Csüllög Mária

A DUALITÁS KÉRDÉSEI A LINEÁRIS PROGRAMOZÁSBAN – A DUÁLIS PROBLÉMA KÖZGAZDASÁGI ÉRTELMEZÉSE

1. BEVEZETÉS

A mai gazdasági helyzetben, a gazdaságszilárdítás időszakában a legjobb, legcélszerűbb megoldások meglelése, mind a gazdasági, mind a társadalmi élet egyéb szféráiban nagyjelentőségű s ezért munkánk tárgya is a lineáris modell duálisa, valamint a duális probléma közgazdasági értelmezése. Ez a téma több okból is időszerű. Először is, a gyakorlatban nem alkalmazzák kielégítő mértékben a lineáris programozást, a nem lineárisat még kevésbé. Ennek több oka is van, de egyik sem bizonyíthatja, hogy a lineáris programozást nem lehet, vagy nem célszerű alkalmazni. A lineáris programozás ugyanis a tervezés intuitív módszereihez viszonyítva jelentős haladást jelent.

A lineáris programozás legfőbb fogyatékossága a módszer statikus jellege, vagyis az a feltételezés, hogy a vizsgált probléma összes paramétere állandó és ismert. Ez a fogyatékosság bizonyos mértékben csökkenthető a megfelelő duális probléma elemzésével, valamint a duális változók közgazdasági értelmezésével. Elemzésünk célja, hogy rámutassunk arra, hogyan kaphatunk csupán a duális probléma értelmezésével – tehát minden további munka nélkül – több információt a vizsgált problémáról. Célunk a kapott eredmények gyakorlati alkalmazhatóságának elemzése is.

2. DUÁLIS PROBLÉMA

A lineáris programozás elméletében a dualitásnak igen fontos szerepe van. Közgazdasági szempontból a dualitás azt jelenti, hogy minden termelési folyamattal egyidejűleg, és el nem választható módon, megjelenik az értékelési folyamat is. A termelési folyamatban a cél a maximális hatékonyság, a duális problémában, vagyis az értékelési folyamatban pedig olyan értékrendszer kialakítása, amely az előírt hatékonysági szintet minimális ráfordítással éri el. Ez azt jelenti, hogy minden maximum problémához hozzárendelhetünk egy minimum problémát, és fordítva. A kiinduló modellt primáris, a hozzáren-

delt modellt pedig duális problémának nevezzük. Ezeknek a problémáknak az általános alakja a következő:
A primáris probléma:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} \geqslant \mathbf{o} \\ &\mathbf{A}\,\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b} \\ &\mathbf{c}^*\,\mathbf{x} = \mathbf{z} \rightarrow \max \end{aligned}$$

A duális probléma:

$$\begin{aligned} &\mathbf{d}^* \geqslant \mathbf{o}^* \\ &\mathbf{d}^*\,\mathbf{A} \geqslant \mathbf{c}^* \\ &\mathbf{d}^*\mathbf{b} = \mathbf{v} \rightarrow \min \end{aligned}$$

Ezekben a kifejezésekben
$\mathbf{x}$ a primáris változók vektora
$\mathbf{A}$ ráfordítás mátrix
$\mathbf{c}^*$ a primáris változókhoz rendelt hatékonyság vektor
$\mathbf{b}$ a rendelkezésre álló erőforrások vektora.

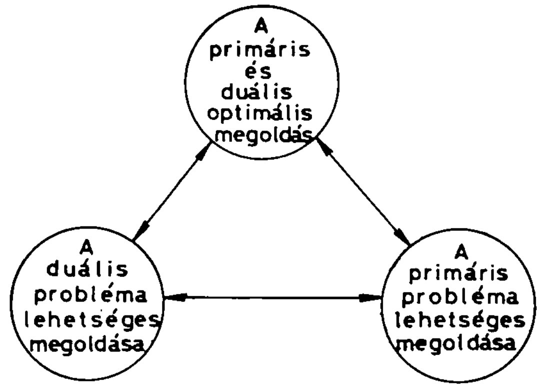
Láthatjuk, hogy a primáris és duális modellben ugyanazok az állandók szerepelnek, mégpedig az $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ és a $\mathbf{c}^*$
A primáris és duális modell összefüggésének elemzését először is néhány tétel felsorolásával kezdjük[1]:

a) A duális probléma duálja a primáris probléma. Ezért nem lényeges, hogy melyik modellt kezeljük primárisként.

b) A primáris probléma $\mathbf{x}$ lehetséges megoldásának megfelelő $\mathbf{z}$ célfüggvény érték kisebb vagy egyenlő a duális probléma $\mathbf{d}^*$ megoldásának megfelelő célfüggvény értékkel, vagyis érvényes a következő reláció:

$$\mathbf{c}^*\mathbf{x} \leqslant \mathbf{d}^*\mathbf{b}$$

c) Csak akkor van a problémának optimális megoldása, ha a primárisnak és a duálisnak is van lehetséges megoldása. Fordítva is érvényes ez a tény, ami azt jelenti, hogy ha van mindkét problémának lehetséges megoldása, akkor biztos, hogy van optimális megoldás is. Tulajdonképpen a primár- és duál-optimum nem választható külön, és külön-külön nem is egzisztálnak. Ezt a tényt a következő módon ábrázolhatjuk:



A fenti zárt láncnak vagy minden része megvan, vagy legkevesebb két láncszem hiányzik.

d) Ha a $\mathbf{x}_0$ a primáris probléma, illetve a $\mathbf{d}_0^*$ a duális probléma olyan megoldása, hogy értékeikre érvényesül a

$$\mathbf{c}^*\mathbf{x}_0 = \mathbf{d}_0^*\mathbf{b}$$

egyenlőség, akkor az $\mathbf{x}_0$ a primáris- a $\mathbf{d}_0^*$ pedig a duális probléma optimális megoldása.

e) Ha a primáris problémának alternatív optimuma van, a duális probléma degenerált, és fordítva.

f) A duális modell annyi változót tartalmaz, ahány korlátja van a primáris modellnek, vagyis a primáris minden korlátjához egy duális változót rendelünk. Külön eset az egyenlőség korlát; ugyanis ehhez úgynevezett mesterséges változót rendelünk, amelyikre nem vonatkozik a nemnegativitási feltétel.

3. A DUÁLIS MODELL KÖZGAZDASÁGI ÉRTELMEZÉSE

A duális modell felállítása és megoldása nem jelent külön problémát sem gyakorlati, sem elméleti szempontból. Hiszen a duális modell megoldását a primáris modell megoldásával egyidejűleg megkapjuk. Nehézséget a duális feladat feltételrendszerének és változóinak közgazdasági értelmezése jelent. Valójában minden gyakorlatban felemerülő feladatnál külön, fokozott figyelemmel meg kell vizsgálni ezt a kérdést, elemezni, és csak azután adni meg a gyakorlat szempontjából is hasznos közgazdasági értelmezést.

3.1. *A normál maximum feladat duálisa*

A normál maximum probléma korlátozó feltételei a rendelkezésre álló erőforrásokra vonatkoznak, míg a célfüggvény a maximalizálandó hatékonyságot

tartalmazza. Már említettük, hogy minden primáris korláthoz hozzárendelünk egy duális változót, amiből az következik, hogy minden egyes duál korlát egy-egy primáris változóra vonatkozik.
Mind a primáris, mind a duális modellben a műszaki együttható az egységnyi ráfordítást mutatja, a duális ár, vagyis a duális változó pedig az adott forrás egységnyi árát.
A duális modell j-edik korlátja a primáris probléma j-edik változójára vonatkozik és a következő formában írható fel:

$$a_{1j}d_1 + a_{2j}d_2 + \ldots + a_{nj}d_n \geq c_j.$$

A primáris és duális modellben is a korlát bal oldala a megvalósított helyzetet mutatja. A primáris probléma esetében a kihasznált erőforrásról van szó, a duális problémánál pedig arról, hogy egy primáris változónak mennyi a relatív önköltségi ára. Ez nem egy olyan önköltségi ár, ami azt mutatja, hogy egy egységnyi termékben mennyi a tárgyiasult munka mennyisége, hanem a következőkről van szó:

A primáris változó csak akkor kerül a programba, ha az érték kiegyenlítődik a megvalósított haszonnal. Vagyis, a j-edik primáris változó csak akkor kerül be a programba, ha a duális probléma j-edik korlátja egyenlőség formában valósul meg. Az a változó, amelyiknél a duál korlát bal oldala nagyobb a jobbnál, nem kerül a programba. Szóval, ha a befektetett érték nagyobb, mint a megvalósított haszon, a változó a bázison kívül marad. Tulajdonképpen a duális korlát jobb oldala felfogható egy kritériumként, illetve célként.

A modell megoldásával megkapjuk az úgynevezett kiegészítő változók értékeit is. Ezek a változók mutatják a duál korlát bal és jobb oldala közötti különbséget. Ha a kiegészítő változó értékét nullára csökkentjük a jobb oldal növelésével, (ez a növelés természetesen egyenlő a kiegészítő változó értékével), de a többi korlátot nem változtatjuk, a duál probléma degeneránttá válik. Ez egyben azt jelenti, hogy a primáris problémának alternatív megoldása lesz, illetve a duál korláthoz tartozó változó bekerülhet a programba.
Ez úgy is értelmezhető, hogy, ha lehetséges az adott termék elfogadható értékesítési szintjét emelni annyival, amennyi a duál korlát bal oldala, a termék a programba kerülhet.

Tehát a duál problémát értelmezhetjük egy társadalmi értékmérlegként, amiben a korlátok az egyes termékekre vonatkoznak és meghatározzák az előállítási költségszintet, amennyiben ez a szint elérhető, a termék az optimális programba kerül, illetve, ha ez a szint nem érhető el, a termék a programon kívül marad. A duális célfüggvény az előállítási költségeket tartalmazza és logikus cél a függvény minimuma. Nem logikával ellentétes a duális korlát, ellenkezőleg, a közgazdasági gyakorlatban nagyon is elfogadható: hisz egy terméket bármilyen magas költséggel nem probléma előállítani ha van elegendő kapacitás, sokkal nagyobb probléma ezeket a költségeket egy elfogadható alacsony szintre csökkenteni. Gondoljunk csak a hazai termék külföldön való értékesítésére! Miért nem kifizetődő a kivitel? A világpiacon nem az a költségkritérium érvényes, mint a hazai piacon, illetve a termékek zöménél nem tudtuk elérni a világpiaci költségszintet – termékeink túl drágák. Itt az a kérdés, hogy miként érhető el a szükséges szint – a technikai együtthatók, vagy a duális árak csökkentésével. Ha a termelési folyamatból és a duális árak értelmezéséből indulunk ki, magától értetődő, hogy mindenekelőtt a technikai együtthatókat kell csökkenteni (vagyis a ráfordításokat), ugyanis valószínű, hogy a világpiacon a duális ár is adott (azaz az erőforrás egységnyi ára). A meghatározott duális ár tovább hatványozza a költségproblémát.

3.2. *A minimum probléma duálisa*

A minimum probléma duálisának közgazdasági értelmezését egy általános példán keresztül mutatjuk be.
A primáris modell egy keverék problémát tartalmaz. Az x_j az egyes nyersanyagok mennyiségét, a c_j a nyersanyagok egységnyi árát, az a_{ij} pedig a j-edik nyersanyag egy egységében levő i-edik hatóanyag tartalmat mutatja. A primáris modell egy olyan keverék összeállítását szorgalmazza, amelyben a költségek minimálisak és a keverék az előírt minimális hatóanyag szintet (b_i) eléri.
Szimbólumokkal a modell a következő:

$$x_j \geqq o \qquad j = 1,2, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j \geqq b_i \qquad i = 1,2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_jx_j = v \rightarrow \min$$

A megfelelő duális probléma pedig:

$$d_i \geqq o \qquad i = 1,2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} d_ia_{ij} \leqq c_j \qquad j = 1,2, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_i d_i = z \rightarrow \max$$

Ebben az esetben a d_i duális változó az i-edik hatóanyag egységnyi árát mutatja. A duális követelmény pedig az, hogy a hatóanyagoknak olyan áruk legyen, hogy a j-edik nyersanyag ára nagyobb legyen a nyersanyagban levő hatóanyagok értékénél. A duális cél pedig a keverék maximális hatóanyag-értéke.
A primáris problémát a keveréket előállító részleg probémájának tekinthetjük – érthető, hogy a gyártó célja a felhasznált nyersanyagok minimális összeköltsége. A duális modell az eladó szempontjából mutatja be a problémát. Realizáció-

ról lévén szó, célként, automatikusan, a legmagasabb árbevétel merül fel. Ebben az esetben a megfelelő árbevétel a hatóanyagok értékesítésével érhető el. Mind a primáris, mind a duális probléma optimuma az a pont, amelyben a nyersanyagok költségszintje kiegyenlítődik a hatóanyagok értékével.

3.3. *A duális árak közgazdasági értelmezésének néhány lehetősége*

A duális modell elemzésénél feltétlenül felmerül a duális árak, más szóval árnyékárak, illetve marginális árak közgazdasági értelmezése.

Maximum probléma – kisebb egyenlő korlát

A teljes egészében kihasznált kapacitáshoz pozitív marginális ár fűződik. Ez a pozitív marginális ár azt mutatja, hogy ha az adott kapacitást egy egységgel növeljük, hány egységgel növekszik a célfüggvény értéke. Az itt felmerülő kérdés az, hogy egy ilyen korlát minden esetben növelhető-e, illetve minden növelés meghozza-e a marginális árral való célfüggvény-növekedést. Továbbá az is vizsgálandó, hogy érvényes-e a marginális ár az ellenkező irányban is, vagyis a jobb oldal csökkenése csökkenti-e a célfüggvény értékét, vagy esetleg programváltozást eredményez valamely más szűk garat miatt. A kihasználatlan kapacitás marginális ára nulla, ami azt jelenti, hogy az ilyen kapacitás növelése és bizonyos kereteken belüli csökkentése nem hat ki a célfüggvényre.

Maximum probléma – nagyobb egyenlő korlát

Amennyiben egy nagyobb egyenlő korlát egyenlőség formában valósul meg, akkor a programra negatívan ható korláttal állunk szemben. Ugyanis, ha a korlát pozitívan hatna ki az optimumra, akkor nagyobb egyenlő alakban valósulna meg. Vegyünk erre egy egyszerű példát! Tegyük fel, hogy az A termékből, a kötött szerződések miatt legkevesebb 1000 darabot kell termelni. Ha az optimális progamban pontosan 1000 darab van az A termékből, az azt jelenti, hogy az A terméket nem kifizetődő termelni ilyen mennyiségben, és a korláthoz fűződő duális ár mutatja a célfüggvény növekedését a termékre vonatkozó követelmény egy egységgel való csökkentése esetében. Ugyanis, ha az A termékből csak 999 darabot kérünk, akkor a kihagyott egy darab helyett egy jobban kifizetődő termék kerül a programba. A marginális ár pedig azt mutatja, hogy mennyivel kifizetődőbb ez a másik termék (persze a másik termék darabszámának meghatározása nélkül), illetve mennyivel növekszik a célfüggvényérték. Érdemes itt is kivizsgálni, hogy melyik irányban érvényes a marginális ár. Vajon minden esetben mindkét irányban változtathatjuk-e a jobb oldalt, és melyik az a termék, amelyik belép a kizárt egység helyébe, illetve melyik termék mennyiségét kell csökkenteni, ha egy ilyen termékmennyiségre vonatkozó alsó limitet egy egységgel emelünk. Ki kellene vizsgálni ilyen esetben is a marginális ár vonatkozásának intervallumát.

Ha a nagyobb egyenlő korlát egyenlőtlenség formában valósul meg (a bal oldal nagyobb), akkor a marginális ár nulla, és a korlát egységnyi változása nem hat ki a célfüggvény értékére, és természetesen a kapott programra sem. Maradjunk az előbbi, az A termékre vonatkozó példánál. Az A termékből továbbra is 1000 darabot kérünk, de most tegyük fel, hogy az optimális programban 1500 darab szerepel. Világos, hogy ilyen esetben az A-ra vonatkozó korlát növelése 1001-re, vagy csökkentése 999-re nem változtat semmit a kapott eredményen.

Maximum probléma – egyenlőség korlát

Az egyenlőség korláthoz rendszerint nullától különböző pozitív, vagy negatív marginális ár fűződik. A pozitív marginális ár azt mutatja, hogy mennyivel növekszik a célfüggvény értéke, ha a megfelelő jobb oldalt egy egységgel növeljük. Ezzel szemben a negatív marginális árral csökkenti a célfüggvény értékét a jobb oldal növelése.

Minimum probléma

Minimum probléma esetében is, a korlát típusától függően, pozitív és negatív marginális árat is kaphatunk. Ezeket az árakat a maximum problémánál említett módon értelmezzük.

4. A DUÁLIS ÁRAK ÉRVÉNYESSÉGI TARTOMÁNYA

Amint már említettük, a duális árak hatékonyságának intervalluma külön problémát jelent. A felvetett kérdés az, hogy a korlát jobb oldala legtöbb hány egységgel változhat, valamint a változások milyen irányban történhetnek, azzal, hogy ez az optimumra ne hasson ki.
A duális változók tulajdonképpen a maximum probléma kiegészítő változói és hozzájuk egységvektorok tartoznak. Ezek a duális, illetve kiegészítő változók alkotják, maximum probléma esetében a szimplex módszer kezdő bázisát.

A módosított szimplex módszer alkalmazásánál a kiinduló szimplex tábla a következő:

	x^*	d^*	
d	A	I	b
	c^*	o^*	O

A kezdő bázist a megfelelő szimplex kritériumok szerint elemi bázistranszformációval változtatjuk.
Miután elvégeztünk k számú iterációt, a következő táblát kapjuk:

	$\underline{x}^*$	$\underline{d}^*$	
$\underline{y}$		$\underline{N}^{-1}$	$N^{-1}b$
	$\underline{c}^*-(\underline{n}^*\underline{N}^{-1})\underline{A}$	$-\underline{n}^*\underline{N}^{-1}$	$-n^*N^{-1}b$

Ha a felső tábla utolsó sora nem pozitív, az utolsó oszlopa pedig nem negatív, valamint az y vektor nem tartalmaz mesterséges változókat, akkor a tábla optimális megoldást tartalmaz. Az egyes szimbólumoknak a következő a jelentése:

y	a bázis változók vektora – primáris és duális (kiegészítő) változókat tartalmazhat,
$N^{-1}b$	a bázis változók értékeit mutatja; primáris változó esetében a kapott érték közvetlenül a változó értékét adja; ha a bázis változó duális változó, akkor a feltüntetett érték azt mutatja, hogy az adott változóra vonatkozó korlát nem egyenlőség alakban valósul meg, hanem a duális változó értékével eltér a bal a jobb oldaltól,
n^*N^{-1}	a bázison kívüli duális változók értékeit adja,
N^{-1}	az inverz bázis,
$n^*N^{-1}b$	a program értéke.

A következőkben meghatározzuk a duális árak érvényességi tartományát, vagyis azt, hogy a megfelelő kapacitást mennyivel növelhetjük, vagy mennyivel csökkenthetjük úgy, hogy minden egységnyi változás a duális árral változtassa a célfüggvény értékét.

Tételezzük fel, hogy a j–edik kapacitás 100%-ban kihasznált, ami egyben azt jelenti, hogy a marginális ára nullától nagyobb. Ez a marginális ár azt mutatja, hogy mennyivel növekszik a célfüggvény értéke, ha az illető kapacitást egy egységgel bővítjük. Azonban a gyakorlat szempontjából ez az egy egység többnyire nem nagy jelentőséggel bír, ezért szükséges a marginális árak érvényességi tartományának meghatározása.

Jelöljük az optimális inverz bázis elemeit c_{ij}-vel, a j-edik kapacitás mennyiségi változását pedig t-vel. Legyen $j = 1$, akkor az y-nal jelölt bázison kívüli változók vektora a következő:

$$y = \begin{matrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} & b_1 + t \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\,\cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ c_{c1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} & b_n \end{matrix}$$

Az y vektornak csak nemnegatív elemei lehetnek, vagyis $y \geqslant 0$. Ebből következik a következő egyenlőtlenségrendszer:

$$\begin{aligned}
c_{11}(b_1 + t) + c_{12}b_2 + \ldots + c_{1n}b_n &\geqslant 0 \\
c_{21}(b_1 + t) + c_{22}b_2 + \ldots + c_{2n}b_n &\geqslant 0 \\
&\vdots \\
c_{n1}(b_1 + t) + c_{n2}b_2 + \ldots + c_{nn}b_n &\geqslant 0
\end{aligned}$$

illetve:

$$\begin{aligned}
c_{11}t &\geqslant -(c_{11}b_1 + c_{12}b_2 + \ldots + c_{1n}b_n) \\
c_{21}t &\geqslant -(c_{21}b_1 + c_{22}b_2 + \ldots + c_{22}b_2) \\
&\vdots \\
c_{n1}t &\geqslant -(c_{n1}b_1 + c_{n2}b_2 + \ldots + c_{nn}b_n)
\end{aligned}$$

A fenti egyenlőtlenségrendszert t szerint oldjuk meg. Így a kapott eredmény az az intervallum, amelyen belül minden egységnyi kapacitásváltoztatás a marginális árral növeli vagy csökkenti a célfüggvény értékét.
Az egyenlőtlenségrendszer mátrix alakban a következő módon írható fel:

$$t \,.\, [c_{i1}] \geqslant -(N^{-1}b) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

A fenti egyenlőtlenség jobb oldala a (2) táblázat utolsó oszlopát tartalmazza, ellenkező előjellel. A bal oldalon a t mellett a c_1 vektor szerepel, ami tulajdonképpen az inverz bázis megfelelő oszlopa. Amennyiben a primáris problémát táblázatban oldjuk meg, szimplex módszerrel, a c_i vektor annak a bázison kívüli duális változónak az oszlopa, amelyikre nézve meg akarjuk határozni a marginális ár érvényességi tartományát. Ez egyben azt jelenti, hogy az optimum meghatározásával egyidejűleg biztosítottak a marginális árak érvényességi tartományának kiszámításához szükséges adatok.

Példa[2]

A P_1, P_2 és P_3 termékek gyártásához az S nyersanyagot használják. Naponta legkevesebb 160 kg S nyersanyagot kell feldolgozni. A nyersanyag felhasználási normatívák termékenként rendre 4 kg/db, 3 kg/db. és 2 kg/db. A termékeket két üzemrészlegben kell megmunkálni. Az első üzemrészleg

berendezéseinek összkapacitása napi 220 óra. Egy darab P_1, P_2, illetve P_3 terméket 3 óra, 5 óra, illetve 2 óra alatt munkálnak meg. A második üzemrészleg kapacitását (100 óra) 100%-ban kell kihasználni. Itt az egyes termékek gyártásához rendre 1 óra, 1 óra, illetve 2 óra szükséges.
Meg kell határozni azt a napi termelési tervet, amelyik maximális összjövedelmet biztosít. Az egységre eső jövedelem 80 dinár, 100 dinár, illetve 200 dinár, sorban a P_1, P_2 és P_3 termékre vonatkozólag.

Jelöljük x_i-vel az i-edik termékből termelt darabszámot. Az adott szöveg alapján a következő modell állítható fel:

$$
\begin{aligned}
&x_1, x_2, x_3 \geqslant 0\\
&4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geqslant 160\\
&3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leqslant 220\\
&x_1 + x_2 + 2x_3 = 100\\
&80x_1 + 100x_2 + 200x_3 = z \rightarrow \max
\end{aligned}
$$

A probléma megoldási menete a következő:

	x_1	x_2	x_3	d^*	
v_1	4	3	2	-1	160
d_2	3	5	2	0	220
v_3	1	1	2	0	100
	80	100	200	0	0
	x_1	x_2	v_3	d^*	
v_1	3	2	-1	-1	60
d_2	2	4	-1	0	120
x_3	1/2	1/2	1/2	0	50
	-20	0	-100	0	-10 000
	v_1	x_2	v_3	d^*	
x_1	1/3	2/3	-1/3	-1/3	20
d_2	-2/3	8/3	-1/3	2/3	80
x_3	-1/6	1/6	2/3	1/6	40
	20/3	40/3	-320/3	-20/3	-9 600
	v_1	d_2	v_3	d^*	
x_1	1/2	-1/4	-1/4	-1/2	0
x_2	-1/4	3/8	-1/8	1/4	30
x_3	-1/8	-1/16	11/16	1/8	35
	10	-5	-105	-10	-10 000

Az optimális megoldás szerint 30 darab P_2 és 35 darab P_3 terméket kell gyártani, a maximális jövedelem pedig 10 000 dinár.

A duális probléma megoldása:

$$v_1 = -10$$
$$d_2 = 5$$
$$v_3 = 105$$

A duális megoldás, illetve marginális ár érvényességi tartománya:

A v_1 változóra a következő egyenlőtlenségeket kapjuk:

$$\frac{1}{2}\ t \geqslant 0 \quad => \quad t \geqslant 0$$

$$-\frac{1}{4}\ t \geqslant -30 \quad => \quad t \leqslant 120$$

$$-\frac{1}{8}\ t \geqslant -35 \quad => \quad t \leqslant 280$$

A fenti egyenlőtlenségekben a t a nyersanyag felhasználási korlát lehetséges ingadozását jelenti.

A rendszer megoldása:

$$0 \leqslant t \leqslant 120$$

Ennek jelentése a következő:

Ha a feldolgozandó nyersanyag-mennyiséget, a 160 kg-ot, csökkentjük, akkor változik a program. A jobb oldal csökkentése nem növeli a célfüggvény értékét annyival, amennyi a marginális ár (10 dinár/kg), hanem változtatja az optimális program szerkezetét. Ha növeljük a nyersanyag-feldolgozási követelményt, és ez a növelés legtöbb 120 kg lehet, minden egységnyi növelés 10 dinárral csökkenti a célfüggvény értékét.

Ha a nyersanyag-felhasználási követelményt több mint 120 kilogrammal növeljük, akkor változik a program.

A d_2 változóhoz tartozó egyenlőtlenségek a következők:

$$-\frac{1}{4}\ t \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad t \leqslant 0$$

$$\frac{3}{8}\ t \geqslant -30 \quad \Rightarrow \quad t \geqslant -80$$

$$-\frac{1}{16}\ t \geqslant -35 \quad \Rightarrow \quad t \leqslant 560$$

Ebben az esetben a keresett érvényességi tartomány:

$$-80 \leqslant t \leqslant 0$$

Ennek a kapacitásnak a bővítése nem hat ki a célfüggvény értékére, vagyis a duális ár pozitív irányban nem érvényes. A kapacitás növelésével a marginális ár nullára csökken és a kapacitás nem lesz teljes egészében kihasználva. Másrészt ezt a kapacitást csökkenthetjük legtöbb 80 órával és minden óra csökkentés a célfüggvény értékét 5 dinárral csökkenti. Ha a kapacitáscsökkentés több mint 80 órát tesz ki, akkor változik a program, s konkrét esetben nem lesz lehetséges megoldás.

A kisebb egyenlő korlátokhoz mindig nem negatív marginális ár fűződik. Ha az illető kapacitást a kapott intervallum felső határánál többel növeljük, akkor a marginális ár nullára csökken, ha pedig az alsó határnál többel csökkentjük, akkor a program változik, a marginális ár úgyszintén.

A v_3 változóra vonatkozó egyenlőtlenségek

$$-\frac{1}{4}t \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad t \leqslant 0$$

$$-\frac{1}{8}t \geqslant -30 \quad \Rightarrow \quad t \leqslant 240$$

$$\frac{11}{16}t \geqslant -35 \quad \Rightarrow \quad t \geqslant -\frac{560}{11}$$

vagyis a keresett érvényességi tartomány:

$$-\frac{560}{11} \leqslant t \leqslant 0$$

Az egyenlőség korláthoz fűződhet pozitív vagy negatív marginális ár. Esetünkben az erőforrás marginális ára pozitív 105 dinár. Tekintetbe véve ezt az értéket és a kapott intervallumot, a következő gazdasági magyarázatot adhatjuk: A követelmény jobb oldalának növelése programváltozást hoz. Viszont a jobb oldal csökkentése maximum 560/11 órával nem változtatja a kapott program szerkezetét, de minden egységnyi csökkentés 105 dinárral csökkenti a jövedelmet.

5. ZÁRÓSZÓ

A duális korlátok gazdasági értelmezését minden problémánál külön-külön kell kivizsgálni és különbözőképpen értelmezni. Egy általános gazdasági értelmezést, ami minden duális korlátra vonatkozna, nem adhatunk.

A duális árak értelmezésénél, véleményük szerint, elmaradhatatlanul ki kell számítani a feldolgozott módon a duális árakra vonatkozó intervallumot.

A duális intervallum meghatározása nélkül a duális árat csak egy egységre vonatkoztathatjuk, valamint a hatás irányát nem tudjuk.

A duális árak érvényességi tartományának kivizsgálása különös jelentőséggel bír a fejlesztési programok kidolgozásánál.

Rezime

Dual linearnog programiranja – ekonomska interpretacija dualnog problema

Predmet ovog rada je dual linearnog ekonomsko-matematičkog modela kao i ekonomska interpretacija dualnog problema. U radu razmatrane su medjusobne veze i odnosi izmedju primarnog i dualnog problema. Ukazano je na mogućnosti ekonomske interpretacije dualnog modela u zavisnosti od karaktera primarnog problema. Konstatovano je da se u ekonomskoj interpretaciji dualnog problema mora uvek poći od specifičnosti datog problema.

Posebno je tretiran problem metoda utvrdjivanja intervala definisanosti dualnih cena, sa posebnim akcentom na značaj odredjivanja ove veličine prilikom proširivanja kapaciteta i donošenja odluka o planovima razvoja.

Summary

The Dual of the Linear Programing – Economic Interpretation of the Dual Problem

This work deals with the dual of linear economic-mathematical model as well as the economic interpretation of the dual problem. The analysis points out the corelation between primar and dual problem. It shows the possibility of economic interpretation of dual model depending on the character of primar problem. The author states that the economic interpretation of dual problem must start from the specific characteristics of the problem.

Special attention is payed to the method of determining the interval of definition of dual prices and the importance of determining of these values when expanding the capacities and making decision about plans of development.

Jegyzetek

[1] A tételek bizonyítását a megfelelő szakirodalom tartalmazza.

[2] A példa szövegét dr. Szóràd György Ekonomsko-matematički metodi i modeli – Zbirka problema című könyvéből kölcsönöztük.

Irodalomjegyzék

1. Dr. Djordje Sorad: Ekonomsko matematički metodi i modeli. Ekonomski fakultet, Subotica, 1982.

2. Dr. Djordje Sorad: Ekonomsko-matematički metodi i modeli – Zbirka problema. Ekonomski fakultet, Subotica, 1979.

3. Dr. Dragiša Stojanović: Operaciona istraživanja. Ekonomski fakultet, Beograd, 1979.

4. Krekó Béla: Optimumszámítás. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1972.

5. Ljubomir Martić: Matematičke metode za ekonomske analize. Informator, Zagreb, 1966.