Original scientific paper

Mészáros Katalin–Szórád György

OPTIMUMSZÁMÍTÁS A NEMLINEÁRIS PROGRAMOZÁS EGY SPECIÁLIS ESETÉBEN

---

1. BEVEZETÉS

A matematikai programozás leggyakrabban és legsikeresebben alkalmazott ága a lineáris programozás. Amíg a lineáris optimumszámítási feladatok megoldására a szimplex módszer tökéletes eljárásnak bizonyult, addig a nemlineáris feladatok megoldására ilyen univerzális módszer nem létezik. Sok különböző eljárást fejlesztettek ki, ezek azonban a feladatokat mindig speciális szempontok szerint vizsgálják. A feltételek és a célfüggvény jellege miatt a különböző eljárások alkalmazásánál nehézségek adódhatnak. A nehézségek elkerülése végett először is meg kell kísérelni a nemlineáris optimumszámítási feladat viszszavezetését lineáris programozási feladatra. Megkísérelhető a nemlineáris optimumszámítási feladat visszavezetése feltétel nélküli probléma szélső értékének meghatározására is. A nemlineáris optimumszámítási feladatok nagy részének megoldásakor mégis a különböző speciális eljárásokat kell igénybe vennünk, melyek egyike a hatékony irányok módszere.

2. A HATÉKONY IRÁNYOK MÓDSZERE

A hatékony irányok módszerének számos változata ismeretes. A célfüggvény és a feltételek jellegétől függően dönthetünk egyik vagy másik változat alkalmazása mellett.

A jelen dolgozat célja, hogy áttekintést adjon e módszer lineáris feltételek melletti változatáról.

2.1 Elméleti alapvetés

Legyen a $\varphi(x)$ függvény valamely S nyílt konvex halmaz minden belső pontjában folytonosan deriválható minden változója szerint ($\varphi(x) \in C_1$). A parciális deriváltokból felépített

$$\varphi'(x)=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right]$$

vektor a gradiens vektor.

Közgazdasági alkalmazásokban a gradiens vektor kiemelkedő fontosságú, komponenseit marginális értékeknek szokás nevezni. Amennyiben a $\varphi(x)$ függvény az x programhoz tartozó hatékonyságot, akkor a $\varphi'(x)$ függvény a marginális hatékonyságot mutatja. Ha pedig a $\varphi(x)$ függvény termelési függvény, akkor a $\varphi'(x)$ függvény marginális termelékenységet jelent, de beszélhetünk marginális költségekről, marginális ráfordításokról stb. Egyszóval a gradiensvektor közgazdasági értelmezése lényeges. Az általa meghatározott irány a legalkalmasabb a hatékonyság növelésére.

Az S nyílt konvex halmaz a pontjához tartozó irányt hatékony iránynak nevezzük, ha $\varphi'(a)=g\neq 0$ és $r\neq 0$ *esetén* $g^{*}\cdot r>0$. E megfogalmazásból következik, ha a gradiens nem zérusvektor, maga a gradiensvektor is hatékony irányt képvisel. Bebizonyítható, hogy az adott feltételek kielégítése mellett is mindig található olyan pont, amelyhez nem tartozik hatékony irány, mert rögtön kivezet a lehetséges megoldások halmazából.

Az előbbiekben megfogalmazott $\varphi(x)$ függvény globális maximumát a lehetséges megoldások halmazának valamely stacionárius pontjában érheti csak el. Éppen ezért a stacionárius pont meghatározása számos optimumszámítási módszer célja. Ilyen a hatékony irányok módszere is. Fontos eldönteni, mikor jelent a stacionáris pont optimális megoldást.

Bizonyíthatók* a következő állítások:

Konkáv célfüggvény esetén minden stacionárius pont egyúttal globális maximum is.

Kvázikonkáv célfüggvény esetén a stacionárius pont akkor jelent globális maximumot, ha a hozzátartozó gradiensvektornak legalább egyik komponense különbözik a nullától.

A fenti állítások elégséges (de nem szükséges) kritériumokat szolgáltatnak a stacionárius pont globális maximum voltáról.

2.2 A hatékony irányok módszere feltétel nélküli feladatnál

Az optimális megoldást egy tetszőleges x^1 pontból kiindulva kapjuk meg. A k-adik lépésben a $\varphi'(x^k)$ gradiens irányában haladunk az x^{k+1} pontig, ahol a célfüggvény ebben az irányban maximális, innen a $\varphi'(x^{k+1})$ irányban az x^{k+2} pontig és így tovább. Így egy olyan pontsorozathoz jutunk $x^1, \ldots\ldots, x^k, x^{k+1}, x^{k+2}, \ldots$ amelynél a hozzátartozó függvényértékek szigorúan nőnek.

* A bizonyítás az [1] 71–72. oldalán találhatók.

2.3 A hatékony irányok módszere feltételes optimumszámítási feladatnál

Ismét a lehetséges megoldások egy x^1 belső pontjából indulunk el a $\varphi'(x^1)$ irányába, s eljutunk egy a lehetséges megoldások halmazának határán lévő x^2 pontig. Ekkor fennálhat az az eset, hogy x^2 nem megoldása a feladatnak, $\varphi(x^2)$ pedig a lehetséges megoldások halmazából kifelé mutat.

A fenti és más nehézségek elkerülése végett a feladatokat kategorizálni kell, s eszerint megkülönböztethető a hatékony irányok módszerének alkalmazása lineáris és nemlineáris mellékfeltételek esetén.

3. A HATÉKONY IRÁNYOK MÓDSZERE KVÁZIKONKÁV CÉLFÜGGVÉNY ÉS LINEÁRIS MELLÉKFELTÉTELEK ESETÉBEN

A megoldandó feladat általános megfogalmazása

$$\max \{f(x) \mid x \geq 0,\ Ax \leq b\}, \text{ ahol } f(x) \in V_q{}^2$$

Bevezetve az

$$A' = \left[\frac{-E}{A}\right] \quad \text{és} \quad b' = \left[\frac{O}{b}\right]$$

jelöléseket, feladatunk a következő alakot ölti:

$$\max \quad \{f(x) \mid A'x \leq b'\}.$$

Legyen a kiinduló pontunk x^1. A hozzátartozó gradiens vektor $g(x) = f'(x^1)$. Hatékony irányról az x_1 pontban akkor beszélhetünk, ha $f'(x^1) \neq 0$. Amennyiben $f'(x^1) = 0$, akkor az x_1 stacionárius pontot jelent, s az algoritmus folytatására nincs szükség. Ha $f'(x^1) \neq 0$, akkor egy $-1 \leq r \leq 1$ lehetséges irány mentén haladunk. Amennyiben a feltételeket a következő módon csoportosítjuk:

$$A_1 x^1 < b_1$$
$$A_2 x^1 < b_2,$$

akkor bebizonyítható, hogy a hatékony irányokat képező r vektorok az

$$A_1 r \leq 0$$

egyenlőtlenséget is kielégítik. Innen következik, hogy a hatékony irány meghatározása ekvivalens a következő lineáris programozási feladat megoldásával:

$$g^x(x^1)xr \rightarrow \max$$

ha

[2] Mint ismerestes, V_q a kvázikonkáv függvények halmazát jelenti.

$$-1 \leq r \leq 1$$
$$A_1 r \leq 0$$

A vázolt feladat mindig megoldható. Jelölje r^1 az optimális megoldást, amely a következő célfüggvény értékeket biztosíthatja

$$1)\ g^x(x^1)r^1 = 0$$
$$2)\ g^x(x^1)r^1 > 0$$

Az 1) esetben x^1-hez nem tartozik hatékony irány, azaz x^1 stacionárius pont. A 2) esetben r^1-nek megfelelő irányban növelhető a hatékonyság. Az elmozdulás mértékét λ azon maximális értéke képezi, amely mellett még teljesül az $A'(x^1+\lambda r^1) \leq b'$ egyenlőtlenség. Következik az eljárás megismétlése az $x^2 = x^1 + \lambda r^1$ pontra. E pont már jobb eredményt ad az előbbinél. Az algoritmus stacionárius pontot szolgáltat, amely konkáv célfüggvény esetén optimális megoldást jelent, kvázikonkáv célfüggvény esetén csak nemzérus gradiensvektorral rendelkező stacionárius pont jelent egyben globális maximumot is.

3.1 Néhány megjegyzés a hatékony irányok módszerével kapcsolatban

1) A hatékony irányok módszerénél a lépések száma nem mindig véges. Ebben az esetben is tetszőlegesen jó megoldás birtokába juthatunk, amennyiben elegendő nagy számú lépést hajtottunk végre.
2) A hatékony irányok módszerét szélesebb területen alkalmazhatjuk mint a szimplex módszert.
3) A hatékony irányok módszere igen számításigényes módszer.
4) Amennyiben a célfüggvény nem konkáv és nem is kvázikonkáv, külön vizsgálat szükséges annak eldöntéséhez, vajon a kapott stacionárius pont egyúttal optimális megoldás-e.

4. ÖSSZEFOGLALÓ

Az optimumszámítási feladatok köre igen tág. Megoldásukra szolgáló módszerek nem léteznek minden esetben. A hatékony irányok módszere a feladatok egy széles osztályának elméleti megoldására alkalmas. Bizonyos esetekben azonban igen számításigényes eljárás. Ezért, ha lehetőség van a szimplex módszerrel történő megoldásra is, az mellett kell dönteni. A hatékony irányok módszerének előnyei akkor jutnak kifejezésre, ha a probléma megoldására a szimplex módszer nem alkalmas.

Irodalom

[1] Krekó Béla: Optimumszámítás, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1972
[2] V. Kovačević, M. Ašić: Matematičko programiranje, Matematički institut, 1980
[3] Közgazdasági operációkutatási alkalmazások, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1976

Rezime

Optimiranje u slučaju specijalnog problema nelinearnog programiranja

Skup problema optimiranja je veoma prostran. Metodi za rešavanje ne egzistiraju u svakom slučaju. Metod efektivnih pravaca je pogodan za teorijsko rešavanje široke klase problema. Međutim, u nekim slučajevima iziskuje veoma mnogo računanja. Zbog toga kada je to moguće primenjuje se simpleks metod. Prednosti metoda efektivnih pravaca dolaze do izražaja kada simpleks metod ne rešava postavljeni problem.

Summary

Optimization in a Special Case of Non-Linear Programming

The field of optimization problems is very wide. Methods for solving these problems don't exist for all cases. The method of effective directions is suitable for theoretical solving the wide class of problems. However, it requires too much calculation in some cases. That's why the simpleks method is applied when it's possible. The method of effective directions is preferred when the simplex method can not solve the given problem.