)$, $n \in \mathbf{N}$ függvények sorozatát az $f_1(x) = \dfrac{x}{x-1}$, $f_2(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $f_{n+2}(x) = f_{n+1}(f_n(x))$, $n \in \mathbf{N}$ szabállyal képezzük, akkor számítsuk ki mennyivel egyenlő $f_{2010}(2010)$.

Megoldás. $f_3(x) = f_2(f_1(x)) = f_2\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = \dfrac{1}{1-\frac{x}{x-1}} = 1-x,$

$$f_4(x) = f_3(f_2(x)) = f_3\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{x}{x-1} = f_1(x),$$

$$f_5(x) = f_4(f_3(x)) = f_4\left(1-x\right) = \frac{1-x}{1-x-1} = \frac{x-1}{x},$$

$$f_6(x) = f_5(f_4(x)) = f_5\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{\frac{x}{x-1}-1}{\frac{x}{x-1}} = \frac{1}{x},$$

$$f_7(x) = f_6(f_5(x)) = f_6\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x}{x-1} = f_1(x),$$

$$f_8(x) = f_7(f_6(x)) = f_7\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-1} = \frac{1}{1-x} = f_2(x),$$

$f_9(x) = f_8(f_7(x)) = f_2\left(f_1(x)\right) = f_3(x)$, és így tovább.

Észrevehető, hogy bár az identikus leképezés nem jelenik meg, mégis kialakult egy hatos ciklus. Az $f_7(x) = f_1(x)$ és $f_8(x) = f_2(x)$, ami a ciklus újra indulását jelenti az $f_6(x)$ függvény után.
Mivel $2010 = 6 \cdot 335$, ezért

$$f_{2010}(x) = f_6(x) = \frac{1}{x} \quad \text{és} \quad f_{2010}(2010) = \frac{1}{2010}.$$

17. **Legyen $f_1(x) = \dfrac{x+\sqrt{2}-1}{(1-\sqrt{2})x+1}$ és $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$, $n \in \mathbf{N}$. Számítsuk ki az $f_{2010}(-1)$ értékét.

Megoldás.

$$f_2(x) = f_1(f_1(x)) = f_1\left(\frac{x+\sqrt{2}-1}{(1-\sqrt{2})x+1}\right) = \frac{1+x}{1-x},$$

$$f_3(x) = f_1(f_2(x)) = f_1\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{x+\sqrt{2}+1}{-(\sqrt{2}+1)x+1},$$

$$f_4(x) = f_1(f_3(x)) = f_1\left(\frac{x+\sqrt{2}+1}{-(\sqrt{2}+1)x+1}\right) = -\frac{1}{x},$$

$$f_5(x) = f_1\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{x-\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)x+1},$$

$$f_6(x) = f_1(f_5(x)) = f_1\left(\frac{x-\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)x+1}\right) = \frac{x-1}{x+1},$$

$$f_7(x) = f_1(f_6(x)) = f_1\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{x-\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)x+1},$$

$$f_8(x) = f_1(f_7(x)) = f_1\left(\frac{x-\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)x+1}\right) = x = i(x),$$

ezért

$$f_9(x) = f_1(f_8(x)) = f_1(i(x)) = f_1(x), \quad f_{10}(x) = f_1(f_9(x)) = f_1(f_1(x)) = f_2(x),$$

és így tovább. Ebből következik, hogy minden $n \in \mathbf{N}$ esetén,

$$f_{8n}(x) = x, \quad f_{8n+1}(x) = \frac{x+\sqrt{2}-1}{(1-\sqrt{2})x+1}, \quad f_{8n+2}(x) = \frac{1+x}{1-x},$$

$$f_{8n+3}(x) = \frac{x+\sqrt{2}+1}{-(\sqrt{2}+1)x+1}, \quad f_{8n+4}(x) = -\frac{1}{x}, \quad f_{8n+5}(x) = \frac{x-\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)x+1},$$

$$f_{8n+6}(x) = \frac{x-1}{x+1}, \quad f_{8n+7}(x) = \frac{x-\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)x+1}.$$

Mivel $2010 = 8 \cdot 251 + 2$, ezért

$$f_{2010}(x) = f_{8\cdot 251+2}(x) = f_2(x) = \frac{1+x}{1-x} \quad \text{és} \quad f_{2010}(-1) = 0.$$

18. Oldjuk meg az $f(2x-1) = 3x-5$ függvényegyenletet.

Megoldás. Vezessük be a $2x-1=t$ helyettesítést. Ebből $x = \frac{t+1}{2}$. Behelyettesítve ezeket a kifejezéseket az $f(2x-1) = 3x-5$ függvényegyenletbe adódik, hogy

$$f(t) = 3 \cdot \frac{t+1}{2} - 5 = \frac{3t-7}{2}.$$

Visszatérve t helyett az x független változóra kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{3x-7}{2}.$$

19. Oldjuk meg az $f(x+2) = \frac{x+1}{x+7}$ függvényegyenletet, ha $x \neq -7$.

Megoldás. Vezessük be a $x+2=t$ helyettesítést. Ebből $x = t-2$. Behelyettesítve ezeket a kifejezéseket az $f(x+2) = \frac{x+1}{x+7}$ függvényegyenletbe adódik, hogy

$$f(t) = \frac{t-2+1}{t-2+7} = \frac{t-1}{t+5},$$

illetve visszatérve az x független változóra,

$$f(x) = \frac{x-1}{x+5}, \quad x \neq -5.$$

20. Oldjuk meg az $f(2x-1) = 4x^2-2x+1$ függvényegyenletet.

Megoldás. Vezessük be a $2x-1=t$ helyettesítést. Ebből $x = \frac{t+1}{2}$. Behelyettesítve ezeket a kifejezéseket az $f(2x-1) = 4x^2-2x+1$ függvényegyenletbe adódik, hogy

$$f(t) = 4\left(\frac{t+1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{t+1}{2} + 1 = t^2+t+1,$$

illetve, hogy

$$f(x) = x^2+x+1.$$

21. Legyen a tetszőleges valós szám. Ha $f(x+a) = x^2 + x + a$, akkor határozzuk meg mennyi $f(x-a)$.

Megoldás. A feladatot két lépésben oldjuk meg. Először meghatározzuk az $f(x)$ szabályt, majd kiszámítjuk az f függvény $x-a$ helyen vett helyettesítési értékét. Az $x+a=t$ helyettesítésből $x=t-a$, ahonnan következik, hogy

$$f(t) = (t-a)^2 + (t-a) + a = t^2 + (1-2a)t + a^2,$$

illetve hogy

$$f(x) = x^2 + (1-2a)x + a^2.$$

Az f függvény értéke $x-a$-ban

$$f(x-a) = (x-a)^2 + (1-2a)(x-a) + a^2 = x^2 + (1-4a)x + 4a^2 - a.$$

22. Oldjuk meg az $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{x-2}{x+2}$ függvényegyenletet, ha $x \neq 1$, $x \neq -2$.

Megoldás. Vezessük be a $\frac{x+1}{x-1} = t$ helyettesítést.
Ebből $x+1 = t(x-1)$, ahonnan rendezés után az $x = \frac{t+1}{t-1}$ kifejezést kapjuk.
Következik, hogy

$$f(t) = \frac{\frac{t+1}{t-1} - 2}{\frac{t+1}{t-1} + 2} = \frac{3-t}{3t-1},$$

vagyis

$$f(x) = \frac{3-x}{3x-1}, \quad x \neq \frac{1}{3}.$$

23. *Oldjuk meg az $f(x) + xf\left(\frac{x}{2x-1}\right) = 2$ függvényegyenletet, ha $x \neq \frac{1}{2}$.

Megoldás. Vezessük be az $\frac{x}{2x-1} = t$ helyettesítést.
Ekkor $x = t(2x-1)$, ahonnan rendezés után $x = \frac{t}{2t-1}$.
Ezeket behelyettesítve a fenti egyenletbe adódik, hogy

$$f\left(\frac{t}{2t-1}\right) + \frac{t}{2t-1} f(t) = 2.$$

A kapott egyenletben nevezzük át a t változót x-re. Az így kapott egyenlet az eredetivel együtt a következő egyenletrendszert adja:

$$\begin{aligned} f(x) &+ xf\left(\frac{x}{2x-1}\right) &= 2 \\ \frac{x}{2x-1} f(x) &+ f\left(\frac{x}{2x-1}\right) &= 2 \end{aligned}$$

A második egyenletet beszorozva $(-x)$-szel, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{array}{rcrcr} f(x) & + & xf\left(\dfrac{x}{2x-1}\right) & = & 2 \\[2ex] -\dfrac{x^2}{2x-1}f(x) & - & xf\left(\dfrac{x}{2x-1}\right) & = & -2x \\ \hline \end{array}$$

A két egyenletet összeadva kapjuk, hogy

$$\left(1-\frac{x^2}{2x-1}\right) f(x) = 2-2x,$$

amiből

$$\frac{-(x^2-2x+1)}{2x-1} f(x) = 2(1-x),$$

rendezés után pedig a keresett függvény alakja

$$f(x) = \frac{2(2x-1)}{x-1}, \quad x \neq 1.$$

24. *Oldjuk meg az adott függvényegyenletet, ha $x \neq -1$, $x \neq 2$:

$$f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = x.$$

Megoldás. Vegyük észre, hogy ha

$$\frac{x+1}{x-2} = t, \quad \text{akkor} \quad \frac{x-2}{x+1} = \frac{1}{t} \quad \text{és} \quad x = \frac{1+2t}{t-1}.$$

Ugyanakkor, ha a helyettesítés

$$\frac{x-2}{x+1} = t, \quad \text{akkor} \quad \frac{x+1}{x-2} = \frac{1}{t} \quad \text{és} \quad x = -\frac{t+2}{t-1}.$$

Mindkét helyettesítést alkalmazva az adott egyenletre, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{array}{rcrcr} f(t) & + & 2f\left(\dfrac{1}{t}\right) & = & \dfrac{1+2t}{t-1} \\[2ex] 2f(t) & + & f\left(\dfrac{1}{t}\right) & = & -\dfrac{t+2}{t-1} \\ \hline \end{array}$$

A második egyenletet beszorozva (-2)-vel, majd a két egyenletet összeadva, rendezés után kapjuk a

$$-3f(t) = \frac{1+2t}{t-1} + \frac{2t+4}{t-1}$$

egyenletet, amiből

$$f(t) = \frac{4t+5}{-3(t-1)},$$

illetve áttérve az x változóra, a megoldás

$$f(x) = \frac{4x+5}{-3(x-1)}, \quad x \neq 1.$$

25. **Oldjuk meg az adott függvényegyenlet-rendszert, majd határozzuk meg az $(f \circ g)(x)$ függvénykompozíciót, ha $x \neq 1$:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{x-1}\right) &+ g(2x+1) &= 2x \\ f\left(\frac{x}{x-1}\right) &- g(2x+1) &= x \end{aligned}$$

Megoldás. Összeadva a két egyenletet, rendezés után adódik, hogy

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{3}{2}x.$$

Ha

$$\frac{x}{x-1} = t, \quad \text{akkor} \quad x = \frac{t}{t-1}$$

és

$$f(t) = \frac{3t}{2t-2}, \quad \text{vagyis} \quad f(x) = \frac{3x}{2(x-1)}.$$

Vonjuk ki az egyenletrendszer első egyenletéből a másodikat. Ekkor rendezés után kapjuk, hogy

$$g(2x+1) = \frac{x}{2}.$$

Ha

$$2x+1 = t, \quad \text{akkor} \quad x = \frac{t-1}{2}$$

és

$$g(t) = \frac{t-1}{4}, \quad \text{vagyis} \quad g(x) = \frac{x-1}{4}.$$

A keresett függvénykompozíció pedig

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x-1}{4}\right) = \frac{3 \cdot \frac{x-1}{4}}{2\left(\frac{x-1}{4} - 1\right)} = \frac{3(x-1)}{2(x-5)}.$$

1.2. Elemi függvények

A következőkben azokkal a függvényekkel ismerkedünk meg, amelyekre később az általánosabb függvények vizsgálatát alapozni fogjuk. Mivel ezek a függvények már az elemi matematikában is szerepelnek, ezért *elemi alapfüggvényeknek* nevezzük őket. Azokat a függvényeket amelyek az elemi alapfüggvényekből a négy alapművelet (összeadás, kivonás, szorzás, osztás) és az összetett függvény képzésének véges számú alkalmazásával nyerhetők, *elemi függvényeknek* nevezzük. Az alábbi fejezetekben bemutatjuk az elemi alapfüggvényeket és foglalkozunk néhány fontosabb elemi függvénnyel.

1.2.1. Lineáris függvény

1.32. Definíció. *Legyenek a és b tetszőleges valós számok. Azt az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ valós függvényt, melyet az*

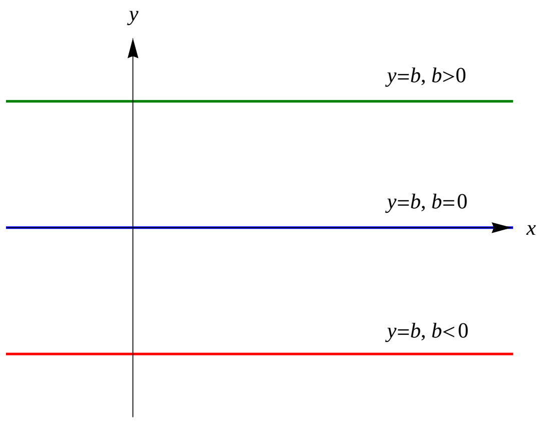
$$f(x) = ax + b$$

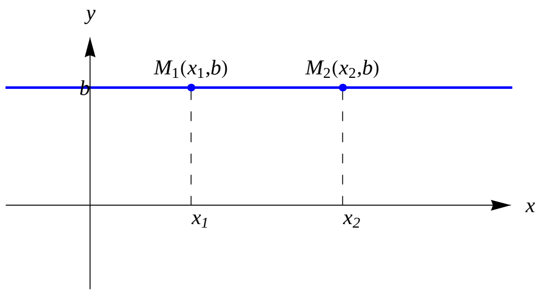
hozzárendeléssel adunk meg, lineáris (vagy elsőfokú) függvénynek nevezzük.

A lineáris függvény minden valós számra értelmezett és minden valós értéket felvesz, azaz értelemzési tartománya $D_f = \mathbf{R}$, és értékkészlete is ugyanez, vagyis $R_f = \mathbf{R}$.
Az f lineáris függvény grafikonja a

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 |\ x \in \mathbf{R} \quad \text{és} \quad y = ax + b\}$$

ponthalmaz, amely a Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben mindig egy egyenes. Ha $a = 0$, akkor a lineáris függvény $f(x) = b$ alakú. Mivel ebben az esetben a képletben nem szerepel az x független változó, ezért ezt a függvényt *konstans függvénynek* nevezzük. A konstans függvény minden egyes pontjának ordinátája (y-koordinátája) b-vel egyenlő, ami azt jelenti, hogy grafikonjának minden egyes pontja b távolságra van az x-tengelytől, ezért az $y = b$ egyenletű függvénygrafikon egy vízszintes helyzetű, azaz az x-tengellyel párhuzamos egyenest határoz meg.

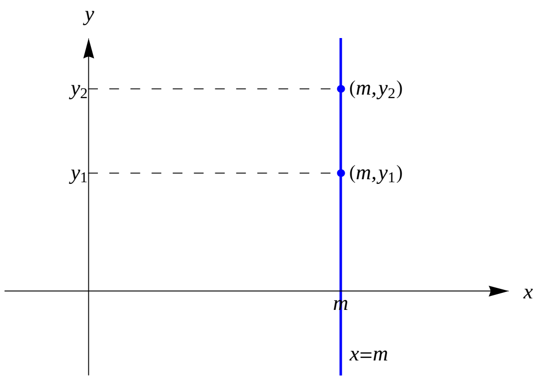




Ha $M_1(x_1, y_1)$ és $M_2(x_2, y_2)$ az $y = b$ egyenes különböző pontjai, ahol x_1 és x_2 olyan valós számok esetén, hogy $x_1 < x_2$, $y_1 = y_2 = b$ lesz érvényes. Az ilyen helyzetű egyenes se nem növekszik, se nem csökken, hiszen bármely valós számra ugyanazt az értéket veszi fel. Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = b$ konstans függvény se nem injektív, se nem szürjektív, tehát nem is bijektív, ezért nincs inverz függvénye.

Legyen most $a \neq 0$. Ekkor az $f(x) = ax + b$ lineáris függvény bijektív és grafikonja egy ferde helyzetű egyenes, amelynek egyenlete $y = ax + b$.

Felvetődik a kérdés, hogy vajon a sík bármely egyenese egy lineáris függvény grafikonja-e? A válasz nem, ugyanis az $x = m$ egyenletű függőleges helyzetű, azaz y-tengellyel párhuzamos egyenesen olyan pontok találhatók, mint az (m, y_1) és (m, y_2). Ez pedig azt jelenti, hogy az $x = m$ hozzárendelési szabály nem tesz eleget a leképezés definíciójának (mivel egy eredetihez nem csak egy értéket rendel hozzá), így nem is függvény.



Az $f(x) = ax+b$, $a \neq 0$ lineáris függvény minden valós számra értelmezett, azaz $D_f = \mathbf{R}$. Az f függvény értéke nullában egyenlő a lineáris függvény állandó tagjával, azaz $f(0) = b$. Az f függvény grafikonján tehát mindig rajta van a $(0, b)$ koordinátájú pont, ami egyben azt is jelenti, hogy az $y = ax + b$ egyenes a b pontban metszi az y-tengelyt.
Azt a pontot, ahol az $y = ax+b$ egyenes metszi az x-tengelyt, az f függvény *nullahelyének* nevezzük. Mivel ebben a pontban $y = 0$, így $x = -\dfrac{b}{a}$. Ezért $N\left(-\dfrac{b}{a}, 0\right)$ az $f(x) = ax+b$ lineáris függvény nullahelye.

Az f függvény *előjele* az a konstans előjelétől függ.

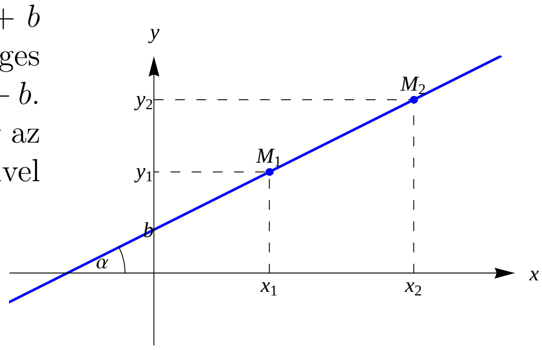
1^o Legyen $a > 0$. Az f függvény pozitív, azaz grafikonja az x-tengely felett helyezkedik el, amennyiben $x > -\dfrac{b}{a}$, és az f függvény negatív, azaz grafikonja az x-tengely alatt helyezkedik el, ha $x < -\dfrac{b}{a}$.

2^o Legyen $a < 0$. Ebben az esetben viszont fordított a helyzet, vagyis az f függvény pozitív, ha $x < -\dfrac{b}{a}$, és az f függvény negatív, amennyiben $x > -\dfrac{b}{a}$.

Az $f(x) = ax + b$ lineáris függvény képletében az $a \neq 0$ állandót az $y = ax + b$ egyenes iránytényezőjének nevezzük. Vizsgáljuk meg az iránytényező geometriai jelentését.

Legyenek $M_1(x_1, y_1)$ és $M_2(x_2, y_2)$ az $y = ax + b$ egyenes különböző pontjai, ahol x_1 és x_2 tetszőleges valós számok, valamint $y_1 = ax_1 + b$ és $y_2 = ax_2 + b$. Ha a második egyenletből kivonjuk az elsőt, akkor az $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$ összefüggést kapjuk, és mivel $x_1 \neq x_2$, ezért

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (= \operatorname{tg} \alpha)\,,$$

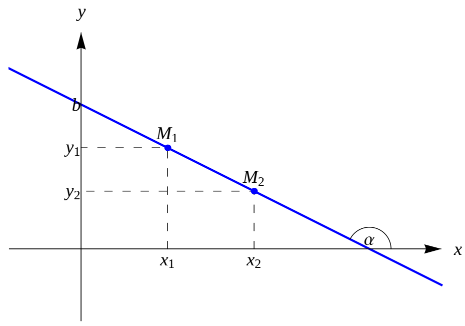


ahol az $y = ax + b$ egyenes α szöget zár be az x-tengely pozitív irányával.

Az f függvény *növekedése*, illetve *csökkenése* szintén az a konstans előjelétől függ.

1^o Tekintsük először az $a > 0$ esetet. Ha most x_1 és x_2 olyan valós számok, hogy $x_1 < x_2$, akkor $y_1 < y_2$ és ebben az esetben azt mondjuk, hogy a függvény *szigorúan monoton* *növekvő* a teljes értelmezési tartományon. Vegyük észre, hogy a függvény grafikonja és az x-tengely pozitív iránya által bezárt α szög hegyes szög.

2^o Az $a < 0$ esetet vizsgálva megállapíthatjuk, hogy ha x_1 és x_2 olyan valós számok, hogy $x_1 < x_2$, akkor $y_1 > y_2$ és ebben az esetben azt mondjuk, hogy a függvény *szigorúan monoton csökkenő* a teljes értelmezési tartományon. A függvény grafikonja most az x-tengely pozitív irányával α tompa szöget zár be.



Ha $b = 0$, akkor az $y = ax$ egyenes áthalad az origón. $a = 1$ esetén az $y = x$ egyenes az első és harmadik negyed szimmetriatengelye, $a = -1$ esetén pedig az $y = -x$ egyenes a második és negyedik negyed szimmetriatengelye.

Tekintsük az $f_1(x) = a_1x + b_1$ és $f_2(x) = a_2x + b_2$ függvények grafikonjait. Mivel az f függvény iránytényezője és grafikonjának az x-tengely pozitív irányával bezárt szöge összefüggésben állnak egymással, ezért érvényes a következő, párhuzamos egyenesekre vonatkozó tétel.

1.4. Tétel. *Két különböző egyenes akkor és csakis akkor párhuzamos, ha iránytényezőik megegyeznek, azaz $a_1 = a_2$, vagy ha mindkettő merőleges az x-tengelyre.*

Merőleges egyenesek esetén a következő állítás érvényes.

1.5. Tétel. *Két különböző egyenes akkor és csakis akkor merőleges egymásra, ha iránytényezőik kielégítik az*

$$a_1a_2 = -1, \quad \left(a_2 = -\frac{1}{a_1}\right)$$

feltételt, vagy ha az egyik egyenes merőleges az x-tengelyre, a másik pedig párhuzamos az x-tengellyel.

A síkbeli egyenes egyenletének *explicit alakja*

$$y = ax + b, \quad a, b \in \mathbf{R}, \quad a \neq 0.$$

A síkbeli egyenes egyenletének *implicit alakja* az

$$Ax + By + C = 0, \quad A, B, C \in R$$

kétismeretlenes egyenlet, amelyből $B \neq 0$ esetén felírható az egyenes egyenletének explicit alakja, ahol

$$a = -\frac{A}{B} \quad \text{és} \quad b = -\frac{C}{B}, \quad \text{azaz} \quad y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

A $B = 0$ esetben az y-tengellyel párhuzamos egyenesek egyenletét kapjuk, azaz ekkor

$$x = -\frac{C}{A}.$$

FELADATOK.

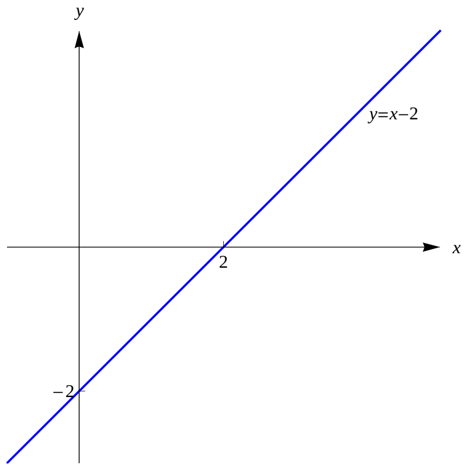
1. Írjuk fel annak a lineáris függvénynek az egyenletét, amely áthalad az $M_1(0,-2)$ és $M_2(4,2)$ pontokon, majd ábrázoljuk a grafikonját és írjuk le a tulajdonságait.

Megoldás. A lineáris függvény általános alakja $f(x) = ax + b$. Ha az M_1 és M_2 pontok rajta vannak az f függvény grafikonján, akkor ezek a pontok kielégítik a megfelelő egyenes egyenletét, vagyis az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} -2 &= a \cdot 0 + b \\ 2 &= a \cdot 4 + b \end{aligned}$$

Az első egyenletből $b = -2$, a másodikból pedig $a = 1$, így a keresett függvény egyenlete

$$f(x) = x - 2.$$



Az $y = x - 2$ függvénygrafikonról leolvashatjuk a következő tulajdonságokat:

1. A függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbf{R}$.
2. A függvény értékkészlete $R_f = \mathbf{R}$.
3. A függvény nullahelye $x = 2$, $x = 0$ esetén pedig -2 az értéke. Ez azt jelenti, hogy a függvény grafikonja az $N(2,0)$ pontban metszi az x-tengelyt, s az $M(0,-2)$ pontban metszi az y-tengelyt.
4. $a = 1 > 0$ miatt a függvény szigorúan monoton növekvő a teljes értelmezési tartományon.
5. $f(x) > 0$, ha $x \in (2,+\infty)$, illetve $f(x) < 0$, ha $x \in (-\infty,2)$.

2. Határozzuk meg azt a lineáris függvényt, amely párhuzamos az $y = 5x-2$ egyenessel és áthalad a $P(-2,3)$ ponton.

Megoldás. Az $y = 5x - 2$ egyenes iránytényezője $a = 5$. A párhuzamosság miatt a keresett $f(x) = ax + b$ lineáris függvény iránytényezője is annyi kell, hogy legyen, azaz $a = 5$. Az $f(x) = 5x + b$ lineáris függvénynek tartalmaznia kell a $P(-2,3)$ pontot, tehát teljesülnie kell a

$$3 = 5 \cdot (-2) + b$$

egyenletnek, ahonnan $b = 13$. A keresett lineáris függvény tehát $f(x) = 5x + 13$.

3. Az $f(x) = (m - 2)x + 3 - 2m$ lineáris függvényben határozzuk meg az m valós paraméter értékét úgy, hogy

a) a függvény grafikonja az y-tengelyt az 5-ben messe,

b) a függvény nullahelye $x = -3$-ban legyen.

Megoldás. *a)* Az $y = ax + b$ egyenes b-ben metszi az y-tengelyt, ezért most $b = 5$ kell legyen. Az adott függvényből ennek alapján $3 - 2m = 5$, ahonnan $2m = -2$, azaz $m = -1$. Mivel $m - 2 = -1 - 2 = -3$, ezért a keresett függvény képlete

$$f(x) = -3x + 5.$$

b) Ha $x = -3$ a nullahely, akkor az $N(-3, 0)$ pont rajta van a keresett függvény grafikonján. Ekkor

$$0 = (m - 2) \cdot (-3) + 3 - 2m, \quad \text{illetve} \quad 0 = -3m + 6 + 3 - 2m.$$

Innen $5m = 9$ és $m = \frac{9}{5}$. A keresett függvény grafikonjának explicit alakja tehát

$$y = -\frac{1}{5}x - \frac{3}{5},$$

implicit alakja pedig $x + 5y + 3 = 0$.

4. A $kx + (1 - k)y + 3 = 0$ egyenes egyenletében határozzuk meg a k valós paraméter értékét úgy, hogy az egyenes párhuzamos legyen a $4x - 2y + 2 = 0$ egyenessel.

Megoldás. Mivel az egyenes iránytényezője az egyenes egyenletének explicit alakjából olvasható ki, ezért alakítsuk át az implicit alakot explicit alakra. Ekkor adódik, hogy $2y = 4x+2$, illetve $y = 2x+1$, így a keresett iránytényező $a = 2$. A paraméteres egyenletet pedig átalakíthatjuk a következő módon:

$$(k - 1)y = kx + 3, \quad \text{illetve} \quad y = \frac{k}{k-1}x + \frac{3}{k-1}.$$

Így az iránytényezőket kiegyenlítve az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{k}{k-1} = 2, \quad \text{ahonnan} \quad k = 2k - 2, \quad \text{vagyis} \quad k = 2.$$

A keresett egyenes egyenletet tehát implicit alakban $2x - y + 3 = 0$, illetve explicit alakban $y = 2x + 3$.

5. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az $M(5, -2)$ ponton és merőleges a $3x + y - 4 = 0$ egyenesre.

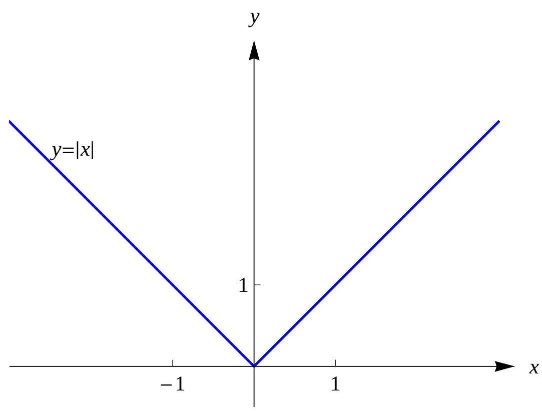
Megoldás. Ha $3x + y - 4 = 0$, akkor ebből $y = -3x + 4$, így az adott egyenes iránytényezője $a_1 = -3$. Ha a keresett egyenes egyenletét $y = a_2x + b_2$ alakban írjuk fel, akkor $a_2 = -\frac{1}{a_1} = \frac{1}{3}$, vagyis $y = \frac{1}{3}x + b_2$. Ennek az egyenesnek át kell haladnia az $M(5, -2)$ ponton, ezért $-2 = \frac{1}{3} \cdot 5 + b_2$, ahonnan $b_2 = -\frac{11}{3}$. A keresett egyenes egyenletének explicit alakja tehát $y = \frac{1}{3}x - \frac{11}{3}$, implicit alakja pedig $x - 3y - 11 = 0$.

1.2.2. Szakaszonként egyenesvonalú függvény

E függvények egyszerűségük ellenére nem elemi függvények.

Az abszolút érték függvény. Az $|a|$, $a \in \mathbf{R}$ abszolút érték értelmezése alapján az $f(x) = |x|$ *abszolút érték függvényt* így definiáljuk:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0, \\ -x, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

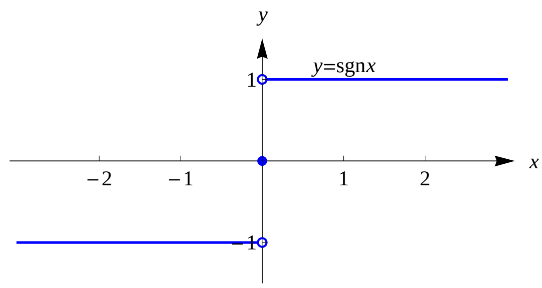


Az f abszolút érték függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbf{R}$, értékkészlete $R_f = [0, \infty)$. Az f függvény grafikonja $y = x$, ha $x \geq 0$ és $y = -x$, ha $x < 0$.

1.26. Példa. $|3| = 3$, $|0| = 0$, $|-3| = 3$.

Az előjel (vagy szignum) függvény. Az x előjelét megadó $f(x) = \operatorname{sgn} x$ *előjel* (vagy *szignum*) *függvényt* a következőképpen definiáljuk:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ -1, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$



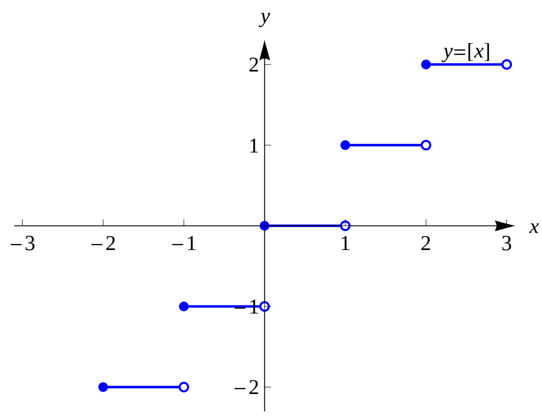
Az f előjel függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbf{R}$, értékkészlete $R_f = \{-1, 0, 1\}$. Az f függvény grafikonja $y = 1$, ha $x > 0$, $y = 0$, ha $x = 0$ és $y = -1$, ha $x < 0$.

1.27. Példa. $\operatorname{sgn} 3 = 1$, $\operatorname{sgn}(-3) = -1$, $\operatorname{sgn} 0 = 0$.

Az egészrész (vagy entier) függvény. Az $x \in \mathbf{R}$ egész részét megadó $f(x) = [x]$ *egészrész* (vagy *entier*) *függvény* definíciója a következő:

$$[x] = max\{n \in \mathbf{Z} |\, n \leq x\},$$

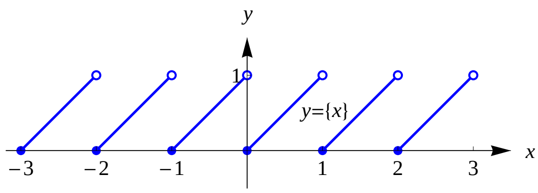
vagyis $[x]$ jelenti az x-nél kisebb vagy vele egyenlő legnagyobb egész számot. Az f egészrész függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbf{R}$, értékkészlete pedig $R_f = \mathbf{Z}$. Az f függvény grafikonja két egész szám között olyan egyenesszakaszokból áll, amelyek párhuzamosak az x-tengellyel, s végpontjaik közül csak a baloldaliak tartoznak a grafikonhoz.



1.28. Példa. $[3.2] = 3$, $[3.001] = 3$, $[-2.4] = -3$, $[3] = 3$.

A törtrész (vagy frac) függvény. Az $x \in \mathbf{R}$ tört részét megadó $f(x) = \{x\}$ *törtrész* (vagy *frac*) *függvény* definíciója a következő:

$$\{x\} = x - [x] = [x] - max\{n \in \mathbf{Z} | \, n \leq x\}.$$



Az f törtrész függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbf{R}$, értékkészlete pedig $R_f = [0, 1)$. Az f függvény grafikonja két egész szám között az x-tengellyel 45^o-os szöget bezáró egyenesszakaszokból áll, a végpontjaik közül csak az x-tengelyen levők tartoznak a grafikonhoz.

1.29. Példa. $\{3.2\} = 0.2$, $\{-3\} = 0$, $\{-2.4\} = 0.6$, $\{2\} = 0$.

FELADATOK.

1. Írjuk fel abszolút érték nélkül, majd rajzoljuk meg az $f(x) = |2x - 4| - 3$ függvény grafikonját, majd a segítségével rajzoljuk meg az $y = ||2x - 4| - 3|$ grafikont is.

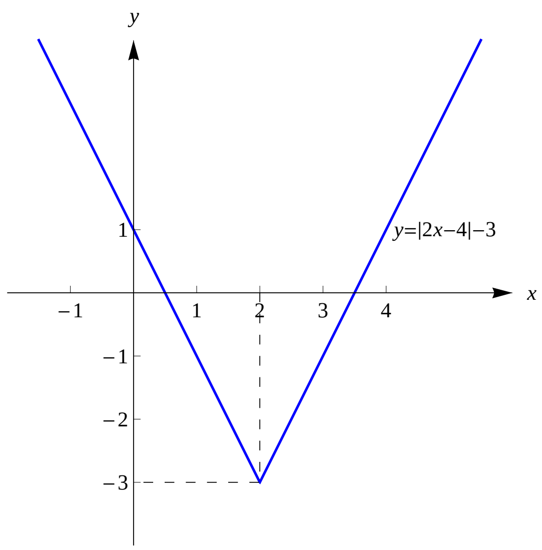
Megoldás. Az abszolút érték definíciója alapján következik, hogy

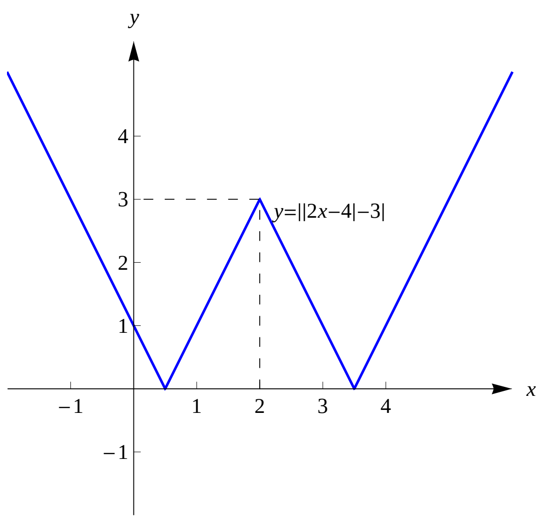
$$|2x - 4| = \begin{cases} 2x - 4, & \text{ha } 2x - 4 \geq 0, \\ -(2x - 4), & \text{ha } 2x - 4 < 0. \end{cases} = \begin{cases} 2x - 4, & \text{ha } x \geq 2, \\ -2x + 4, & \text{ha } x < 2. \end{cases}$$

Behelyettesítve a megfelelő egyenletbe és rendezve a kifejezést, valamint megoldva a megfelelő egyenlőtlenségeket adódik, hogy

$$y = |2x - 4| - 3 = \begin{cases} 2x - 7, & \text{ha } x \geq 2, \\ -2x + 1, & \text{ha } x < 2. \end{cases}$$

Ennek grafikonja és az $y = ||2x - 4| - 3|$ függvénygrafikon a következő két ábrán látható. Az abszolút érték a második grafikon esetében azt jelenti, hogy ha a grafikon íve az x-tengely felett van, akkor ott is marad, ha pedig a grafikon íve az x-tengely alatt van, akkor azt a pozitív félsíkra tükrözzük az x-tengelyhez való tengelyes szimmetriával.





2. Rajzoljuk meg az $f(x) = -|x+1| + 2x - 1$ függvény grafikonját és határozzuk meg a nullahelyét.

Megoldás. Mivel

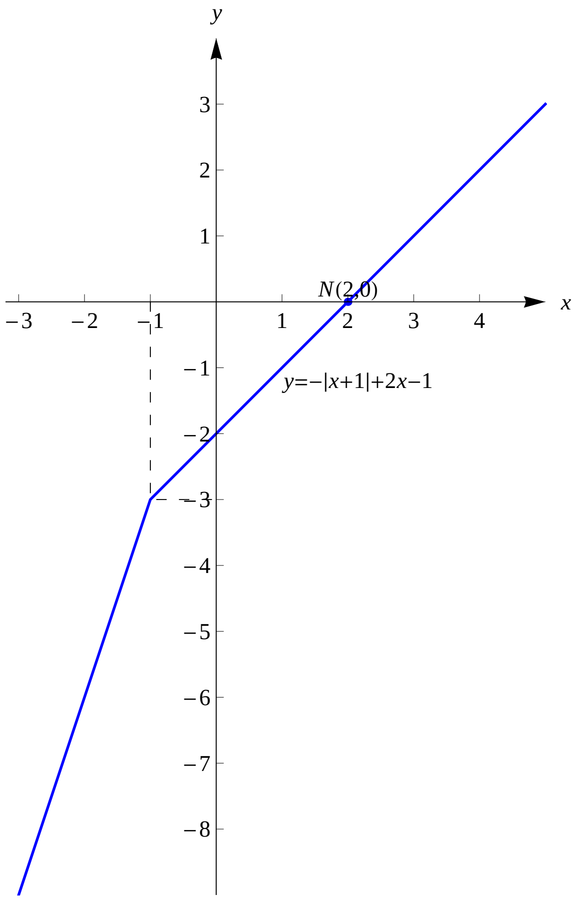
$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{ha } x+1 \geq 0, \\ -(x+1), & \text{ha } x+1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x+1, & \text{ha } x \geq -1, \\ -x-1, & \text{ha } x < -1 \end{cases}$$

ezért rendezés után felírható, hogy

$$f(x) = \begin{cases} x-2, & \text{ha } x \geq -1, \\ 3x, & \text{ha } x < -1. \end{cases}$$

A függvény nullahelyét az $f(x) = 0$ egyenlet megoldása adja. $x - 2 = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x = 2$ és mivel a 2 hozzátartozik a $[-1, \infty)$ intervallumhoz, ez valóban nullahelye a függvénynek. $3x = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x = 0$, és mivel a 0 nem tartozik hozzá a $(-\infty, -1)$ intervallumhoz, ezért nem nullahelye a függvénynek. A függvénynek tehát csak egy nullahelye van, az $N(2, 0)$ pont.

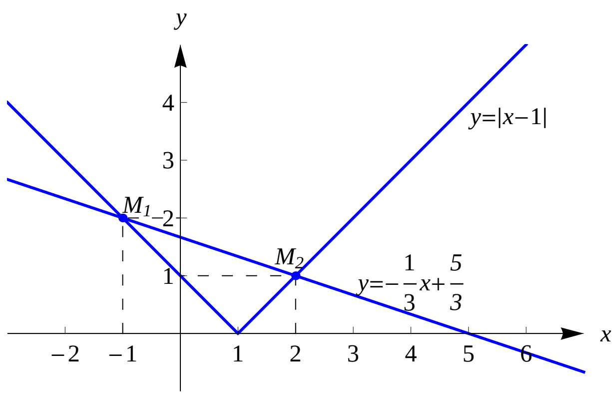


3. Oldjuk meg az $|x-1| = \dfrac{1}{3}(5-x)$ egyenletet.

Megoldás. Oldjuk meg grafikusan a feladatot oly módon, hogy megrajzoljuk az

$$y = |x-1| \quad \text{és} \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

függvénygrafikonokat ugyanabban a koordinátarendszerben és megkeressük a metszéspontjaikat.



Mivel

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{ha } x-1 \geq 0, \\ -(x-1), & \text{ha } x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1, & \text{ha } x \geq 1, \\ -x+1, & \text{ha } x < 1 \end{cases}$$

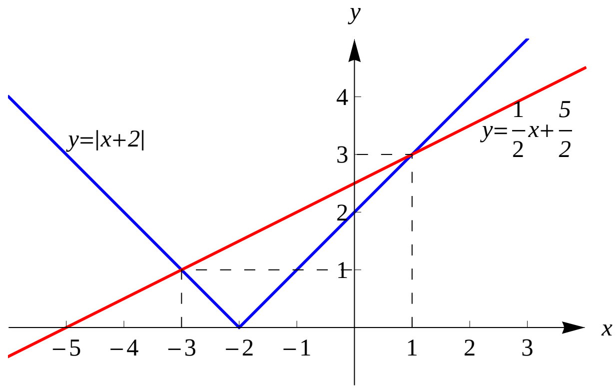
ezért az egyik megoldást az $y = 1-x$ és az $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{3}$ egyenesek metszéspontjából, a másik megoldást pedig az $y = x-1$ és az $y = -\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$ egyenesek metszéspontjából olvashatjuk le. Mivel ezek a metszéspontok az $M_1(-1,2)$ és $M_2(2,1)$ pontok, ezért az egyenlet megoldásai $x_1 = -1$ és $x_2 = 2$.

4. Oldjuk meg az $|x+2| \le \frac{1}{2}(x+5)$ egyenlőtlenséget.

Megoldás. Rajzoljuk meg ugyanabban a koordinátarendszerben az

$$y = |x+2| \quad \text{és} \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

függvénygrafikonokat, majd számítsuk ki a metszéspontokat és olvassuk le, hogy mely intervallumon van az $y = |x+2|$



grafikonja az $y = \frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ grafikonja alatt. Az egyik metszéspontot az $x+2 = \frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ egyenletből számítjuk ki, ahonnan $x = 1$, a másik metszéspontot az $-x-2 = \frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ egyenlet megoldása adja, ahonnan $x = -3$. A grafikonról leolvashatjuk, hogy az $y = |x+2|$ függvény grafikonja a $[-3,1]$ intervallumon az $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ függvény grafikonja alatt van, ezért az $|x+2| \le \frac{1}{2}(x+5)$ egyenlőtlenség megoldása a $[-3,1]$ intervallum, azaz a megoldáshalmaz

$$M = \{x \in \mathbf{R} | -3 \le x \le 1\}.$$

5. Hány megoldása van a $2 - |x+1| = a$ egyenletnek az a valós paraméter különböző értékeire?

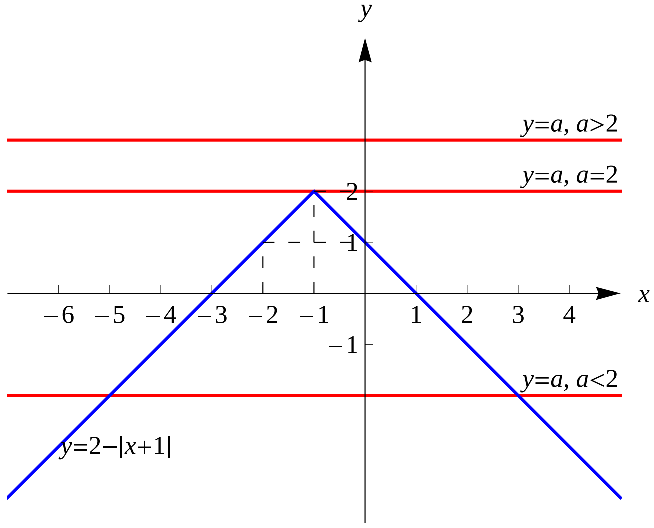
Megoldás. Mivel az abszolút érték felbontása után

$$2-|x+1| = \begin{cases} 1-x, & \text{ha } x \ge -1, \\ x+3, & \text{ha } x < -1, \end{cases}$$

ezért ha megrajzoljuk az

$$y = 2 - |x+1|$$

függvény grafikonját, valamint az $y = a$ vízszintes helyzetű egyeneseket különböző $a \in \mathbf{R}$ értékekre, akkor a grafikonról leolvashatjuk a megoldást:



1^o $a > 2$ esetén az egyenletnek nincs megoldása,

2^o $a = 2$ esetén az egyenletnek 1 megoldása van,

3^o $a < 2$ esetén az egyenletnek 2 megoldása van.

1.2.3. Hatványfüggvény

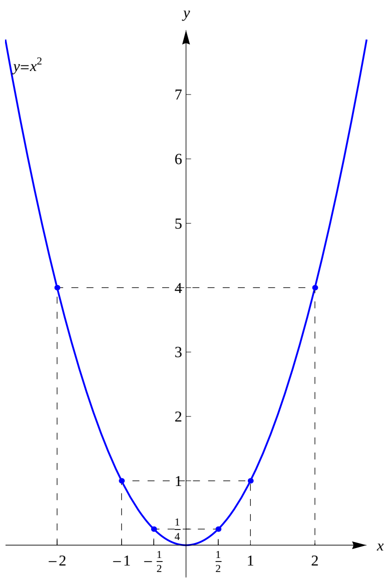
1.33. Definíció. *Azt az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ valós függvényt, melyet az*

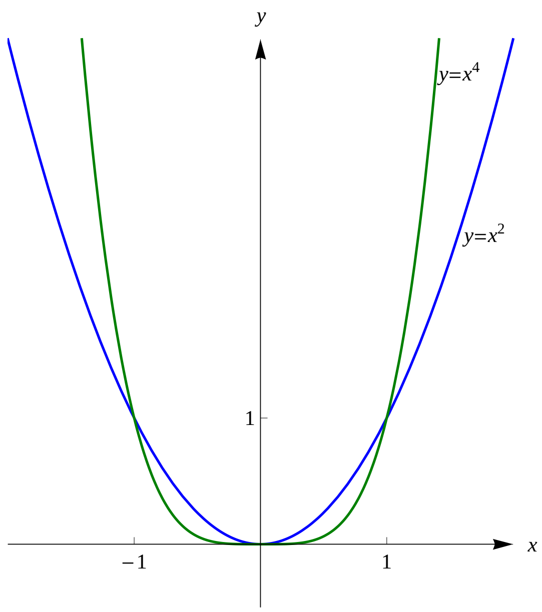
$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbf{N}$$

hozzárendeléssel adunk meg, természetes kitevőjű hatványfüggvénynek nevezzük.

Tekintsünk először néhány kokrét esetet.
Az $f(x) = x$ függvény grafikonja az $y = x$ egyenletű egyenes.
Az $f(x) = x^2$ függvény grafikonja parabola. Készítsünk értéktáblázatot és a kapott pontok segítségével rajzoljuk fel ezt a görbét.

x	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2
x^2	4	1	0.25	0	0.25	1	4

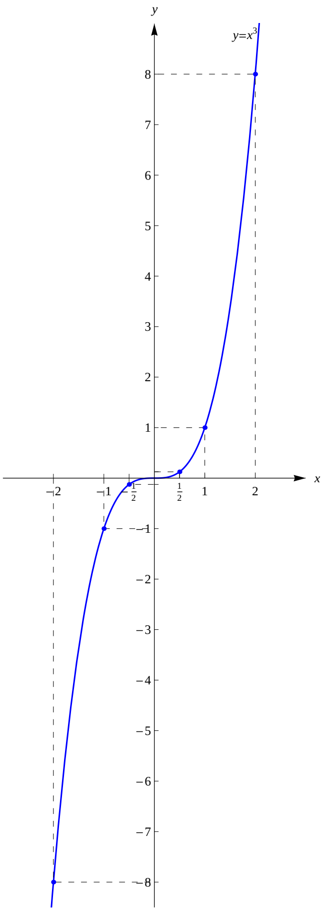


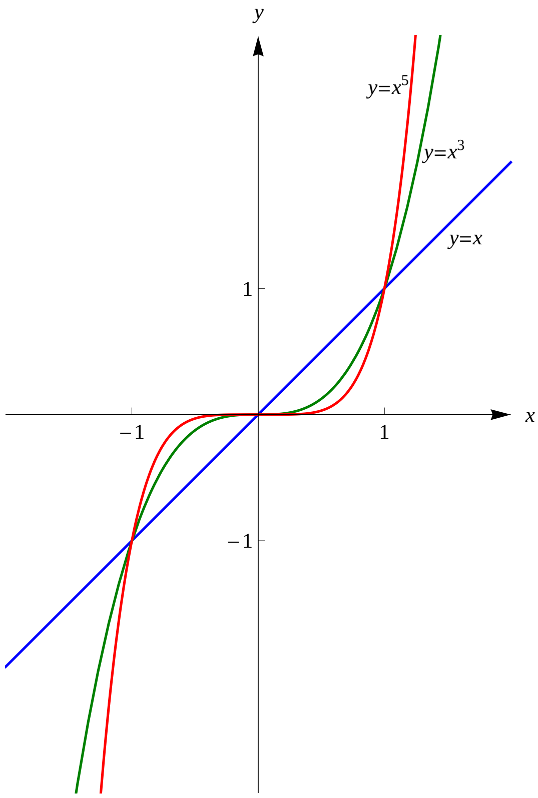


Az $f(x) = x^2$ függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbf{R}$, értékkészlete $R_f = [0, \infty)$, nullahelye pedig az origó, azaz az $N(0,0)$ pont. Az f függvény jellegzetes tulajdonsága, hogy $f(-x) = f(x)$, ami miatt a függvény grafikonja szimmetrikus az y-tengelyre. Ugyanilyen tulajdonságokkal rendelkezik minden $f(x) = x^{2n}$, azaz páros kitevőjű hatványfüggvény, ha $n \in \mathbf{N}$. A mellékelt ábrán megfigyelhetjük az $y = x^2$ és az $y = x^4$ parabolák közötti viszonyt.
A páros kitevőjű függvényre érvényes, hogy minden x valós számra $f(-x) = f(x)$, és emiatt nevezünk minden olyan f függvényt párosnak, amelyekre $f(-x) = f(x)$ teljesül. A páros függvények grafikonja szimmetrikus az y-tengelyre.

Rajzoljuk most fel az $f(x) = x^3$ függvény grafikonját, amelyet harmadfokú parabolának is szokás nevezni. Készítsünk értéktáblázatot és a kapott pontok segítségével rajzoljuk fel ezt a görbét.

x	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2
x^3	-8	-1	-0.125	0	0.125	1	8





Az $f(x) = x^3$ függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbf{R}$, értékkészlete $R_f = \mathbf{R}$, nullahelye pedig az origó, azaz az $N(0,0)$ pont. Az f függvény jellegzetes tulajdonsága, hogy $f(-x) = -f(x)$, ami miatt a függvény grafikonja szimmetrikus az origóra. Ugyanilyen tulajdonságokkal rendelkezik minden $f(x) = x^{2n-1}$, azaz páratlan kitevőjű hatványfüggvény, ha $n \in \mathbf{N}$. A mellékelt ábrán megfigyelhetjük az $y = x^3$ és az $y = x^5$ harmadfokú parabolák közötti viszonyt.

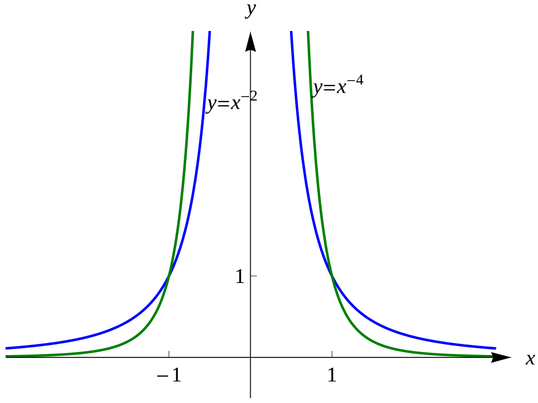
A páratlan kitevőjű függvényre érvényes, hogy minden x valós számra $f(-x) = -f(x)$, és emiatt nevezünk minden olyan f függvényt páratlannak, amelyekre $f(-x) = -f(x)$ teljesül. A páratlan függvények grafikonja szimmetrikus az origóra.

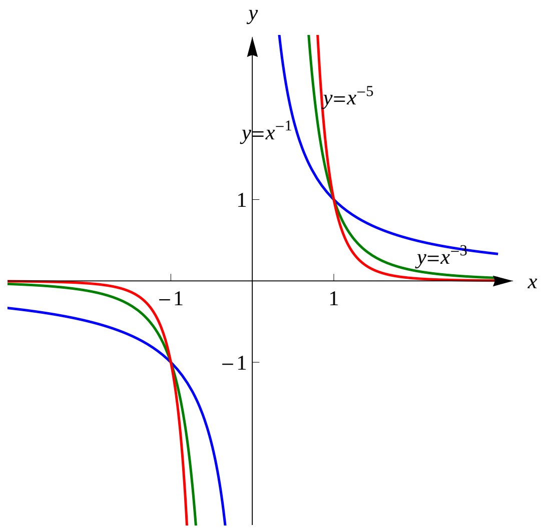
Bővítsük ki a hatványfüggvény fogalmát negatív egész kitevőkre, azaz tekintsük az

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad n \in \mathbf{N}$$

függvényeket. Értelmezési tartományuk $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, nullahelyük nincs. Páros kitevők esetén a függvények párosak és értékkészletük $R_f = (0, \infty)$, páratlan kitevők esetén pedig a függvények páratlanok és értékkészletük $R_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

A következő két ábrán az $n = 2$ és $n = 4$, valamint az $n = 1$, $n = 3$ és $n = 5$ eset látható.





Tekintsük az $f(x) = x^2$ függvényt a $D_f = [0, \infty)$ értelmezési tartományon. Ekkor az f függvény értékkészlete $R_f = [0, \infty)$ és f bijektív, vagyis létezik inverze. Az f^{-1} inverz függvényt az

$$x = \left(f^{-1}(x)\right)^2$$

egyenletből kapjuk, ahonnan $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Az f^{-1} függvény grafikonját az f függvény grafikonjának $y = x$ tengelyre való tükrözésével kapjuk. Az $y = \sqrt{x}$ függvénygrafikonról leolvashatjuk, hogy a függvény csak nemnegatív számokra értelmezett, szigorúan monoton növekvő és pozitív a teljes értelmezési tartományon. Hasonlóan jutunk el az $y = x^{2n}$ függvénygrafikonok fogalmához is, melyek tulajdonságaikban is teljes hasonlóságot mutatnak az $y = \sqrt{x}$ grafikon tulajdonságaival.

Tekintsük most az $f(x) = x^3$ függvényt a $D_f = \mathbf{R}$ értelmezési tartományon. Ekkor az f függvény értékkészlete $R_f = \mathbf{R}$ és f bijektív, vagyis létezik inverze. Az f^{-1} inverz függvényt az

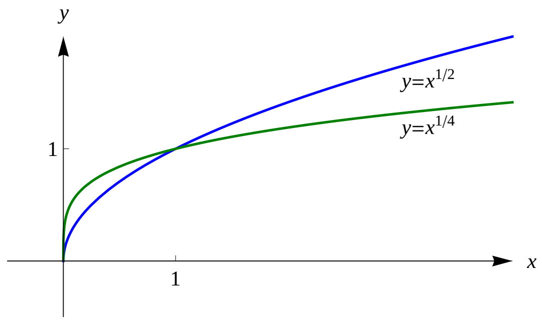
$$x = \left(f^{-1}(x)\right)^3$$

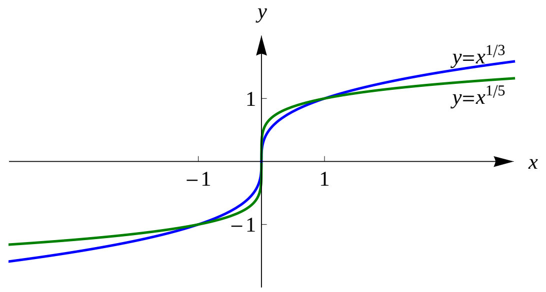
egyenletből kapjuk, ahonnan $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. Az f^{-1} függvény grafikonját az f függvény grafikonjának $y = x$ tengelyre való tükrözésével kapjuk. Az $y = \sqrt[3]{x}$ függvénygrafikonról leolvashatjuk, hogy a függvény minden valós számra értelmezett, szigorúan monoton növekvő a teljes értelemzési tartományon, az origóban van nullahelye és grafikonja középpontosan szimmetrikus az origóra, vagyis páratlan függvényről van szó. Hasonlóan jutunk el az $y = x^{2n+1}$ függvénygrafikonok fogalmához is, melyek tulajdonságaikban teljes hasonlóságot mutatnak az $y = \sqrt[3]{x}$ grafikon tulajdonságaival.

Bővítsük most a hatványfüggvény fogalmát racionális kitevőjű hatványfüggvényekre, azaz tekintsük az

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}, \quad n \in \mathbf{N}$$

típusú függvényeket.
A következő két ábrán az $n = 2$ és $n = 4$, valamint az $n = 3$ és $n = 5$ eset látható.





1.2.4. Másodfokú függvény

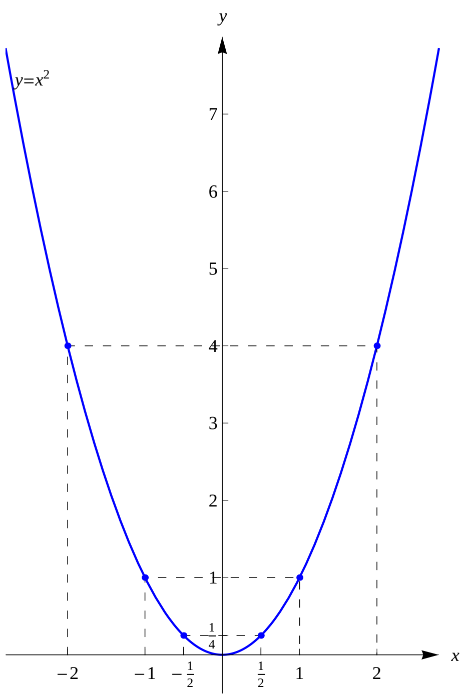
1.34. Definíció. *Legyenek $a, b, c \in \mathbf{R}$ és $a \neq 0$. Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ valós függvényt, melyet az*

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

hozzárendeléssel adunk meg, másodfokú függvénynek nevezzük. Azt a síkgörbét, amelynek az egyenlete $y = ax^2 + bx + c$, másodfokú parabolának, vagy röviden csak parabolának nevezzük.

A másodfokú függvény legegyszerűbb alakja $a = 1$, valamint $b = c = 0$ esetén az $f(x) = x^2$ függvény, amelynek grafikonját már rajzoltuk, s amelyből különböző függvénytranszformációk segítségével az összes többi parabola is felrajzolható. Az alábbi ábrán a már ismert $y = x^2$ parabola látható, s erről leolvashatjuk az $f(x) = x^2$ függvény tulajdonságait.

1. Értelmezési tartománya: $D_f = \mathbf{R}$.
2. Értékkészlete: $R_f = [0, \infty)$.
3. Nullahelye: $x = 0$.
4. Előjele: $f(x) > 0$, ha $x \neq 0$.
5. f szigorúan monoton csökkenő, ha $x < 0$,
   f szigorúan monoton növekvő, ha $x > 0$.
6. $x = 0$-ban a függvénynek minimuma van és $f_{min}(0) = 0$.
7. A grafikonnak az y-tengely szimmetriatengelye.
8. A függvény grafikonja felfelé nyíló (konvex) parabola.



Az $f(x) = kx^2$, $f(x) = kx^2 + n$, $f(x) = (x + m)^2$ és $f(x) = k(x + m)^2 + n$ függvények grafikonjai olyan parabolák, melyeket az $y = x^2$ parabola transzformációival kaphatunk x-, illetve y-tengelyek irányában történő eltolásokkal, valamint zsugorítással és nyújtással.

Vizsgáljuk meg hogyan ábrázolhatnánk a legegyszerűbben az $f(x) = ax^2+bx+c$ függvény grafikonját tetszőleges $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ együtthatók esetén.

A parabolának vagy nincs közös pontja az x-tengellyel (a függvénynek nincs nullahelye), vagy van egy közös érintési pontja az x-tengellyel (a függvénynek egy nullahelye van), vagy pedig két különböző közös pontjuk van, amelyekben a parabola átmetszi az x-tengelyt (a függvénynek két nullahelye van). A nullahelyek száma az $f(x) = 0$ egyenlet, illetve az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet $D = b^2 - 4ac$ diszkriminánsától függ. Legyenek x_1 és x_2 az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet gyökei.

– $D > 0$ esetén a függvénynek két különböző nullahelye van, $x_1 \in \mathbf{R}$ és $x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 \neq x_2$, melyekben a függvény grafikonja átmetszi az x-tengelyt.

– $D = 0$ esetén a függvénynek egy nullahelye van, $x_1 = x_2 \in \mathbf{R}$, melyben a függvény grafikonja alulról vagy felülről érinti az x-tengelyt.

– $D < 0$ esetén a függvénynek nincs nullahelye, $x_1 \notin \mathbf{R}$ és $x_2 \notin \mathbf{R}$, a függvény grafikonja vagy teljes egészében az x-tengely felett vagy pedig alatta helyezkedik el.

A másodfokú függvény grafikonjának másik jellegzetes pontja a parabola csúcspontja, amely $a > 0$ esetén minimumpont, $a < 0$ esetén pedig maximumpont. (Gondoljunk például az $y = x^2$ parabola nullahelyére, amely egyben ennek a parabolának minimumpontja is.) A csúcspontot T jelöli, koordinátáit pedig a másodfokú függvény kanonikus alakjából olvashatjuk le.

$$\begin{aligned}
y &= ax^2 + bx + c = \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.
\end{aligned}$$

Mivel minden $x \in \mathbf{R}$ számra $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, ezért

$$a > 0 \quad \text{esetén} \quad ax^2 + bx + c \geq \frac{4ac - b^2}{4a}, \quad \text{és}$$

$$a < 0 \quad \text{esetén} \quad ax^2 + bx + c \leq \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Ez azt jelenti, hogy az $a > 0$ esetben a parabolának T minimumpontja van, $a < 0$ esetben pedig T maximumpontja, mégpedig

$$T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right).$$

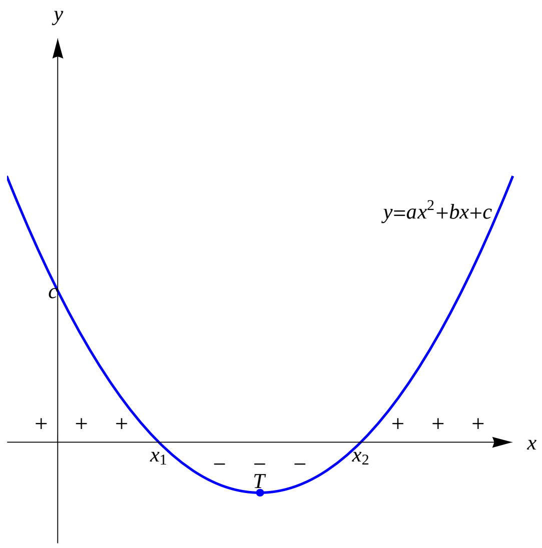
A kanonikus alakból az is megállapítható, hogy az

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = k(x+m)^2 + n$$

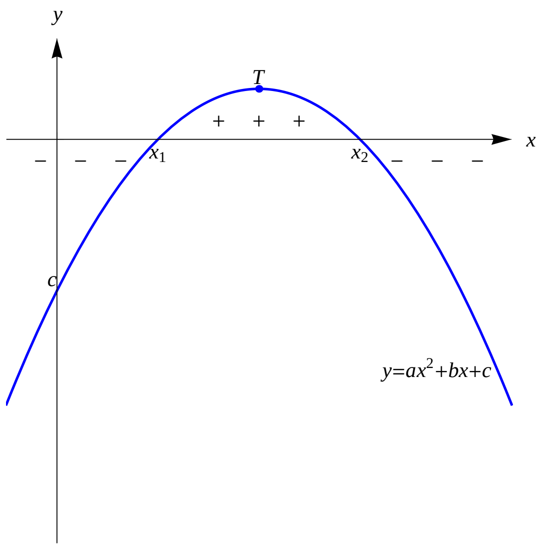
parabola függvénytranszformációk segítségével is megrajzolható.

A másodfokú függvény olyan tulajdonságai, mint az értelmez'esi tartomány, értékkészlet, nullahely, előjel, minimum- vagy maximumpont, monotonitás, paritás (párosság vagy páratlanság), konvexitás, a kivizsgált tulajdonságok alapján a grafikonról mindig leolvashatók.

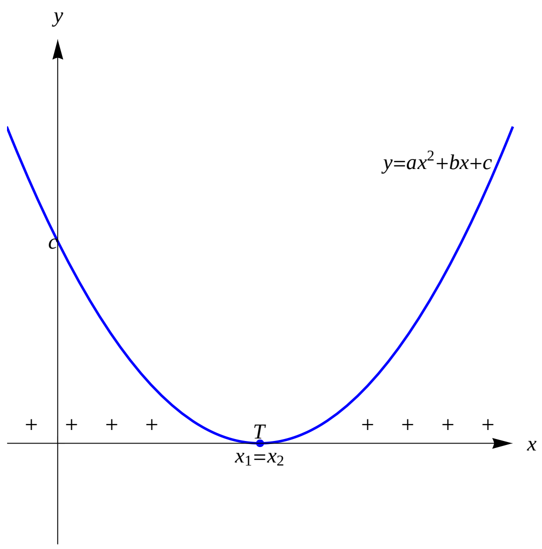
Összesítve az elmondottakat, a parabola különböző helyzetei a koordinátarendszerben az alábbi ábrákon láthatók.



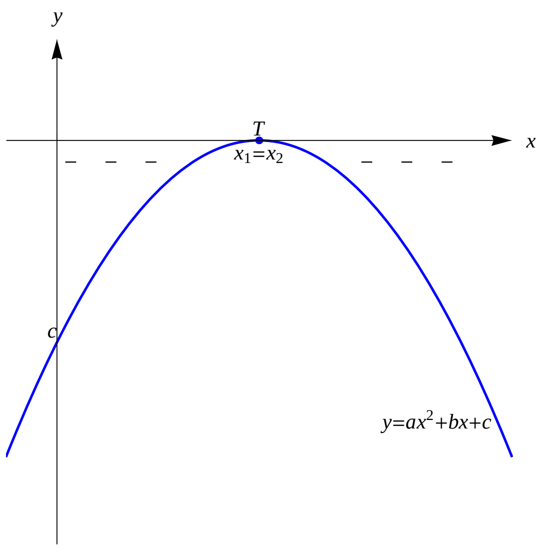
$a > 0, \quad D > 0$



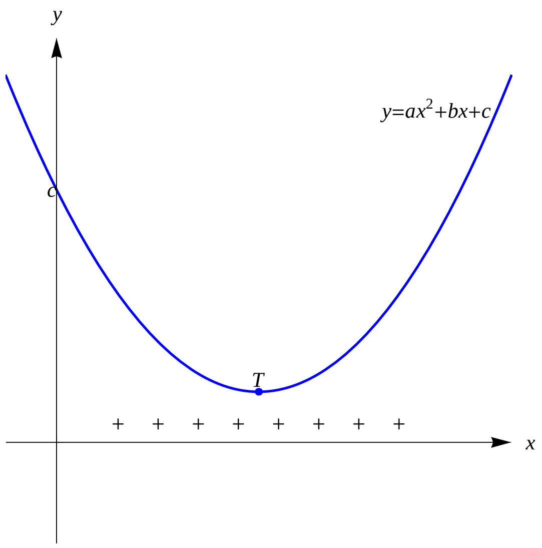
$a < 0, \quad D > 0$



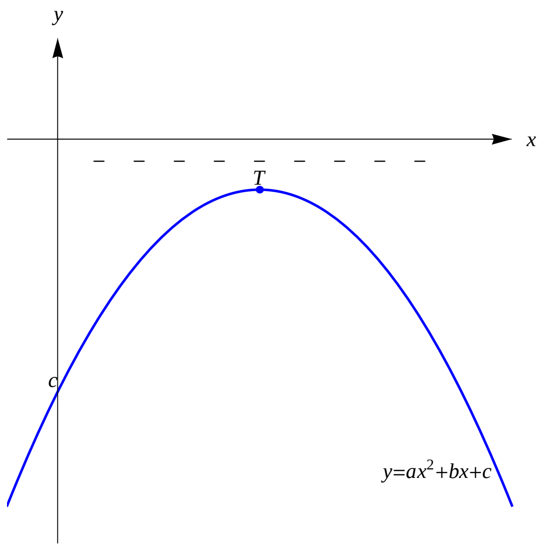
$a > 0, \quad D = 0$



$a < 0, \quad D = 0$



$a > 0, \quad D < 0$



$a < 0, \quad D < 0$

Általánosan elmondható, hogy az f másodfokú függvény grafikonja $a > 0$ esetén felfelé nyíló (konvex) parabola, $a < 0$ esetén pedig lefelé nyíló (konkáv) parabola.

Ugyanakkor megállapítható az is, hogy

– $a > 0$ esetén az f függvény

- szigorúan monoton csökkenő a $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right)$ intervallumon és
- szigorúan monoton növekvő a $\left(-\dfrac{b}{2a}, \infty\right)$ intervallumon,

– $a < 0$ esetben viszont az f függvény

- szigorúan monoton növekvő a $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right)$ intervallumon és
- szigorúan monoton csökkenő a $\left(-\dfrac{b}{2a}, \infty\right)$ intervallumon.

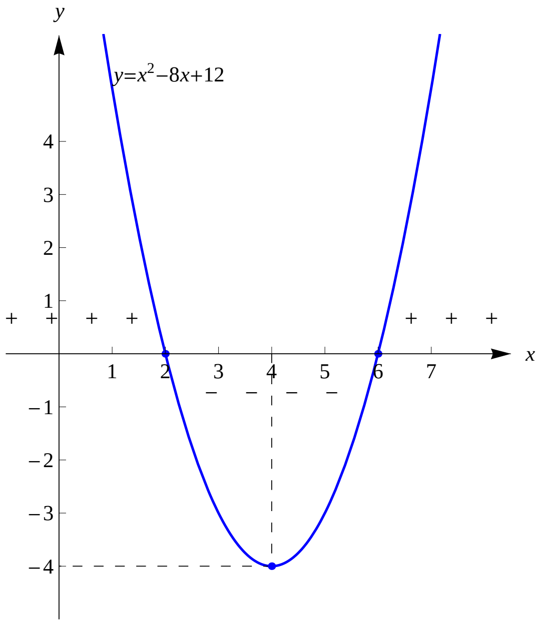
FELADATOK.

1. Rajzoljuk meg az $f(x) = x^2 - 8x + 12$ másodfokú függvény grafikonját és írjuk le a tulajdonságait.

Megoldás. Az f függvény nullahelyeit az $x^2 - 8x + 12 = 0$ másodfokú egyenlet megoldásával kapjuk, így $x_1 = 2$ és $x_2 = 6$ a két nullahely. Mivel $a = 1 > 0$, ezért a függvény grafikonja felfelé nyíló parabola, minimumpontja pedig

$$T_{min}\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = T_{min}(4, -4).$$

A függvény grafikonja és tulajdonságai:



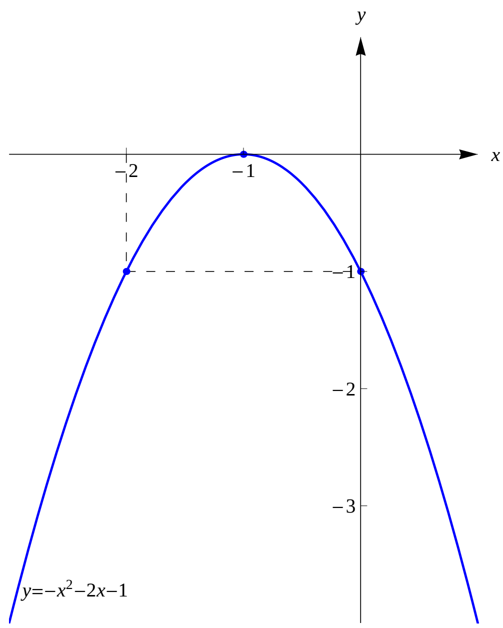
1. Értelmezési tartománya: $D_f = \mathbf{R}$.
2. Értékkészlete: $R_f = [-4, \infty)$.
3. Nullahelyei: $x_1 = 2$ és $x_2 = 6$.
4. Előjele:
   $f(x) > 0$, ha $x \in (-\infty, 2) \cup (6, \infty)$
   $f(x) < 0$, ha $x \in (2, 6)$.
5. A függvénynek minimuma van és $T_{min}(4, -4)$.
6. f szigorúan monoton csökkenő, ha $x \in (-\infty, 4)$,
   f szigorúan monoton növekvő, ha $x \in (4, \infty)$.
7. Az f függvény grafikonja felfelé nyíló (konvex) parabola.

2. Vizsgáljuk ki az $f(x) = -x^2 - 2x - 1$ másodfokú függvényt, rajzoljuk meg a grafikonját.

Megoldás. Az f függvény nullahelyeit az $-x^2 - 2x - 1 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei adják, most viszont $x_1 = x_2 = -1$ ezért csak egy nullahelye van. Mivel $a = -1 < 0$, ezért a függvény grafikonja lefelé nyíló parabola, maximumpontja pedig

$$T_{max}\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = T_{max}(-1, 0).$$

A függvény grafikonja és tulajdonságai:



1. Értelmezési tartománya: $D_f = \mathbf{R}$.
2. Értékkészlete: $R_f = [-\infty, 0)$.
3. Nullahelye: $x = -1$.
4. Előjele:
   $f(x) < 0$, ha $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.
5. A függvénynek maximuma van és $T_{max}(-1, 0)$.
6. f szigorúan monoton növekvő, ha $x \in (-\infty, -1)$,
   f szigorúan monoton csökkenő, ha $x \in (-1, \infty)$.
7. Az f függvény grafikonja lefelé nyíló (konkáv) parabola.

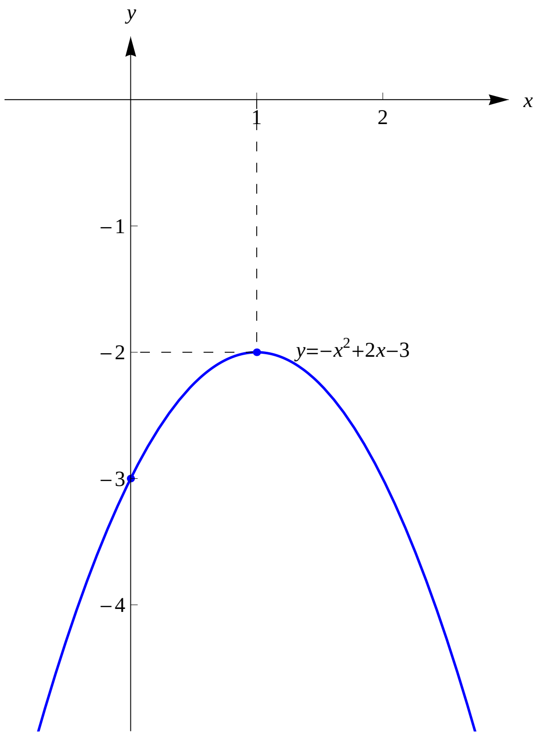
3. Vizsgáljuk ki az $f(x) = -x^2 + 2x - 3$ másodfokú függvényt, és ábrázoljuk a koordinátarendszerben.

Megoldás. A függvénynek nullahelyei nincsenek, mert a $-x^2+2x-3 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei most nem valós számok. Mivel $a = -1 < 0$, ezért a függvény grafikonja lefelé nyíló parabola, maximumpontja pedig

$$T_{max}\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right) = T_{max}(1, -2).$$

A függvény grafikonja és tulajdonságai:

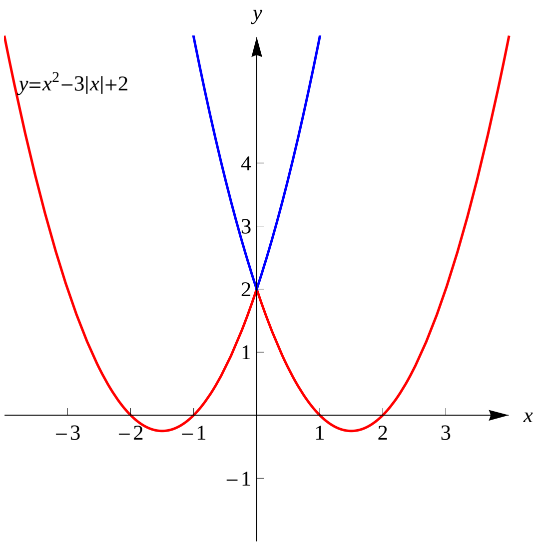
1. Értelmezési tartománya: $D_f = \mathbf{R}$.
2. Értékkészlete: $R_f = [-\infty, -2)$.
3. Nullahelye nincs.
4. Előjele: $f(x) < 0$, ha $x \in \mathbf{R}$.
5. A függvénynek maximuma van és $T_{max}(1, -2)$.
6. f szigorúan monoton növekvő, ha $x \in (-\infty, 1)$, f szigorúan monoton csökkenő, ha $x \in (1, \infty)$.
7. Az f függvény grafikonja lefelé nyíló (konkáv) parabola.



4. Rajzoljuk meg az $f(x) = x^2 - 3|x| + 2$ függvény grafikonját.
Megoldás. Írjuk fel a függvényt abszolút érték nélkül. Ekkor

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & \text{ha } x \geq 0, \\ x^2 + 3x + 2, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Rajzoljuk meg ugyanabban a koordinátarendszerben mindkét parabolát, majd jelöljük meg az $y = x^2 - 3x + 2$ parabolaívet $x \geq 0$ értékekre, az $y = x^2 + 3x + 2$ parabolaívet pedig $x < 0$ értékekre.



5. Rajzoljuk meg az $f(x) = -|x^2 - 4x| - 3$ függvény grafikonját.

Megoldás. Először írjuk fel a függvényt abszolút érték nélkül. Vegyük észre, hogy az $x^2-4x = x(x-4)$ szorzat előjele táblázattal könnyen kivizsgálható. Mivel

D_f	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, \infty)$
x	$-$	$+$	$+$
$x - 4$	$-$	$-$	$+$
$x^2 - 4x$	$+$	$-$	$+$

$$|x^2 - 4x| = \begin{cases} x^2 - 4x, & \text{ha } x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty), \\ -(x^2 - 4x), & \text{ha } x \in (0, 4), \end{cases}$$

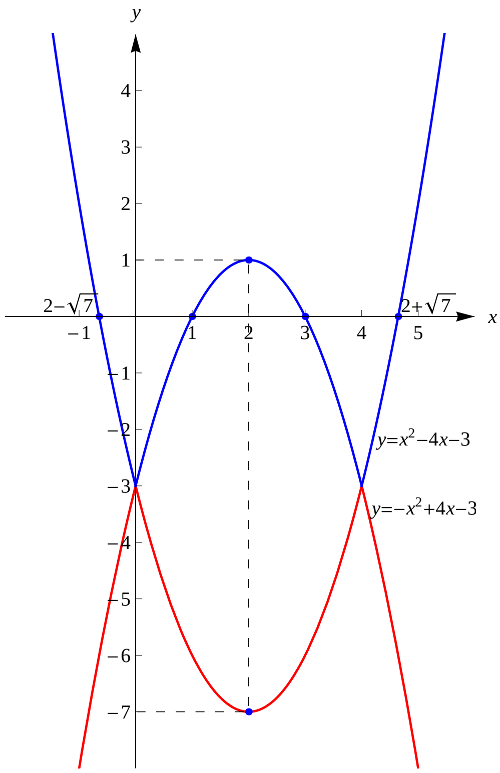
ezért

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 3, & \text{ha } x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty), \\ x^2 - 4x - 3, & \text{ha } x \in [0, 4]. \end{cases}$$

Az $-x^2 + 4x - 3 = 0$ egyenletből kapjuk, hogy $x_1 = 1$ és $x_2 = 3$ az $y = -x^2 + 4x - 3$ konkáv parabola nullahelyei, csúcspontja pedig $T_{max}(2, 1)$.

Az $x^2 - 4x - 3 = 0$ egyenletből kapjuk, hogy $x_1 = 2 - \sqrt{7}$ és $x_2 = 2 + \sqrt{7}$ az $y = x^2 - 4x - 3$ konvex parabola nullahelyei, csúcspontja pedig $T_{min}(2, -7)$.

Rajzoljuk most meg ugyanabban a koordinátarendszerben az $y = -x^2 + 4x - 3$ parabolát és az $y = x^2 - 4x - 3$ parabolát is. A keresett grafikont úgy kapjuk meg, hogy a konkáv parabolából vesszük a $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ intervallumokhoz tartozó íveket, a konvex parabolából pedig a $[0, 4]$ intervallumhoz tartozó ívet. A függvény grafikonja a mellékelt ábrán látható.



6. Bontsuk fel a $p \in \mathbf{R}^+$ számot két összeadandóra úgy, hogy az összeadandók szorzata a lehető legnagyobb legyen.

Megoldás. Ha az egyik összeadandót x-szel jelöljük, akkor a másik összeadandó $p - x$. Ezek szorzata $f(x) = x(p - x) = -x^2 + px$ egy olyan másodfokú függvény, amelynek maximuma van, tehát egy ilyen szorzat valóban elérheti a legnagyobb értékét. Mivel

$$f_{max}\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a}, \quad \text{ezért} \quad f_{max}\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{p^2}{4}$$

a keresett szorzat legnagyobb értéke. Ez azt jelenti, hogy a szorzat akkor a legnagyobb, ha a p számot $p = \frac{p}{2} + \frac{p}{2}$ módon bontjuk összegre, mert akkor a $\frac{p}{2} \cdot \frac{p}{2} = \frac{p^2}{4}$ a lehető legnagyobb szorzat.

7. Határozzuk meg az $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+4}$ függvény lehető legnagyobb értékét.

Megoldás. Az $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+4} = \dfrac{1}{g(x)}$ függvény legnagyobb értékét azokban a pontokban kapjuk meg, ahol a $g(x) = x^2+2x+4$ függvénynek az értéke legkisebb. A g függvénynek nincsenek valós gyökei, mert diszkriminánsa $D = -12 < 0$, és mivel főegyütthatója $a = 1 > 0$, ezért neki minimuma van, így minden valós számra pozitív értéket vesz fel. Mivel $g(x) = x^2+2x+4 = (x+1)^2+3$, ezért $g_{min}(-1) = 3$, tehát a nevező lehető legkisebb értéke 3. Mivel $g(x) > 0$ minden x valós számra, ezért az $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ is mindig pozitív, és érvényes, hogy $f_{max}(-1) = \dfrac{1}{g_{min}(-1)} = \dfrac{1}{3}$, vagyis az f függvény lehető legnagyobb értéke $\dfrac{1}{3}$. Eszerint

$$0 < f(x) \leq \frac{1}{3}, \quad \text{minden} \quad x \in \mathbf{R} \quad \text{esetén.}$$

8. Legyenek x_1 és x_2 az $f(x) = -x^2+(m-2)x+m+1$ másodfokú függvény nullahelyei. Az m valós paraméter mely értékére lesz az nullahelyek négyzetösszege a lehető legnagyobb?

Megoldás. Az $f(x) = -x^2 + (m-2)x + m + 1$ másodfokú függvény x_1 és x_2 nullahelyei egyben a $-x^2 + (m-2)x + m + 1 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei. Alkalmazzuk a Viète-képleteket az $x_1^2 + x_2^2$ négyzetösszeg kifejezésére. Ekkor

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{(m-2)^2}{1} - 2 \cdot \frac{m+1}{-1} =$$

$$= (m-2)^2 + 2(m+1) = m^2 - 2m + 6 = (m-1)^2 + 5,$$

ezért

$$(x_1^2 + x_2^2)_{max} = 5, \quad \text{ha} \quad m = 1,$$

vagyis a keresett négyzetösszeg lehető legnagyobb értéke 5, ha az m valós paraméter értéke 1.

9. Legyen $f(x) = (k-2)x^2 - 2kx + k - 3$ másodfokú függvény. Határozzuk meg a k valós paraméter értékét úgy, hogy az f függvény mindkét nullahelye pozitív valós szám legyen.

Megoldás. Ahhoz, hogy az f függvény nullahelyei valós számok legyenek, a diszkrimináns, $D = 4k^2 - 4(k-2)(k-3) = 20k - 24$, nem lehet negatív, ezért $D \geq 0$, illetve $20k - 24 \geq 0$ kell hogy teljesüljön, ahonnan $k \geq \dfrac{6}{5}$. Ha mindkét nullahely pozitív, akkor az összegük és szorzatuk is pozitív, azaz

$$x_1 + x_2 \geq 0 \quad \text{és} \quad x_1 \cdot x_2 \geq 0.$$

A feladat feltétele tehát teljesül, ha k kielégíti az alábbi egyenlőtlenségrendszert:

$$k \geq \frac{6}{5}, \quad \frac{2k}{k-2} \geq 0 \quad \text{és} \quad \frac{k-3}{k-2} \geq 0.$$

A megoldást az alábbi táblázatból olvashatjuk le:

	$(-\infty, 0)$	$\left(0, \frac{6}{5}\right)$	$\left(\frac{6}{5}, 2\right)$	$(2,3)$	$(3,\infty)$
k	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$5k-6$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$k-2$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$k-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{2k}{k-2}$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\frac{k-3}{k-2}$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$

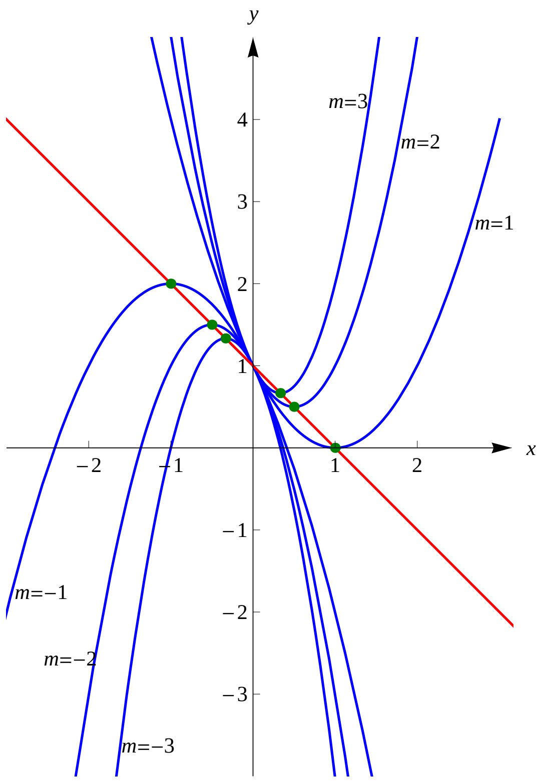
A táblázatból látható, hogy a kívánt egyenlőtlenségrendszert a $(3,\infty)$ intervallumba tartozó k paraméterértékek elégítik ki. Tehát az adott f másodfokú függvény mindkét nullahelye pozitív valós szám, ha $k > 3$.

10. Határozzuk meg az $y = mx^2 - 2x + 1$ parabolasereg csúcspontjainak mértani helyét, ha $m \in \mathbf{R}$.

Megoldás. Mivel a parabola csúcspontjainak koordinátái minden esetben

$$T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right) = T\left(\frac{1}{m}, \frac{m-1}{m}\right),$$

így az $x = \frac{1}{m}$ és $y = \frac{m-1}{m}$ egyenletrendszerből az m paraméter eliminálásával kapjuk a keresett egyenletet. Mivel $x = \frac{1}{m}$, ebből $m = \frac{1}{x}$. Behelyettesítve az $y = \frac{m-1}{m}$ kifejezésbe adódik az $y = 1 - x$ egyenlet. Ez azt jelenti, hogy az $f(x) = mx^2 - 2x + 1$ másodfokú függvénycsalád csúcspontjai a különböző $m \in \mathbf{R}$ paraméterek esetén az $y = 1 - x$ egyenesen helyezkednek el.



1.2.5. Exponenciális függvény

1.35. Definíció. *Exponenciális függvénynek nevezzük azt az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ valós függvényt, amelyet az*

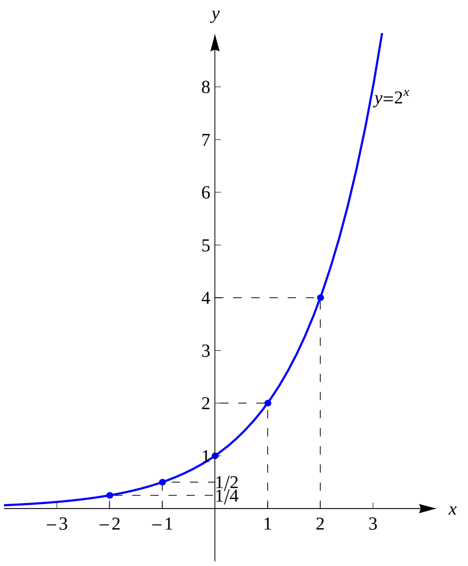
$$f(x) = a^x, \quad x \in \mathbf{R}$$

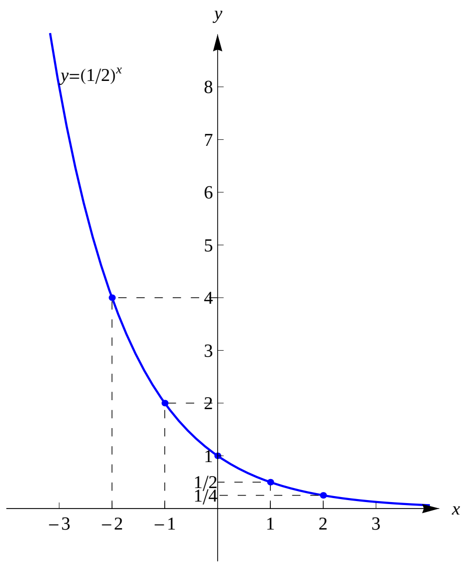
hozzárendelési szabállyal adunk meg, ahol $a > 0$ és $a \neq 1$.

Az exponenciális függvény grafikonját legegyszerűbben egy értéktáblázat segítségével rajzolhatjuk meg, amelyben $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ abszcissza értékeknek megfelelő pontok benne kell, hogy legyenek ahhoz, hogy a helyes ábrát meg tudjuk rajzolni.
Az exponenciális függvény grafikonja $0 < a < 1$ és $a > 1$ esetén különböző alakú. A két alapesetet az $y = 2^x$ és az $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ grafikonjaival szemléltetjük. Készítsük el az értéktáblázatokat és a kapott pontok segítségével rajzoljuk fel a görbéket, majd vizsgáljuk ki tulajdonságaikat.

x	-2	-1	0	1	2
2^x	0.25	0.5	1	2	4

x	-2	-1	0	1	2
2^{-x}	4	2	1	0.5	0.25





Az exponenciális függvény tulajdonságai:

1. Értelmezési tartománya: $D_f = \mathbf{R}$.
2. Értékkészlete: $R_f = (0, \infty)$.
3. Nullahelye nincs.
4. A függvény pozitív a teljes értelmezési tartományon.
5. $a > 1$ esetén a függvény szigorúan monoton növekvő a teljes értelmezési tartományon.
6. $0 < a < 1$ esetén a függvény szigorúan monoton csökkenő a teljes értelmezési tartományon.
7. A függvény konvex a teljes értelmezési tartományon.

8. Az $y = 0$ egyenes a görbe vízszintes aszimptotája.
(*Aszimptotának* nevezzük az olyan egyeneseket, amelyekhez a függvény görbéje fokozatosan közelít, de nem éri el.)

1.2.6. Logaritmusfüggvény

Mivel az exponenciális függvény bijektív, ezért invertálható és inverz függvényét logaritmusfüggvénynek nevezzük.

1.36. Definíció. *Logaritmusfüggvénynek nevezzük azt az* $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ *valós függvényt, amelyet az*

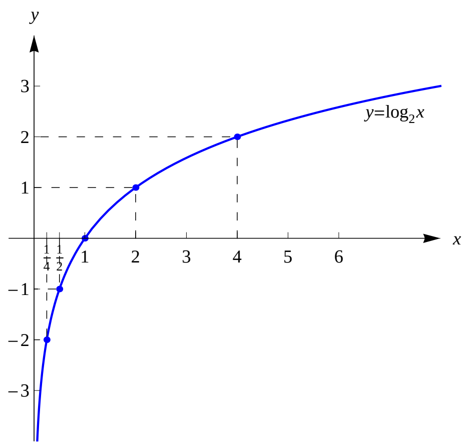
$$f(x) = \log_a x, \quad x \in \mathbf{R}^+$$

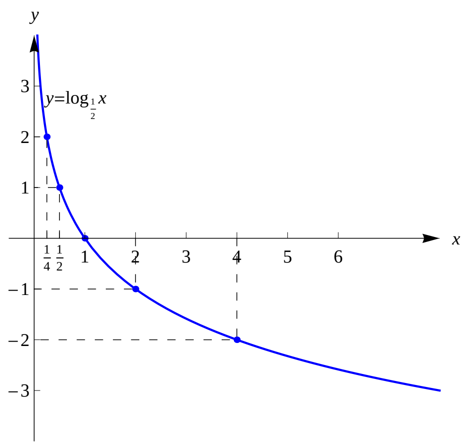
hozzárendelési szabállyal adunk meg, ahol $a > 0$ *és* $a \neq 1$.

A logaritmusfüggvény grafikonját kétféleképpen kaphatjuk meg. A megfelelő exponenciális függvény grafikonjának az $y = x$ egyeneshez való tengelyes tükrözésével vagy értéktáblázat segítségével, amelybe az $y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ordináta értékeknek megfelelő pontokat választjuk.
A logaritmusfüggvény grafikonja $0 < a < 1$ és $a > 1$ esetén különböző alakú. A két alapesetet az $y = \log_2 x$ és az $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ grafikonjaival szemléltetjük. Készítsük el ezeket az értéktáblázatokat és a kapott pontok segítségével rajzoljuk fel a görbéket, majd vizsgáljuk ki tulajdonságaikat.

x	0.25	0.5	1	2	4
$\log_2 x$	-2	-1	0	1	2

x	4	2	1	0.5	0.25
$\log_{\frac{1}{2}} x$	-2	-1	0	1	2





A logaritmusfüggvény tulajdonságai:

1. Értelmezési tartománya: $D_f = \mathbf{R}^+$.

2. Értékkészlete: $R_f = \mathbf{R}$.

3. Nullahelye $x = 1$.

4. $a > 1$ esetén a függvény negatív a $(0, 1)$ intervallumon, és pozitív a $(1, \infty)$ intervallumon.

5. $0 < a < 1$ esetén viszont a függvény pozitív a $(0,1)$ intervallumon, és negatív a $(1,\infty)$ intervallumon.

6. $a > 1$ esetén a függvény szigorúan monoton növekvő a teljes értelmezési tartományon.

7. $0 < a < 1$ esetén a függvény szigorúan monoton csökkenő a teljes értelmezési tartományon.

8. $a > 1$ esetén a függvény konvex a teljes értelmezési tartományon.

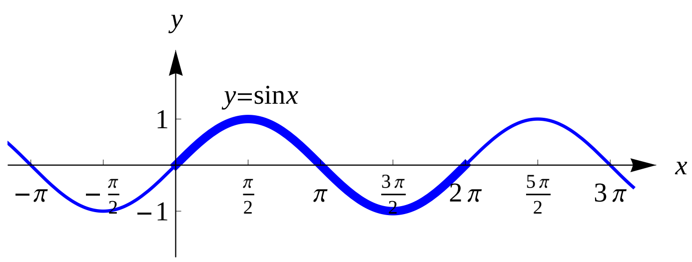
9. $0 < a < 1$ esetén a függvény konkáv a teljes értelmezési tartományon.

10. Az $x = 0$ egyenes a görbe függőleges aszimptotája.

1.2.7. Trigonometrikus függvények

A $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \operatorname{tg} x$ i $f(x) = \operatorname{ctg} x$ függvényeket trigonometrikus függvényeknek nevezzük. A trigonometrikus függvények periodikusak, mert mindegyik esetén van olyan ω pozitív valós szám, amelyre $f(x+\omega) = f(x)$.

Az $f(x) = \sin x$ függvény grafikonja és tulajdonságai:



1. A függvény minden valós számra értelmezett, azaz $D_f = \mathbf{R}$.

2. A függvény értékkészlete az $R_f = [-1,1]$ intervallum.

3. A függvény alapperiódusa $\omega_0 = 2\pi$, azaz $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, $k \in \mathbf{Z}$.

4. A függvény páratlan, vagyis $\sin(-x) = -\sin x$.

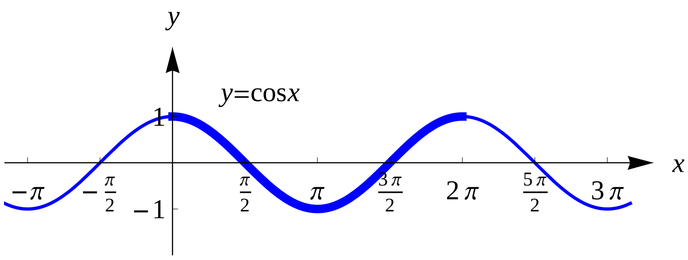
5. A függvény nullahelyei az $x = k\pi$ pontok, $k \in \mathbf{Z}$.

6. A függvény pozitív a $(2k\pi, \pi+2k\pi)$ és negatív a $(\pi+2k\pi, 2\pi+2k\pi)$ intervallumokon, $k \in \mathbf{Z}$.

7. A függvény szigorúan monoton növekvő a $\left(2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ és szigorúan monoton csökkenő a $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$ intervallumokon, $k \in \mathbf{Z}$.

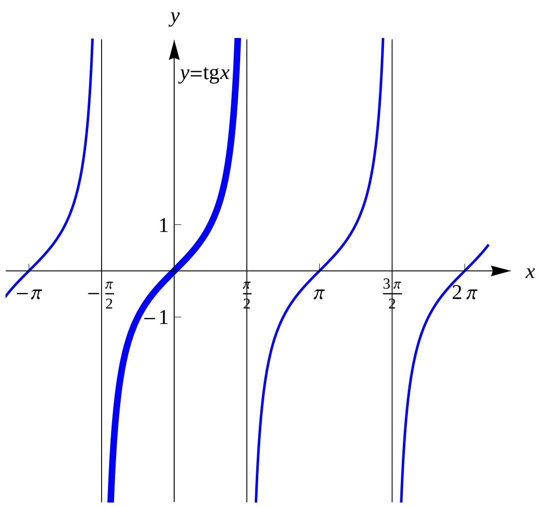
8. A függvénynek $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, 1\right)$ pontokban maximuma, a $\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi, -1\right)$ pontokban pedig minimuma van, $k \in \mathbf{Z}$.

Az $f(x) = \cos x$ függvény grafikonja és tulajdonságai:



1. A függvény minden valós számra értelmezett, azaz $D_f = \mathbf{R}$.
2. A függvény értékkészlete az $R_f = [-1, 1]$ intervallum.
3. A függvény alapperiódusa $\omega_0 = 2\pi$, azaz $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, $k \in \mathbf{Z}$.
4. A függvény páros, vagyis $\cos(-x) = \cos x$.
5. A függvény nullahelyei a $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ pontok, $k \in \mathbf{Z}$.
6. A függvény pozitív a $\left(2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right)$ intervallumokon és negatív a $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$ intervallumokon, $k \in \mathbf{Z}$.
7. A függvény szigorúan monoton csökkenő a $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$ intervallumokon és szigorúan monoton növekvő a $(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$ intervallumokon, $k \in \mathbf{Z}$.
8. A függvénynek a $(2k\pi, 1)$ pontokban maximuma, és a $(\pi + k\pi, -1)$ pontokban minimuma van.

Az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény grafikonja és tulajdonságai:



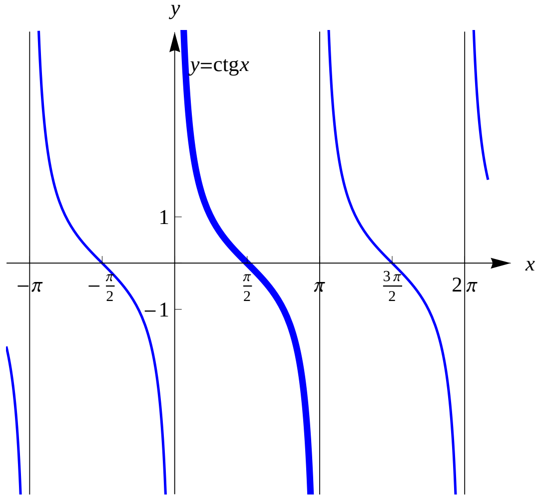
1. A függvény értelmezési tartománya
$$D_f = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}.$$
2. A függvény értékkészlete $R_f = \mathbf{R}$.
3. A függvény alapperiódusa $\omega_0 = \pi$, azaz $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$, $k \in \mathbf{Z}$.
4. A függvény páratlan, vagyis
$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x.$$
5. A függvény nullahelyei a $k\pi$ pontok, $k \in \mathbf{Z}$.
6. A függvény pozitív a $\left(k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$ és negatív a $\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi\right)$ intervallumokon, $k \in \mathbf{Z}$.

7. A függvény szigorúan monoton növekvő a $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ intervallumokon, $k \in \mathbf{Z}$.

8. A függvénynek nincs se maximuma, se minimuma.

9. A függvény függőleges aszimptotái az $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ egyenesek, $k \in \mathbf{Z}$.

Az $f(x) = \operatorname{ctg} x$ függvény grafikonja és tulajdonságai:



1. A függvény értelmezési tartománya
$$D_f = \mathbf{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

2. A függvény értékkészlete $R_f = \mathbf{R}$.

3. A függvény alapperiódusa $\omega_0 = \pi$, azaz $\operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg} x$, $k \in \mathbf{Z}$.

4. A függvény páratlan, vagyis
$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x.$$

5. A függvény nullahelyei a $\frac{\pi}{2}+k\pi$ pontok, $k \in \mathbf{Z}$.

6. A függvény pozitív a $\left(k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ intervallumokon és negatív a $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi, \pi+k\pi\right)$ intervallumokon, $k \in \mathbf{Z}$.

7. A függvény szigorúan monoton csökkenő a $(k\pi, \pi + k\pi)$ intervallumokon, $k \in \mathbf{Z}$.

8. A függvénynek nincs se maximuma, se minimuma.

9. A függvény függőleges aszimptotái az $x = k\pi$ egyenesek, $k \in \mathbf{Z}$.

1.2.8. Árkuszfüggvények

A trigonometrikus függvények periodikusak, ezért a teljes értelmezési tartományukon nem bijektívek, tehát nem invertálhatók. Bizonyos intervallumokon azonban szigorúan monotonok, ezért ott invertálhatók is. Az ilyen módon értelmezett inverz függvényeket *árkuszfüggvényeknek* vagy *ciklometrikus függvényeknek* nevezzük.

Az *árkusz szinusz függvény* a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumra szűkített $f(x) = \sin x$ függvény inverze,
$$f^{-1}(x) = \arcsin x.$$

1. Értelmezési tartománya:
$D_{f^{-1}} = [-1, 1]$.

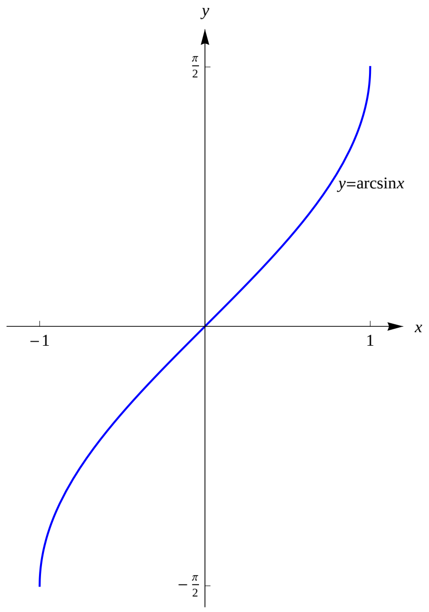
2. Értékkészlete: $R_{f^{-1}} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Nullahelye $x = 0$.

4. A függvény páratlan.

5. Görbéje az $y = \sin x$ függvénygörbe $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumhoz tartozó darabjának az $y = x$ egyenesre való tükrözésével állítható elő.

6. Az $f^{-1}(x) = \arcsin x$ függvény szigorúan monoton növekvő.



Az *árkusz koszinusz függvény* a $[0, \pi]$ intervallumra szűkített $f(x) = \cos x$ függvény inverze,

$$f^{-1}(x) = \arccos x.$$

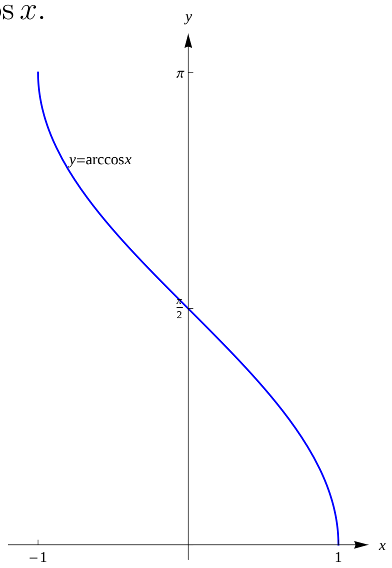
1. Értelmezési tartománya:
$D_{f^{-1}} = [-1, 1]$.

2. Értékkészlete: $R_{f^{-1}} = [0, \pi]$.

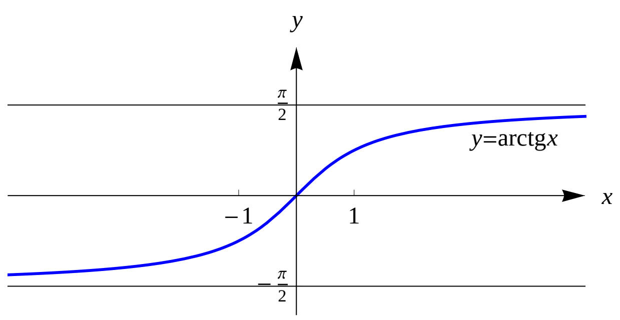
3. Nullahelye $x = 1$.

4. Görbéje az $y = \cos x$ függvénygörbe $[0, \pi]$ intervallumhoz tartozó darabjának az $y = x$ egyenesre való tükrözésével állítható elő.

5. Az $f^{-1}(x) = \arccos x$ függvény szigorúan monoton csökkenő.



Az *árkusz tangens függvény* a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumra szűkített $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény inverze. Jelölése: $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$.



1. Értelmezési tartománya: $D_{f^{-1}} = (-\infty, \infty)$.

2. Értékkészlete: $R_{f^{-1}} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

3. Nullahelye $x = 0$.

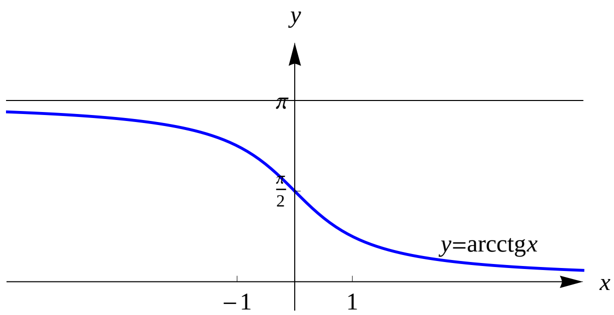
4. A függvény páratlan.

5. Görbéje az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumhoz tartozó görbéjének az $y = x$ egyenesre való tükrözésével állítható elő.

6. Az $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$ függvény szigorúan monoton növekvő a teljes értelmezési tartományán.

7. Az $y = -\frac{\pi}{2}$ és az $y = \frac{\pi}{2}$ egyenesek a függvény vízszintes aszimptotái.

Az *árkusz kotangens függvény* a $(0, \pi)$ intervallumra szűkített $f(x) = \operatorname{ctg} x$ függvény inverze. Jelölése: $f^{-1}(x) = \operatorname{arcctg} x$.



1. Értelmezési tartománya: $D_{f^{-1}} = (-\infty, \infty)$.

2. Értékkészlete: $R_{f^{-1}} = (0, \pi)$.

3. Görbéje az $f(x) = \operatorname{ctg} x$ függvény $(0, \pi)$ intervallumhoz tartozó görbéjének az $y = x$ egyenesre való tükrözésével állítható elő.

4. Nullehelye nincs.

5. Az $f^{-1}(x) = \operatorname{arcctg} x$ függvény szigorúan monoton csökkenő a teljes értelmezési tartományán.

6. Az $y = 0$ és az $y = \pi$ egyenesek a függvény vízszintes aszimptotái.

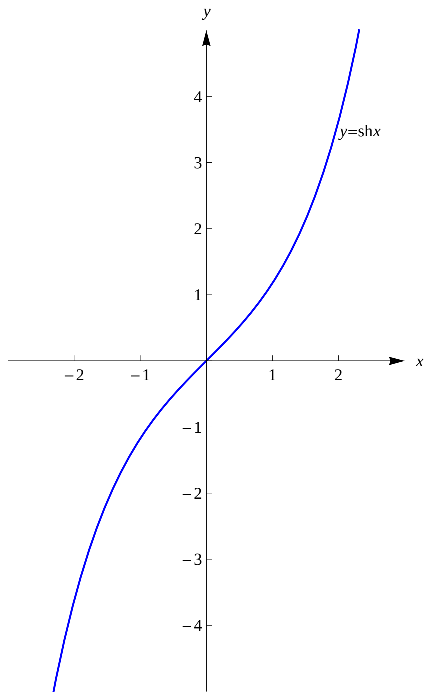
1.2.9. Hiperbolikus függvények

Az exponenciális függvény segítségével értelmezzük a *hiperbolikus függvényeket.*
A *szinusz hiperbolikusz függvényt*

$$f(x) = \operatorname{sh} x$$

módon jelöljük, hozzárendelési törvénye pedig a következő:

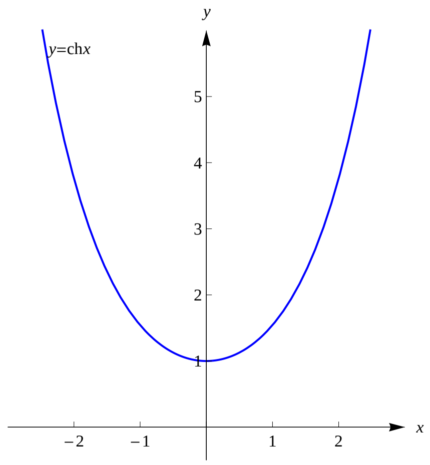
$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$



1. Értelmezési tartománya: $D_f = \mathbf{R}$.
2. Értékkészlete: $R_f = \mathbf{R}$.
3. Nullahelye $x = 0$.
4. A függvény páratlan.
5. A függvény szigorúan monoton növekvő a teljes értelmezési tartományon.

A *koszinusz hiperbolikusz függvényt* $f(x) = \operatorname{ch} x$ módon jelöljük, hozzárendelési törvénye pedig

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

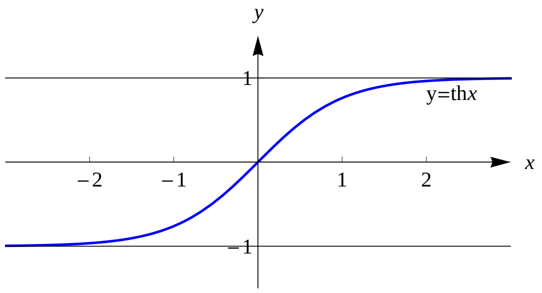


1. Értelmezési tartománya: $D_f = \mathbf{R}$.
2. Értékkészlete: $R_f = [1, \infty)$.
3. Nullahelye nincs.
4. A függvény páros.
5. A függvény szigorúan monoton csökkenő a $(-\infty, 0)$ intervallumon és szigorúan monoton növekvő a $(0, \infty)$ intervallumon.

Az $y = \operatorname{ch} x$ görbét *láncgörbének* is nevezik, mert a súlyos kábelek, láncok, kötelek, amelyeket két pontban felfüggesztünk úgy, hogy a pontok egymásközti távolsága kisebb a huzal vagy kötél hosszúságánál, akkor a ”belógás” éppen a láncgörbe ívét követi.

A *tangens hiperbolikusz függvényt* $f(x) = \operatorname{th} x$ módon jelöljük, hozzárendelési törvénye pedig

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$

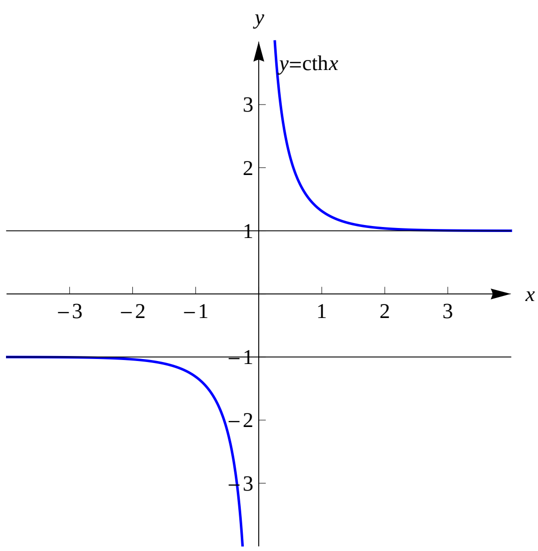


1. Értelmezési tartománya: $D_f = \mathbf{R}$.
2. Értékkészlete: $R_f = (-1, 1)$.
3. Nullahelye $x = 0$.
4. A függvény páratlan.
5. A függvény szigorúan monoton növekvő a teljes értelmezési tartományon.
6. Az $y = -1$ és az $y = 1$ egyenesek a függvény víszintes aszimptotái.

A *kotangens hiperbolikusz függvényt* $f(x) = \operatorname{cth} x$ módon jelöljük, hozzárendelési törvénye pedig

$$\operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

1. Értelmezési tartománya: $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.
2. Értékkészlete: $R_f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.
3. Nullahelye nincs.
4. A függvény páratlan.
5. A függvény szigorúan monoton csökkenő a teljes értelmezési tartományon.
6. Az $y = -1$ és az $y = 1$ egyenesek a függvény víszintes aszimptotái.



A hiperbolikus függvényekre a trigonometrikus függvényekhez hasonló összefüggések, azonosságok érvényesek. Ezek közül a következők jól használhatók a hiperbolikus függvényekkel kapcsolatos problémák megoldásához.

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x, \quad \operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \quad \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{sh} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}}, \quad \operatorname{ch} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}}.$$

1.2.10. Áreafüggvények

A hiperbolikus függvények inverzeit *áreafüggvényeknek* nevezzük. Görbéiket előállíthatjuk a hiperbolikus függvények görbéiből, ha azokat az $y = x$ egyenesre tükrözzük.

Az *área szinusz hiperbolikusz függvény* az $f(x) = \operatorname{sh} x$ függvény inverze, jelölése

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arsh} x.$$

Az inverzfüggvény képzése alapján előállíthatjuk az $f^{-1}(x) = \operatorname{arsh} x$ függvényt a logaritmusfüggvény segítségével. Ha

$$f(x) = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{akkor} \quad x = \frac{e^{f^{-1}(x)} - e^{-f^{-1}(x)}}{2}.$$

Ebből adódik, hogy

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

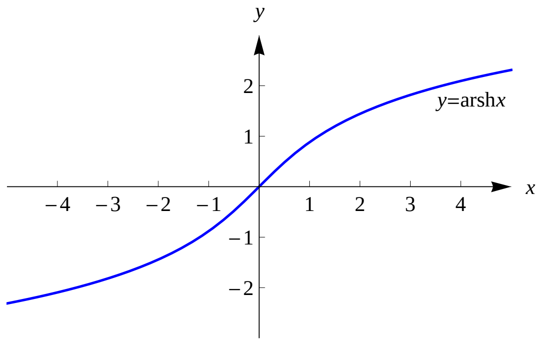
1. Értelmezési tartománya: $D_f = \mathbf{R}$.

2. Értékkészlete: $R_f = \mathbf{R}$.

3. Nullahelye $x = 0$.

4. A függvény páratlan.

5. A függvény szigorúan monoton növekvő a teljes értelmezési tartományon.



Az *área koszinusz hiperbolikusz függvény* az $f(x) = \operatorname{ch} x$ függvény inverze, jelölése

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arch} x,$$

logaritmikus alakja pedig

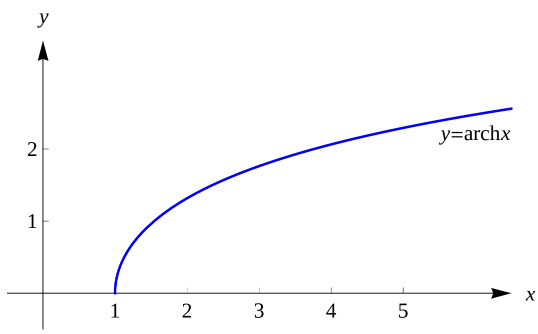
$$\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

1. Értelmezési tartománya: $D_f = [1, \infty)$.

2. Értékkészlete: $R_f = [0, \infty)$.

3. Nullahelye $x = 1$.

4. A függvény szigorúan monoton növekvő a teljes értelmezési tartományon.



Az *área tangens hiperbolikusz függvény* az

$$f(x) = \mathrm{th} x$$

függvény inverze, jelölése

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arth} x,$$

logaritmikus alakja pedig

$$\operatorname{arth} x = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

1. Értelmezési tartománya: $D_f = (-1, 1)$.

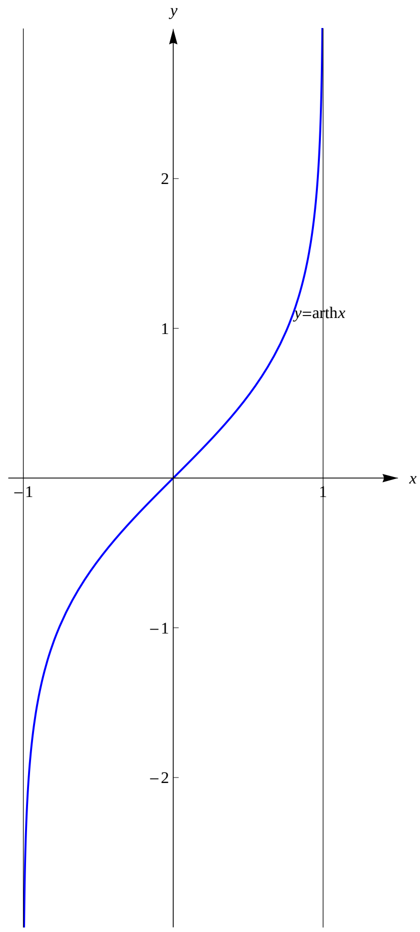
2. Értékkészlete: $R_f = \mathbf{R}$.

3. Nullahelye $x = 0$.

4. A függvény páratlan.

5. A függvény szigorúan monoton növekvő a teljes értelmezési tartományon.

6. Az $x = -1$ és az $x = 1$ egyenesek a függvény függőleges aszimptotái.



Az *área kotangens hiperbolikusz függvény* az $f(x) = \operatorname{cth} x$ függvény inverze, jelölése

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arcth} x,$$

logaritmikus alakja pedig

$$\operatorname{arcth} x = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

1. Értelmezési tartománya:
$D_f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

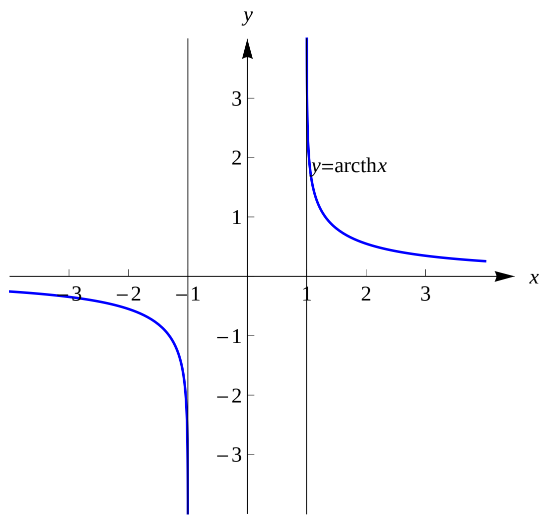
2. Értékkészlete: $R_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

3. Nullahelye nincs.

4. A függvény páratlan.

5. A függvény szigorúan monoton csökkenő a teljes értelmezési tartományon.

6. Az $x = -1$ és az $x = 1$ egyenesek a függvény függőleges aszimptotái.



1.3. Elemi függvények és transzformációik

Az *elemi alapfüggvények* csoportjába tartoznak a *konstans függvények*, a *hatványfüggvények*, az *exponenciális függvények*, a *logaritmusfüggvények*, a *trigonometrikus függvények* és a *ciklometrikus függvények*.

1.37. Definíció. 1^o *Az elemi alapfüggvények elemi függvények.*

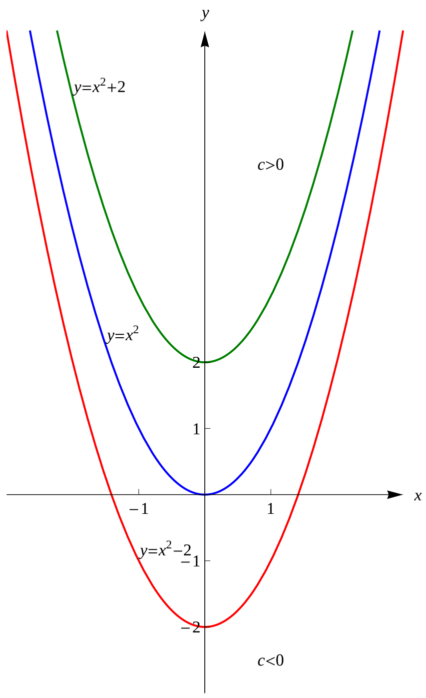
2^o *Ha f és g elemi függvények, akkor $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ és $f \circ g$ is elemi függvények (feltéve, hogy értelmezettek).*

3^o *Az elemi függvényeket az előző két szabály véges számú alkalmazásával kapjuk.*

Az elemi függvényeket feloszthatjuk *algebrai* és *transzcendens függvényekre*. Egy függvényt algebrai függvénynek nevezünk, ha számokból és az x változóból véges sok összeadás, szorzás, osztás és gyökvonás útján jön létre. Az algebrai függvényeket feloszthatjuk *racionális egész függvényekre (polinomokra)*, *racionális törtfüggvényekre* és *irracionális függvényekre (nem racionális algebrai függvényekre)*. A nem algebrai függvényeket *transzcendens függvényeknek* nevezzük. Transzcendens függvények az exponenciális függvények, logaritmusfüggvények, trigonometrikus függvények, ciklometrikus függvények, hiperbolikus függvények és az áreafüggvények.

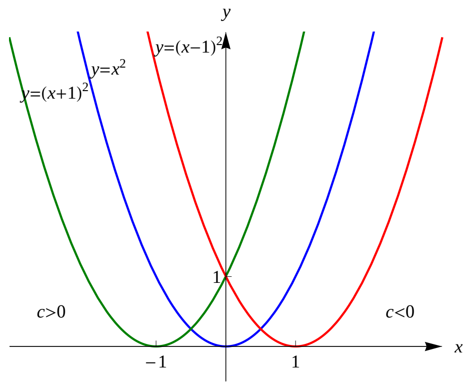
A következőkben megmutatunk négyféle elemi függvénytranszformációt.

1^o Az $y = f(x) + c$ függvénygrafikont az $y = f(x)$ grafikon y-tengely irányú $|c|$ távolságú transzlációjával jön létre. Ha $c > 0$, akkor a transzláció az y-tengely pozitív iránya felé történik. Ha $c < 0$, akkor a függvény grafikonját y-tengely negatív iránya felé toljuk.
Az alábbi ábrán az $y = x^2$ parabola két y-tengely irányú eltolása látható, az egyik pozitív, a másik negatív irányba.



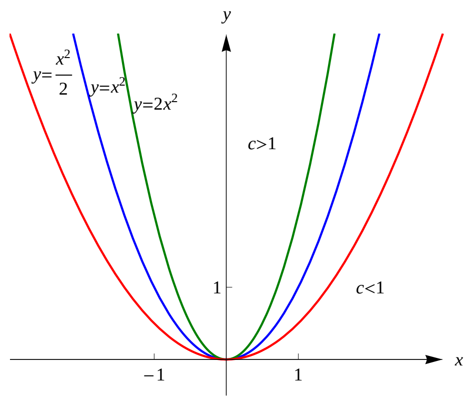
$$y = f(x) + c$$

2^o Az $y = f(x+c)$ függvénygrafikon az $y = f(x)$ grafikon x-tengely irányú $|c|$ távolságú transzlációjával jön létre. Ha $c > 0$, akkor a transzláció az x-tengely negatív iránya felé történik. Ha $c < 0$, akkor a függvény grafikonját x-tengely pozitív iránya felé toljuk. A mellékelt ábrán az $y = x^2$ parabola két x-tengely irányú transzlációja látható.



$$y = f(x+c)$$

3^o Az $y = c \cdot f(x)$ függvénytranszformációt az $y = f(x)$ függvényértékek $c \neq 0$ állandóval való szorzásával kapjuk. Az $y = c \cdot f(x)$ és $y = f(x)$ függvényeknek ugyanaz az értelmezési tartományuk és ugyanazok a nullahelyei. Pozitív konstans esetén a függvények előjele és monotonitása megegyezik, ha pedig a konstans negatív, akkor a függvények előjele és monotonitása ellentétes.

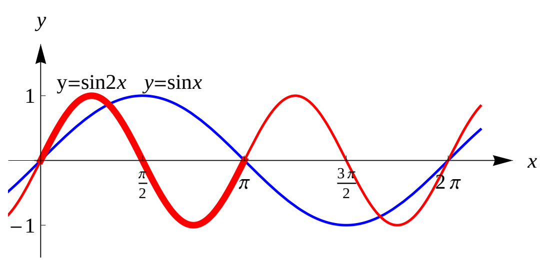


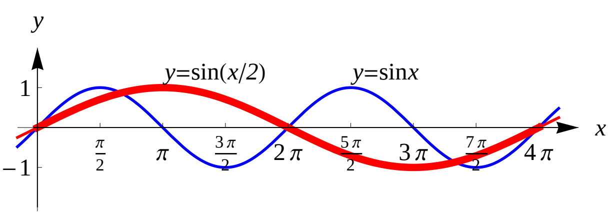
$$y = c \cdot f(x),\ c > 0$$

$c = -1$ esetén az $y = -f(x)$ függvénygrafikont az $y = f(x)$ grafikon x-tengelyre való tükrözésével kapjuk.

4^o A periodikus függvényeknél fontos a függvény független változójának konstanssal való szorzása. Ebben az esetben az $y = f(cx)$ transzformációról van szó. Ha ω az $y = f(x)$ függvény periódusa, akkor $\dfrac{\omega}{c}$ az $y = f(cx)$ függvény periódusa, ahol $c > 0$.

A következő ábrákon az $y = \sin x$ grafikonjának $y = \sin(2x)$ és $y = \sin\left(\dfrac{1}{2}x\right)$ függvénytranszformációi láthatók. Az $f(x) = \sin x$ függvény alapperiódusa $\omega_0 = 2\pi$, $y = \sin(2x)$ alapperiódusa $\omega_0 = \pi$, $y = \sin\left(\dfrac{1}{2}x\right)$ alapperiódusa pedig $\omega_0 = 4\pi$.





FELADATOK.

Függvénytranszformációk segítségével rajzoljuk meg a következő függvények grafikonjait.

1. $f(x) = -2(x-3)^2 + 2$

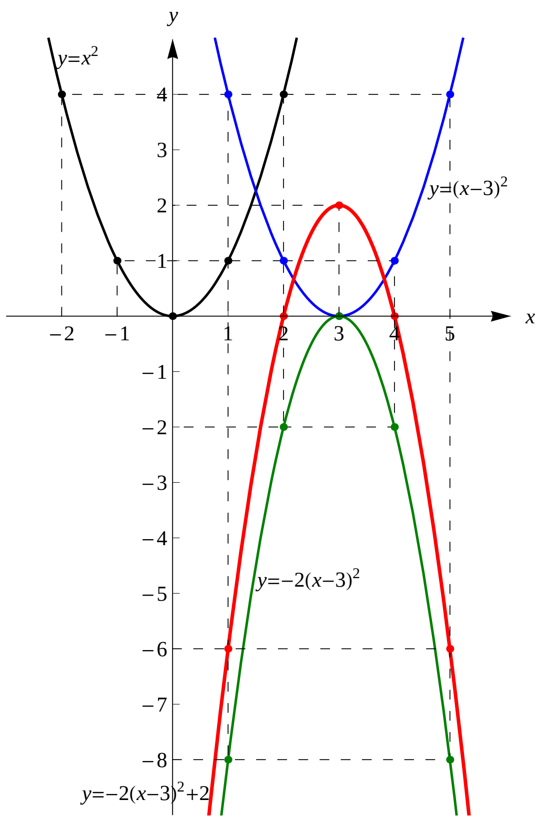
Megoldás. Ha az $y = x^2$ parabolát az x-tengely irányában jobbra toljuk 3 egységgel, akkor az

$$y = (x-3)^2$$

parabolát kapjuk. A megfelelő függvényértékeket -2-vel szorozva kapjuk az

$$y = -2(x-3)^2$$

grafikont. Az így kapott görbét y-tengely irányában 2 egységgel felfelé tolva megkapjuk a keresett másodfokú függvény grafikonját.



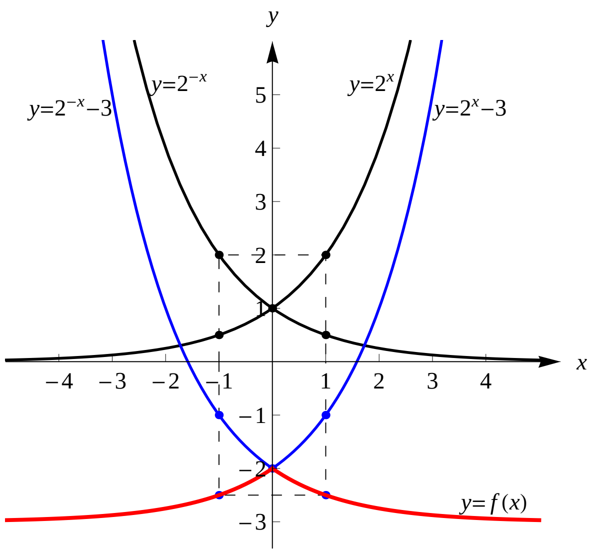
2. $f(x) = 4^{-\frac{\sqrt{x^2}}{2}} - 3$

Megoldás. Mivel

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0, \\ -x, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

és $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$, így az adott függvény felírható a következő alakban:

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 3, & \text{ha } x \geq 0, \\ 2^{x} - 3, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$



A grafikonját megrajzolhatnánk két értéktáblázat segítségével, vagy függvénytranszformációkkal a következőképpen. Legyenek $y = 2^{-x}$ és $y = 2^{x}$ a kiinduló görbék. Toljuk el mindkettőt az y-tengely irányában lefelé 3 egységgel. Az $y = 2^{-x} - 3$ görbéből válasszuk ki azt az ívet, amelyre $x \geq 0$, az $y = 2^{x} - 3$ görbéből pedig azt az ívet, amelyre $x < 0$. A két ív együttesen adja meg az $y = f(x)$ grafikont.

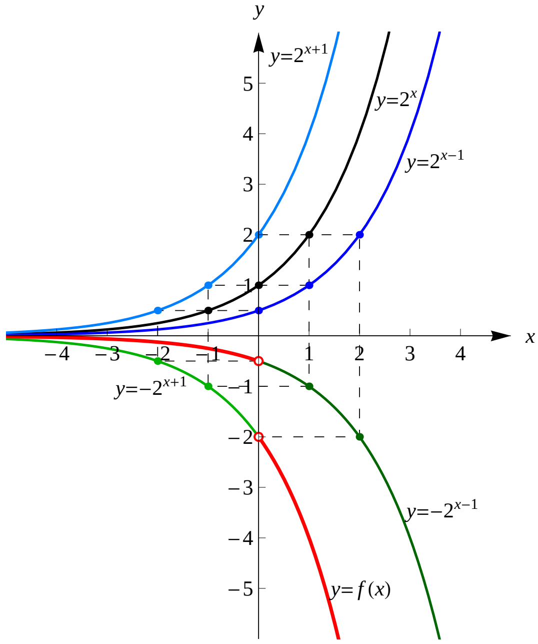
3. $f(x) = -2^{\frac{|x|}{x}+x}$

Megoldás. Vegyük észre, hogy az adott függvény $x = 0$-ban nem értelmezett. Írjuk fel abszolútérték nélkül az f függvényt. Mivel

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0, \\ -1, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

ezért

$$f(x) = \begin{cases} (-1) \cdot 2^{x+1}, & \text{ha } x > 0, \\ (-1) \cdot 2^{x-1}, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

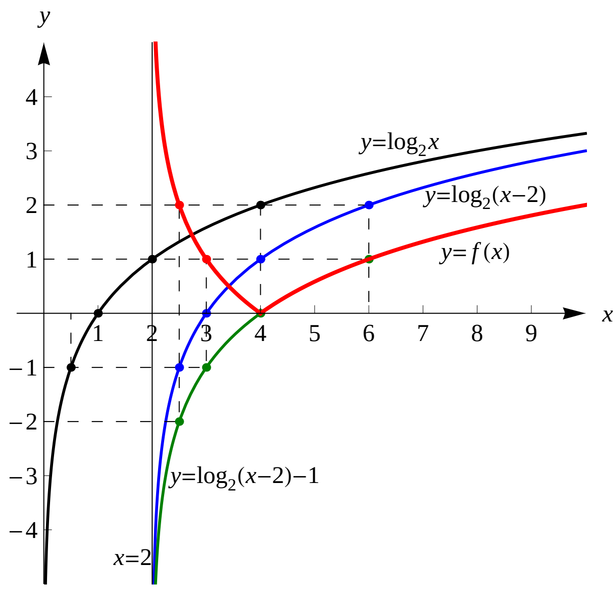


A függvény grafikonjának megrajzolásához induljunk ki az $y = 2^x$ grafikonjából. Egyik esetben ezt a görbét toljuk jobbra az x-tengely mentén 1 egységgel, a másik esetben pedig ugyanezt a görbét toljuk balra szintén 1 egységgel. A kapott görbéket a (-1)-gyel való szorzás miatt tükrözzük az x-tengelyhez viszonyítva. A balra mozdított görbéből válasszuk az $x > 0$-hoz tartozó ívet, a jobbra mozdított görbéből pedig az $x < 0$-hoz tartozó ívet.

4. $f(x) = |\log_2(x-2) - 1|$

Megoldás. A keresett függvény grafikonjához eljutunk, ha az $y = \log_2 x$ görbére függvénytranszformációkat alkalmazunk a következő sorrendben:

Először x-tengely irányában jobbra toljuk a görbét 2 egységgel, majd a kapott görbét y-tengely irányában toljuk lefelé 1 egységgel. Az abszolútérték miatt az így kapott grafikonnak azt a részét, amely az x-tengely alatt van tükrözzük a pozitív félsíkra az x-tengelyhez viszonyítva. Vegyük észre, hogy a függvény értelmezési tartománya $D_f = (2, \infty)$ és az $x = 2$ egyenes a függvény függőleges aszimptotája.



5. $f(x) = \left|\log_{\frac{1}{2}} |3 - x|\right|$

Megoldás. A függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbf{R} \setminus \{3\}$. Mivel

$$\log_{\frac{1}{2}} |3 - x| = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(x - 3), & \text{ha } x > 3, \\ \log_{\frac{1}{2}}(3 - x), & \text{ha } x < 3 \end{cases}$$

ezért az $y = \log_{\frac{1}{2}} |3 - x|$ függvénygrafikont megkaphatjuk, ha az $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ görbét jobbra toljuk az x-tengely irányában 3 egységgel, majd azt tükrözzük az $x = 3$ egyeneshez viszonyítva (a függvény $(x-3)$ argumentumának (-1)-gyel való szorzása miatt). A külső abszolút érték miatt mindkét görbének azt az ívét, amely a negatív félsíkhoz tartozik, tükrözzük a pozitív félsíkra. Így kapjuk meg az $y = f(x)$ függvénygrafikont.