Cofman Judit

FOGAS KÉRDÉSEK KOCKÁKRÓL ÉS MÉHSEJTEKRŐL, GÖMBÖKRŐL ÉS SZAPPANBUBORÉKOKRÓL

(EGY PILLANTÁS A MATEMATIKUSOK BOSZORKÁNYKONYHÁJÁBA)

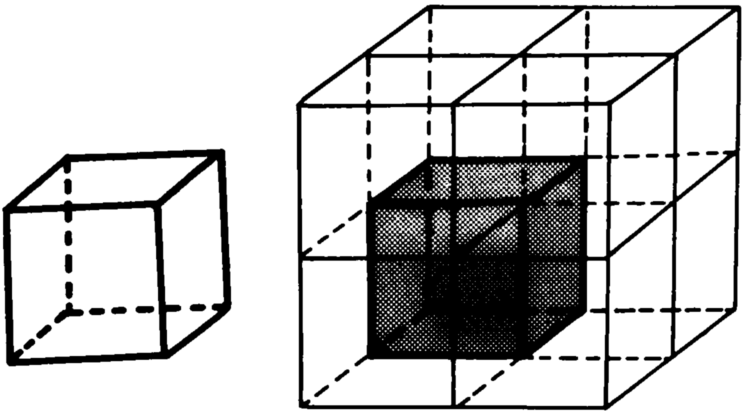
A matematikában egy csomó problémát olyan egyszerűen lehet ecsetelni, hogy lényegüket gyakran még a laikusok is megértik. Más lapra tartozik, hogy az effajta problémák zöme kemény diónak bizonyul: megoldásuk olykor évszázadokat (is) igényel. Ebben a cikkben ilyen problémákat mutatunk be a geometria berkeiből. Kockákról, méhsejtekről, gömbökről és szappanbuborékokról lesz szó – tehát olyan tárgyakról, melyekkel gyakran van alkalmunk találkozni. Cikkünk egyik célja kidomborítani a tényt, hogy számos, évezredek óta megszokott jelenség a matematikusok számára még mindig talányokat rejteget. Elgondolkoztató, hogy a matematikusok megszokott környezetüket mily kevéssé ismerik – s ez a megállapítás valószínűleg nem csak a matematikusokra vonatkozik.

I. A KOCKÁTÓL A MÉHSEJTIG

I.1. *A déloszi probléma*

A kocka már az ógörögöknek sok fejtörést okozott. A görögök kiváló matematikusok voltak, ettől eltekintve szerették a mitológiát. Az alábbi híres geometriai probléma eredetét is egy, az istenekről szóló legenda övezi:

Az időszámításunk előtti ötödik században Délosz szigetén nagyméretű pestisjárvány tombolt. A lakosok úgy vélték, hogy a nyavalyát az istenek küldték, akik valamilyen okból kifolyólag megharagudtak a népre. Követséget menesztettek a delphoi jósdába, megérdeklődni az ottani jóstól, hogyan lehetne kiengesztelni a haragosokat. A jós a következő választ adta: „Az istenek akkor fognak véget vetni a járványnak, ha a délosziak Apolló kocka alakú oltárának helyébe olyan új oltárt építenek, mely szintén kocka alakú, de az eredeti oltár duplája." – Az új oltár hamarosan el is készült, ennek dacára a betegség tovább terjedt. Vajon mi történt? Az istenek megfeledkeztek ígéretükről? Kiderült, hogy csupán a mestereket lehetett hibáztatni, akik az új oltárt úgy készítették, hogy az eredeti oltár éleit megduplázták. Ezáltal az új kocka térfogata az előzőénél nem kétszer, hanem nyolcszor lett nagyobb (1. ábra). Az istenek viszont azt kívánták, hogy az eredeti kocka térfogata, nem pedig az éle legyen megduplázva.



1. ábra

A legendából a görög matematikusok a következő geometriai problémát gyártották:

Szerkesszük meg, csupán vonalzó és körző segítségével egy olyan kocka élét, melynek térfogata egy adott kocka térfogatának kétszerese.

Ezt a feladatot, mely manapság déloszi probléma néven ismert, az ógörögök nem tudták megoldani, habár a geometriai szerkesztések terén kiváló eredményeket értek el. Neves tudósok, a következő évszázadok folyamán, sem jártak nagyobb sikerrel. A tizenkilencedik század első felében végül is kiderült, hogy a szerkesztést csak vonalzó és körző segítségével lehetetlen elvégezni. Ez a megállapítás azért váratott magára olyan sokáig, mert a modern algebra vívmányain alapszik, pontosabban szólva, Evarist Galois (1811–1832) zseniális matematikus elméletén az egyenletek megoldhatóságáról. A déloszi kocka szerkesztésének problémáját át lehetett ültetni az egyenletek nyelvére és megoldása ezután Galois tételeinek egyenes következményévé vált.

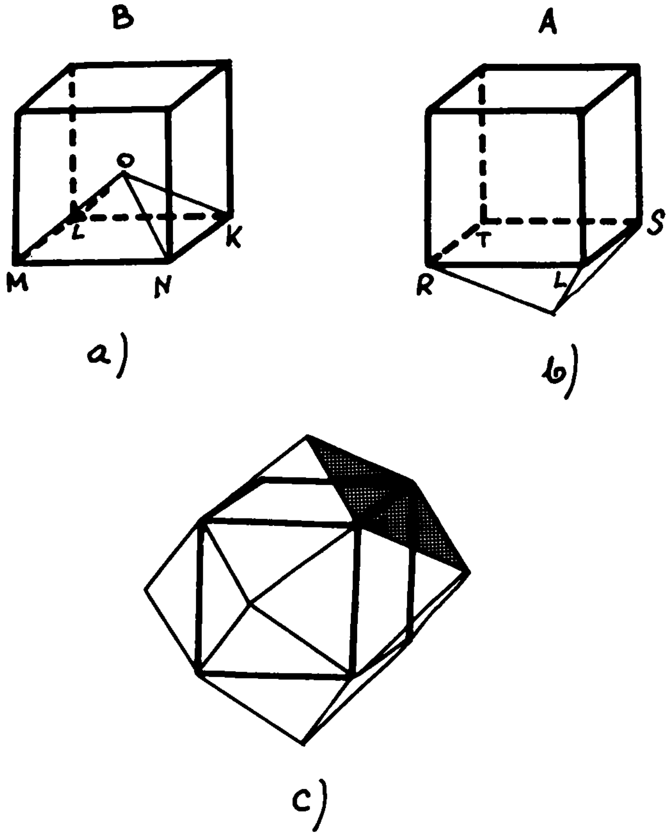
Az istenek követelményét tehát, a geometriai szabályok szerint, nem lehet teljesíteni. Emiatt azonban a matematikusok nem esnek kétségbe. Először is, a problémával kapcsolatos kutatások érdekes mellékeredményekhez vezettek. Ettől eltekintve, a kutatók egyik kedvenc foglalkozása bonyolult kérdéseket módosítani, „átgyúrni", újabb problémákat gyártva. Példának okáért a déloszi probléma a következő kérdést vethetné fel:

Létezik-e olyan, a kockától eltérő „figyelemreméltó" idom, melynek térfogata egy adott kocka térfogatánál kétszer nagyobb?

Erre a kérdésre adunk feleletet az alábbiakban.

I.2. *A rombdodekaéder, Kepler és a méhsejtek*

Vegyünk két egyenlő nagyságú kockát – nevezzük őket A-nak és B-nek. Ha a B kocka középpontját összekötjük a kocka egyik lapjának a csúcsaival, akkor egy négyzet alapú gúlát kapunk.



2. ábra

(A 2.a ábra egy ilyen gúlát ábrázol: alapja a kocka MNKL oldala, szemközti csúcsa a kocka középpontja, melyet O-val jelöltünk.) Hasonló módon kössük össze a B kocka O középpontját a kocka többi öt oldalának csúcsaival, úgy hogy további öt, az első gúlával egybevágó* gúlát kapjunk. Így a B kockát hat olyan gúlára daraboltuk szét, melyek mindegyikének köbtartalma a kocka köbtartalmának egyhatoda. Helyezzük most az MNKLO gúlát az A kockára kívülről, úgy hogy alapja fedje az A kocka egyik oldalát. (A 2.b ábra mutatja, hogyan helyeztük az M, N, K, L csúcsokat pontosan az A kocka P, B,

* Két idomot akkor nevezünk egybevágónak, ha egyszerűen szólva, nagyságuk és alakjuk is azonos.

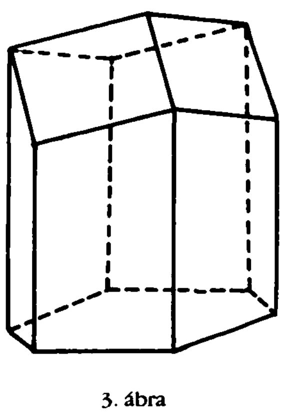
S illetve T csúcsai fölé.) Ha a B kocka többi öt, gúla alakú részét ugyanígy az A kocka egy-egy oldallapjára illesztjük, akkor a gúlák a közöttük fekvő A kockával együtt egy új idomot képeznek.

Az új idom köbtartalma az A kocka köbtartalmának kétszerese – szóval, ha nem is a klasszikus előírások szerint, de megdupláztuk a kockát. Nevezzük röviden az új idomot R-nek. R felülete huszonnégy háromszögből tevődik össze, a hat gúla mindegyike négy háromszögű oldallapjával járul a felülethez. Azonban R oldalainak száma nem huszonnégy, hanem tizenkettő, mert két-két olyan háromszögű gúlalap, mely az A kocka egy közös éléhez illeszkedik, egy sík négyszöget alkot. (A 2.c ábrán a tizenkét négyszög egyike árnyékolással van feltüntetve.) Görögül a tizenkét sík oldallal rendelkező idomokat dodekaédereknek nevezik. Az R dodekaéder oldalai olyan négyszögek, melyeknek élei egyenlő hosszúságúak; az ilyen négyszögeket rombuszoknak hívjuk. Emiatt R-nek a „hivatalos neve" rombdodekaéder.

Rombdodekaédert elsőnek Johann Kepler (1571–1650) szerkesztett, a csillagász, akit a bolygók pályáival kapcsolatos munkái tettek hírnevessé. Kepler észrevette, hogy egyenlő nagyságú rombdodekaéderekből térbeli mozaikot lehet készíteni, ami annyit jelent, hogy egybevágó rombdodekaédereket úgy lehet egymáshoz illeszteni, hogy az egyes idomok között ne maradjanak hézagok. Felfigyelve arra, hogy a méhsejtek is hézagok nélkül helyezkednek egymás mellé a lépben, Kepler egy rendkívül érdekes összefüggést sejtett meg a méhsejt és a rombdodekaéderek szerkezete között. Erről szólunk a következő szakaszban.

I.3. *A méhsejt kupolája*

Köztudomású, hogy a méhsejt alapja egy szabályos hatszög. Aki azonban azt hiszi, hogy a méhsejt egy hatszög alapú hasáb, az téved. A méhsejt ugyanis felülről nem egy hatszöggel van befedve, mint a hasáb, hanem egy kupolaszerű szerkezettel, amely három egybevágó, egy közös csúcsban összefutó rombuszból áll. (3. ábra)



3. ábra

Kepler szemügyre vette a rombdodekaéder csúcsaiban találkozó rombuszokat. A rombdodekaéder hat csúcsában négy-négy rombusz találkozik, míg az idom többi nyolc csúcsában három-három. (A 2. ábra mutatja, hogy az utóbbi csúcsok az A kocka csúcsai, az előbbiek az A-hoz illesztett gúlák csúcsai.) Nevezzük a rombdodekaédernek azt a részét, mely három, egy közös csúcson osztozkodó rombuszból áll, egy „rombuszhármas"-nak. Kepler azt gyanította, hogy a méhsejt kupolájában a rombuszok szögei, valamint a rombuszlapok közötti szögek pontosan akkorák, mint a rombdodekaéder rombuszhármasaiban. Más szóval, ha olyan rombdodekaédert szerkesztenénk, melynek élei akkorák, mint a méhsejt rombuszainak élei, akkor a rombdodekaéder bármely rombuszhármasát felcserélhetnénk a méhsejt kupolájával.

Keplernek ezt a sejtését a későbbi évtizedek folyamán mérések alapján be is lehetett bizonyítani; a méhsejtek geometriájával kapcsolatos kérdések azonban továbbra is foglalkoztatják a tudósokat.

II. EGYMÁSHOZ TAPADÓ MEREV GÖMBÖK ÉS SZAPPANBUBORÉKOK

II.1. *Egyenlő nagyságú gömbök érintkezése – egy probléma, amelyet Newton nem tudott megoldani*

Gömbökből nem lehet mozaikokat, azaz hézagmentes alakzatokat szerkeszteni. Ez a megállapítás a következő kérdéshez vezet:

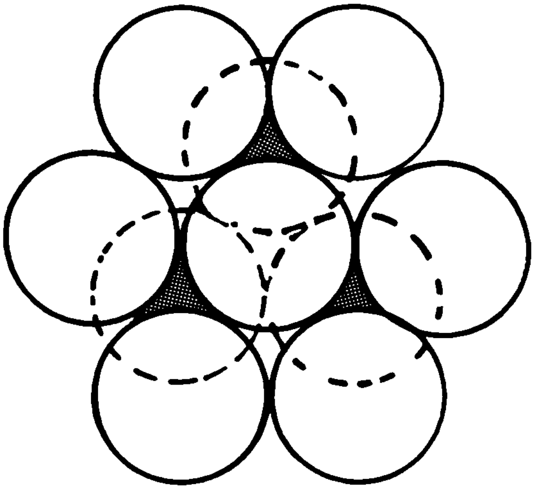
Hogyan lehet gömböket a lehető legszorosabban egymás mellé helyezni?

Ennek a kérdésnek több változata van. 1694-ben David Gregory (1627–1720) angol csillagász a következő problémáról vitatkozott Isaac Newtonnal (1643–1727), a kiváló fizikussal, matematikussal és csillagásszal:

Hány egyenlő nagyságú gömböt lehet egy ugyanolyan méretű, adott gömb köré helyezni úgy, hogy mindegyikük érintse az adott gömböt?

Könnyű belátni, hogy legalább tizenkét gömböt lehet ilyen módon az adott gömb köré csoportosítani. Ugyanis:

Helyezzünk egy asztalra egy sárga teniszlabdát, mint adott gömböt. A sárga labda köré hat ugyanakkora fehér teniszlabdát tudunk illeszteni úgy, hogy a fehér labdák mind érintsék a sárgát (4. ábra). Az asztalon fekvő hét labda között hat hézag adódik. Az ábrán minden második hézagot beárnyékoltunk. A „beárnyékolt hézagok" fölé egy-egy új fehér labdát tehetünk, melyek mindegyike érinti a sárga labdát. Ha ebben a két rétegből álló szerkezetben a labdákat egymáshoz ragasztjuk, akkor a szerkezetet fel tudjuk emelni az asztalról és a „beárnyékolt hézagok" alá is egy-egy újabb fehér labdát illeszthetünk. Íly módon a sárga labdát tizenkét, a labdát érintő labdával vettük körül.



4. ábra

Gregory úgy vélte, hogy a fenti szerkezetben a gömbök közötti hézagok túlságosan nagyok, és hogyha a tizenkét, a közbülső gömböt körülvevő gömböt óvatosan ide-oda tologatnánk, akkor a hézagok átformálásával egy olyan űrt tudnánk nyerni, amelybe egy, az előbbiekkel egyenlő nagyságú tizenharmadik gömböt tudnánk csúsztatni, amely szintén érintené a középső gömböt.

Newton kételkedett a tizenharmadik gömb létezésében, de állítását nem tudta bizonyítani.

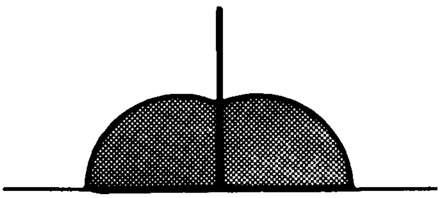
Newton és Gregory vitája 180 év múlva dőlt el, amikor is Reinhold Hoppe német matematikus kimutatta, hogy Newtonnak volt igaza:

Egy adott gömb köré nem lehet több mint 12, vele azonos nagyságú gömböt csoportosítani úgy, hogy mindegyikük érintse az adott gömböt.

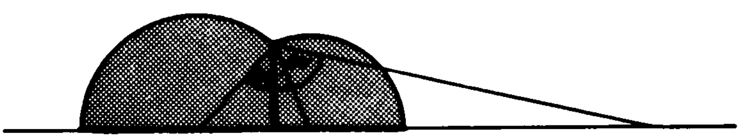
Kisméretű, egyenlő nagyságú gömbök elhelyezése nagy dobozokba egy másik rendkívül nehéz kérdés. Még mindig nem tudni, hogy kell a gömböket egymás mellé fektetni úgy, hogy a lehető legtöbb férjen be a dobozba. Erről a kérdésről, és egy csomó vele kapcsolatos problémáról Fejes-Tóth László, kortárs magyar matematikus írt jelentős cikkeket és monográfiákat. A gömbök elhelyezkedési problémái a fizikában (például a kristályok tanulmányozásánál), a biológiában és a vegytanban is fontos szerepet játszanak.

II.2. *Szomszédos szappanbuborékok*

A szappanbuborékok felülete elasztikus; ennek a jelenségnek az az egyik következménye, hogy más testekkel való érintkezéskor a buborékok felülete megváltozik. Például, ha egy szappanbuborékot – amely eredetileg egy gömb – egy nedves üveglapra helyezünk, akkor a gömb alsó része belapul, és a buborékból egy félgömb lesz. Ha két szappanbuborékot helyezünk egymáshoz közel a nedves üveglapra, akkor a buborékok, attól eltekintve, hogy félgömb alakot vesznek fel, csúszni kezdenek egymás felé, amíg össze nem tapadnak. Érdekes megvizsgálni a tapadási felületet:



a)



b)

5. ábra

Abban az esetben, ha a szappanbuborékok egyforma nagyságúak, az összetapadt buborékok közös fala egy félkör alakú felület (5.a ábra). Ha azonban a buborékok különböző nagságúak, akkor a közös faluk kidomborodik és behatol a nagyobb buborék belsejébe. Ez a jelenség avval magyarázható, hogy a kisebb buborék belsejében nagyobb a nyomás, mint a nagyobb buborékban. A közös fal ebben az esetben egy gömbnek a része, melynek középpontja a buborékokon kívül van, úgy ahogy ezt az 5.b ábra mutatja. Az ábrán feltüntetett szögek a közös ponton áthaladó sugarak között minden egyes esetben 60-60 fokosak. Az egymáshoz tapadt buborékok felülete, a közös választófalét is beleértve, kisebb mint a különálló buborékok felületeinek összege. Ha több szappanbuborék tapad egymáshoz, a közös válaszfalak bonyolult szerkezete érdekes geometriai problémákat tár fel és új ötleteket ad a matematikusoknak görbe felületek tonulmányozásához.

A szappanbuborékokra vonatkozó eredmények java része J. A. F. Plateau, múlt századbeli belga fizikustól származik. Plateau élete derekán megvakult; utána több mint harminc éven át kísérleteit munkatársai szemével követte. Úgy is mondhatnánk, hogy Plateau látott, habár nem tudott nézni. – Manapság, a televízió és egyéb szórakoztató és oktató vizuális segédeszközök korában, el lehet töprengeni a fordított helyzeten: vajon mennyit vagyunk képesek látni, azaz észrevenni mindabból, amit nézünk? Evvel, a körkérdésnek is beillő megjegyzéssel teszünk pontot mondandónk végére.

Rezime

Kocke, ćelije saća, sfere i sapunski mehurići kroz oči matematičara

Cilj ovoga članka je da podseti čitaoca na niz čuvenih klasičnih problema iz oblasti geometrije, čije je rešavanje vekovima okupiralo istaknute umove. Podvlači se činjenica, da je prostor u kome živimo, bolje rečeno, naša svakodnevna okolina sa uobičajenim objektima, kao što su kocke, ili lopte, za matematičare (a naravno i za ne-matematičare) još uvek prepuna zagonetki.

Summary

On the Geometry of Cubes, Honey Bee Cells, Spheres and Soap Bubbles

The aim of this article is to describe a selection of famous geometrical problems, whose solution has occupied mathematicians throughout decades, and even centuries. It is a thought-provoking fact that in our familiar daily surroundings mathematicians (and, naturally, non-mathematicians as well) continue to be faced with open questions and „myteries".