Bunyik Zoltán

BOLYAI JÁNOS ÚJ VILÁGA

Bevezetés

150 évvel ezelőtt Bolyai János, a hányatott életű erdélyi lángész, rést ütött az évezredes térszemléleten és új horizontokat tárt a hivatásos geométerek elé. A geometriakutatás számára termékeny évtizedek következtek. Erre az időszakra esik a ma már klasszikusszámba menő, nemeuklideszi geometriák megalapozása is, melyek pár évtized múlva a relativitáselméletben fizikai alkalmazást is nyertek.

Bolyai János a magyar tudomány legkiemelkedőbb alakja s az egyetemes magyar kultúra világviszonylatban is igen megbecsült képviselője. Ennek ellenére szellemi arcképe hiányosan, tévesen van meg a köztudatban. Felfedezése, a nemeuklideszi geometriák világa pedig a szakemberek fellegvárának számít. A legjelentősebb magyar tudományos felfedezés 150. évfordulója kiváló alkalom ezen mulasztások bár részleges pótlására. Azonban Bolyai János felfedezésének matematikai és filozófiai jelentőségét ecsetelni a nemeuklideszi geometriák elvi alapjainak ismerete nélkül szinte lehetetlen feladat.

A geometriához nem vezet királyi út, mondta Euklidesz, az ókor nagy geométere, Ptolemaiosz Lagosz uralkodónak, mikor ez utóbbi megkérdezte tőle, meghallgatván egyik előadását, vajon a geometria tanulásának nincs-e rövidebb és könnyebb módja. Euklidesz megállapítása időállónak bizonyult, hisz érvényes a nemeuklideszi geometriákra is. Aki azonban nem sajnálja a fáradtságot az összpontosított logikai gondolkodásra, végigjárhatja a geometriák keletkezésének útját, csupán a középiskolai matematikai ismeretekre támaszkodva. A matematikai formalizmus és a szigorú bizonyítások mellőzése e munkában a könnyebb járhatóságot hivatott elősegíteni. Hogy ilyesmi lehetséges, arról Rényi Alfréd, ismert magyar matematikus, szavai győzhetnek meg leginkább: nincsen matematikai botfülűség; aki képes logikusan gondolkozni, eljuthat a matematikában addig, ameddig az érdeklődése tart.

A nemeuklideszi geometriákkal ismerkedve szembekerülünk majd néhányszor a „tévedhetetlen" józan ésszel. Emlékezzünk ilyenkor Albert Einstein következő mondatára: „A józan ész tulajdonképpen a gondolkodásunkban 18 éves korunkig egymásra rakott előítéletek halmaza."

1. A görög csoda

„...csodálatos dolog, hogy az ember egyáltalán képes elérni a tiszta gondolkodás bizonyosságának és tisztaságának olyan fokát, mint első ízben a görögök a geometria területén."

Albert Einstein

„...a görög geometriai felfedezések kiemelkedő eredményeihez hasonlót nem találunk széles e Földön."

Lánczos Kornél

A térbeli formák és viszonyok tudatosodása az emberi fejlődés legkorábbi szakaszában kezdődött. Ezt az tette lehetővé, hogy az ember passzív viszonyulását a természethez aktív hozzáállás váltotta fel. A gyűjtögetés, vadászat és halászat helyébe a földművelés lépett. Ez pedig együtt járt a letelepedéssel, a lakóhelyépítéssel, az edénykészítéssel. S itt már szükség mutatkozott a térbeli viszonyok ismeretére, a szimmetria és az egyenlőség felismerésére, az összehasonlítás által történő mérésre. A csodálatos és izgató csillagos égbolt nyílt könyvként kínálta a szakasz, a háromszög, a négyszög megismerését.

A nagy folyók völgyében megjelentek a központosított államhatalmú keleti civilizációk: Egyiptom, Mezopotámia, India, Kína. Ezekben az ember már összetettebb tevékenységekre kényszerült: gátépítésre, csatornaásásra, földmérésre, építkezésre, naptárkészítésre. Mindezen tevékenységeknél a gyakorlati cél elérése volt a mozgatóerő, habár lassanként esztétikai kritériumok is fölmerültek, főleg az építkezésnél és edénykészítésnél. A kezdetben ugyanazt a feladatot is mindig más-más módon végezték, lassanként azonban a jobb eredményt adó módszerek terjedni kezdtek, s a munkavégzés egyre tökéletesedett. Mikor már olyan módszer állt rendelkezésre, mely teljesen kielégítette a gyakorlati elvárásokat, akkor receptszerű szabályok alakjában előbb szóban, majd írásban is generációról generációra szállt. E kor embere minden egyes problémát a maga konkrét megjelenési feltételei közepette oldott meg, kipróbált szabályok alkalmazásával, és semmilyen absztraháló tevékenységet sem végzett, mert ennek szükségét nem is érezte. A legösszetettebb feladat, melynek elvégzésére az egyiptomiaknak pontos utasításaik voltak, a csonka gúla térfogatának számítása volt. Az ilyen tudás, mely csupán utasítások sorozatából állt, és kizárólag gyakorlati célokat szolgált, nem tekinthető még tudománynak.

Magasabbrendű, absztrakt tudásra először az ógörögök tettek szert. A görögök gazdasági és társadalmi fejlődésének felgyorsulása időszámításunk előtt 1000 körül szerencsés módon egybeesett az ókori keleti civilizációk hanyatlásával. A gazdasági és társadalmi életnek a társadalmi tudatban való tükröződése által megjelent az ógörög kultúra. Gyorsan fejlődve, s hamar kikerülve a gyakorlat akkor még szűk látóköréből, e kultúra néhány száz év leforgása alatt olyan magasságokig emelkedett, és olyan eredményeket hozott, melyek előtt még ma is elképedve állunk, hisz ily rövid idő alatt a történelem ilyen roppant fejlődést még nem produkált. A görög csoda csúcspontja a geometria volt. Hogyan vált az egyiptomi utasítás-geometria olyan ragyogó, kristálytiszta elméletté, melyhez még kétezer év múlva sem akadt semmi lényeges hozzáfűznivaló?

A milétoszi kereskedőt, Thaleszt, ki utazásai során megismerte az egyiptomi és mezopotámiai eredményeket, kétségkívül még gyakorlati célok vezérelték a természet vizsgálatában. Őt azonban már nemcsak a „hogyan", hanem a „miért" is érdekelte. A gazdasági gondoktól és a vallástól függetlenített görög gondolkodók olyasmiről elmélkedhettek, ami a kizárólagosan gyakorlati beállítottságú egyiptomiaknál fel sem merülhetett volna. Az egyiptomi eredmények és módszerek közt a görögök gyorsan észrevették a hasonlóságot, majd a hasonló objektumokat és módszereket csoportosítva közös tulajdonságokat véltek bennük felfedezni, s így jöttek létre az általános fogalmak (pont, egyenes, szög) és a bizonyítási módszerek.

Már Thalesz is észrevette, hogy egyik ismeretből következik a másik, Hippokratesz pedig már tudatosan próbálta az egyszerűbb segítségével az összetettet bizonyítani. Ismerve a görög gondolkodók éleselméjűségét nem csodálkozhatunk azon, hogy hamar rájöttek arra, miszerint mindent azért nem bizonyíthatunk. Minden bizonyításhoz tudvalevően fel kell valami egyszerűbb állítást használni, ennek bizonyításához pedig valami még egyszerűbbet. Ezt a láncolatot pedig vég nélkül nem építhetjük, hisz a legegyszerűbb állítások bizonyításához már nem lenne mit felhasználni. Így jutottak a görögök az axióma, ezen legegyszerűbb állítás, fogalmához, melyet a circulus vitiosus elkerülése végett bizonyítatlanul fogadtak el. Ennek egyrészt szükségét érezték, mert enélkül nem lehet logikailag kifogástalan deduktív elméletet kiépíteni, másrészt a bizonyítás hiánya nem is nagyon zavarta őket, mert ezek jórészt szemmel látható igazságok voltak számukra. Ezekre alapozva fejtették ki azután koncentrikus körök alakjában az egész elméletet, mégpedig úgy, hogy egy állítás bizonyítására csak az axiómákat vagy a már előbb bebizonyított állításokat lehetett felhasználni. Egy szem idegenkedés azért lehetett bennük a bizonyítatlan állítások iránt, hisz arra is törekedtek, hogy semmivel sem több axiómát vegyenek kiindulópontul, mint amennyi feltétlen szükséges. Természetesen arra is vigyáztak, hogy a kijelölt axiómák között ne legyen ellentmondás, mert jól tudták, csak kifogástalan alapokra szabad építeni.

Ezen problémákkal az ókor legnagyobb matematikusai foglalkoztak: Arhimédesz, Eudoxosz, Euklidesz, Apolloniosz. Nevükhöz fűződik az első szaktudomány megjelenése, a geometria és a matematika kiválása a filozófiából, időszámításunk előtt 300 körül. Ők már tiszta elméleti tudást akartak, a tapasztalat nem volt sem indítóok, sem cél, a tudományt a maga igazáért és szépségéért öncélúan művelték. Mikor Euklidesztől egyik tanítványa megkérdezte, mi haszna származik a geometria tanulásából, Euklidesz szolgáját intette: adj ennek a fiúnak a pénzesládából, mondta, hadd lássa hasznát annak amit tanul. Még Arhimédesz, a minden idők legnagyobb „alkalmazott" matematikusa is fizikai és technikai ténykedését másodrangúnak tartotta, és semmilyen feljegyzést sem hagyott hátra róla.

Míg a görög materialista filozófia nem gyakorolt nagy hatást a görög geometriára, annál inkább az idealista irányzat, főleg Pütagorasz és Platon révén. A platoni filozófia nyomán az igazi, valóságos objektumoknak a görögök a háromszöget, a négyzetet tartották, a tapasztalati formák csak ezek tökéletlen utánzatai voltak számukra, egyféle árnyékvilág. Az elméletileg bebizonyított tudást mindig nagyobb értékűnek tartották az észlelésnél, mert ez utóbbi esetben, úgy vélték, csak a valóságos objektumok másairól szerezhetnek megbízhatatlan tudást. A geometria művelése számukra igazsághódolást és istentiszteletet jelentett (ez utóbbit főleg a pütagoreusok számára). A valóságból absztrahált, számukra létezőnek tartott objektumokon túl azonban nem tartottak szükségesnek további általánosítást. A platoni filozófia szerint ugyanis az ideák világának árnyképe az a világ, amit mi közvetlenül észlelünk. Tehát ahogyan az ideák a valóság absztrakciói voltak, ugyanúgy a geometria egy idealizált tér tudománya volt, melyet szoros szálak fűztek a tapasztalati térhez, s onnan elszakadni nem tudott.

Ilyen körülmények között jött létre Euklidesz életműve, a 13 részes *Elemek*, az ókor legnagyobb tudományos eredménye, a deduktív módszer mintaképe, s az elkövetkező kétezer év geometriai tankönyve. Euklidesz e mű írása közben rendszerezte a geometria addigi eredményeit. Művében helyet kapott a kor három legjelentősebb matematikai felfedezése is: az arányelmélet, a szabályos testek elmélete és az összemérhetetlen szakaszok elmélete. Euklidesz azonban elődeitől szigorúbb felépítést adott művének, a bizonyításokat finomította, a hibákat kiküszöbölte. Az *Elemek* azon kevés antik könyv között van, amely csaknem teljes egészében fönnmaradt.

A nagy keleti civilizációktól nyilván más népek is tanultak. A görögökhöz mérhető tanítványok azonban nem akadtak. Hogy ez miért volt így, nehéz évezredek múltán megválaszolni, de Lánczos Kornél megállapításával mindenképpen egyetérthetünk: „A görög szellemnek vele született tehetsége volt az elméleti gondolkodásra."

A görögöket közvetlenül követő népek között már nem volt egyetlen jelentősebb filozófus vagy természettudós, ez még a rómaiakra is vonatkozik, pedig rendelkezésükre állott az egész görög kultúra hagyatéka. E két nép közti különbséget megvilágíthatja a következő történet is. A Szirakúzát elfoglaló rómaiak egyik katonája, betörve az idős Arhimédesz házába, egy öregembert látott rajzai fölé görnyedve, ki ezt kiáltotta: „Ne zavard a köreimet!" A katona szakszerűen tudott ölni, mivel csak erre tanították. Whiteheed angol filozófus erre megjegyezte: „Egyetlen rómait sem ért a halál geometriai gondolkodás közben."

2. Új geometria születik

„Nem tudom minek tűnhetek a világ szemében; én azonban a tengerparton játszó gyermekként látom magam, akit szórakoztat, ha időnként egy-egy simább kavicsot vagy szebb kagylót talál, s közben az igazság nagy óceánja teljesen ismeretlenül terül el előttem."

Isaac Newton

A százötven évvel ezelőtt felfedezett hiperbolikus geometria nem csak azért jelentős, mert mint az első nemeuklideszi geometria megdöntötte az euklideszi geometria több mint kétezer éves egyeduralmát. Ennek a felfedezésnek mélyebb jelentősége is van: gyökeresen változtatta meg az ember térszemléletét. Kiderült ugyanis, hogy a tapasztalati tér nem az egyedüli elképzelhető tér, sőt nem is az egyedüli létező tér.

Kétezer évig geometrián Euklidesz művét, az *Elemek*et értették, mely egyébként a Biblia után a legtöbb kiadást (kb. 1700) megért könyv. A letűnt századok matematikusai, de főleg az utolsóé, csiszolgatták, javítgatták, toldogatták Euklidesz geometriáját olyannyira, hogy a mai olvasó már alig értené meg az *Elemek*et. A mai euklideszi geometria azonban elvi szempontból mégsem tartalmaz semmi többet Euklidesz művénél.

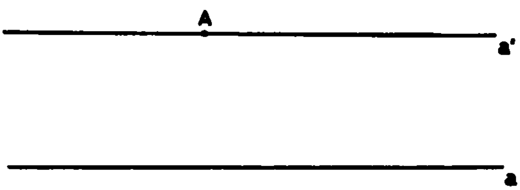
Az euklideszi geometria, mint majdnem minden matematikai elmélet axiomatikusan van fölépítve. Euklidesz csupán 10 axiómát használt, ezek közül azonban néhány fölöslegesnek bizonyult, jó néhány pedig hiányzott. Az euklideszi geometriában ma közel 20 axiómából indulunk ki, melyek öt csoportra oszlanak: illeszkedési, rendezési, egybevágósági és folytonossági axiómák, az ötödik csoportot pedig egyedül a párhuzamossági axióma képviseli. Ezek a köteteket kitevő euklideszi geometria alappillérei, rájuk épül az összes geometriai ismeret. A 20 axiómából, a logikai gondolkodás szabályai szerint, egyenesen következik az egész geometria. Ha valaki elfogadja a 20 axiómát, akkor szükségképpen el kell fogadnia az egész geometriát!

Euklidesz idejétől a múlt század közepéig a sok kitűnő geométertől csak annyi telt, hogy az *Elemek*hez itt-ott hozzátoldottak valamit. A XIX. század elején, mikor már nem nagyon volt mit hozzátenni, a geometria a tökéletességig emelt tudomány látszatát keltette. Alapjait szilárdabbnak hitték, mint bármikor előtte, az akkori mérési lehetőségek közepette az euklideszi geometria egészen pontosan írta le a bennünket körülvevő tapasztalati teret.

A matematikusokat a századok során csupán egyetlen kérdés izgatta; a párhuzamossági probléma, melyen minden geométer tudománya kudarcot vallott. Nem keltette lényeges kérdés látszatát, hisz a megoldásnak inkább az elmélet további csiszolását kellett volna szolgálnia. De nézzük meg közelebbről, mi is a párhuzamossági probléma!

A kérdés voltaképpen azért merült fel, mert a párhuzamossági axióma jóval bonyolultabban volt megfogalmazva a többi axiómánál, és tartalma sem volt olyan szemmel látható igazság, mint a többi axióma esetében. Euklidész tíz axiómája között például ilyenek is voltak: „Az egész nagyobb a résznél." „Két ponton át egy egyenes húzható." A párhuzamossági axióma, melyet

Euklidesz 5. posztulátumként fogalmazott meg pedig így festett: „Ha két azonos síkban fekvő egyenes egy harmadikat metsz, akkor e két egyenes a harmadiknak azon az oldalán metszi egymást, amelyiken a keletkező belső szögek összege két derékszögnél kisebb." Később bebizonyosodott, hogy ezt az axiómát egyszerűbben is meg lehet fogalmazni, például így: „*A síkban egy egyenesen kívüli pontból csak egy párhuzamos huzható az adott egyenessel.*" (1. ábra). Ez a megfogalmazás se többet, se kevesebbet nem jelent, mint az



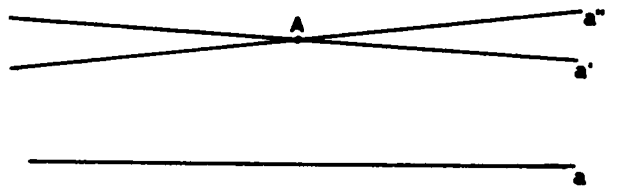
1. ábra

euklideszi párhuzamossági axióma, ekvivalens vele, így vele áll vagy vele bukik. Tehát ez az axióma, főleg az euklideszi megfogalmazásban, sokkal inkább tételre hasonlít, mintsem a többi axiómára. Ez nem csak a laikusnak tűnt így, kétezer éven át a matematikusok hatalmas többsége meg volt győződve arról, hogy a párhuzamossági axióma tulajdonképpen tétel, tehát fölösleges, mert ha tétel, akkor a többi axióma alapján és esetleg más tételek segítségével végső soron bebizonyítható, levezethető. Ez annál is inkább természetesnek látszott, mert Euklidesz egyik axiómája, mely szerint „minden derékszög egyenlő", tételnek bizonyult, be is lett bizonyítva, és ezzel lekerült az axiómák listájáról. Csakhogy a párhuzamossági axióma kétezer év után is állta a sarat! A kérdés továbbra is nyílt volt.

Az évszázados hiábavaló próbálkozások után, a XVIII. században a matematikusok arra a felismerésre jutottak, hogy a párhuzamossági axióma talán nem is bizonyítható közvetlenül, vagy ha mégis, akkor csak igen körülményesen. A fellépő akadályokat elkerülendő a kérdést kerülő úton próbálták megközelíteni. Ravasz elgondolásuk a következő volt: képzeljük el az összes axiómát a párhuzamossági axiómán kívül, ha most a párhuzamossági axióma valóban a többi axióma következménye, akkor ebben a „hiányos" (a párhuzamossági axióma nélküli) rendszerben tulajdonképpen benne foglaltatik a párhuzamossági axióma is, mint egy tétel, melyet majd egy szerencsés matematikus előbb-utóbb sikeresen bebizonyít. Csatoljunk most ehhez a hiányos rendszerhez egy újabb axiómát, mégpedig pontosan a párhuzamossági axiómával ellentétes axiómát. Nevezetesen a következőt: „*A síkban egy egyenesen kívüli pontból két olyan egyenes húzható, mely nem metszi az adott egyenest.*"

(2. ábra, a nemeuklideszi geometria objektumait csak torzítás árán lehet ábrázolni).

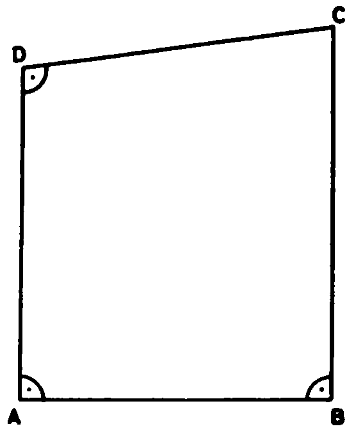
Mi történik most ebben a modifikált axiómarendszerben s a belőle levezethető elméletben? Az elméletünk ellentmondásos lesz! Két egymásnak ellentmondó állítást fog tartalmazni a párhuzamosságról. Mivel feltételezésünk szerint a hiányos rendszerből levezethető a párhuzamossági axióma, a modifikált rendszerünkön alapuló elmélet nyilván tartalmazni fog egy olyan tételt, mely azt mondja ki, hogy egy pontból egy egyenessel csak egy párhuzamos húzható (párhuzamossági axióma). Másrészt szerepelni fog benne az utolsó axióma, mely pont ennek az ellenkezőjét állítja, miszerint legalább két ilyen párhuzamos van. S itt az ellentmondás! Mármost egy ilyen ellentmondásból számtalan más származtatható, nem kell mást tenni, mint a két ellentmondó állításból további következményeket levonni, s ezek között jó néhány újból ellentmondásban lesz egymással. Tehát ha elméletünkben van egy ellentmondás, akkor még egy sor ebből származó ellentmondással találkozhatunk.



2. ábra

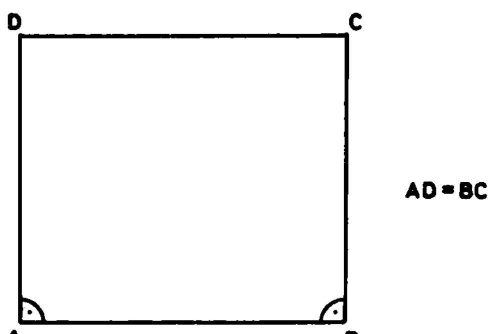
Ha most az említett modifikált axiómarendszeren alapuló elméletet közelebbről megvizsgálva ráakadunk egy ellentmondásra (tehát két olyan tételt bizonyítunk be, melyek ellentmondanak egymásnak), akkor a párhuzamossági probléma el lesz döntve. Hisz ellentmondásunk forrása csakis elméletünk egyetlen gyenge pontja lehet, mégpedig a párhuzamossági kérdés. Ezáltal indirekt módon bebizonyítottuk, hogy a párhuzamossági axióma valóban az őt megelőző axiómák következménye, tehát tulajdonképpen tétel.

Ilyennemű vizsgálatokat különösen Lambert svájci és Saccheri olasz matematikus végzett. Lambert a problémát a következő módon közelítette meg. Képzeljünk el egy négyszöget, melyben három szög derékszög (Lambert négyszög). Logikai úton a negyedik szögre három feltevés adódik: derékszög, nagyobb derékszögnél vagy kisebb derékszögnél (3. ábra). Sikerült bebizonyítani, hogy *a derékszög – hipotézis teljesen egyenértékű (ekvivalens) a párhuzamossági axiómával,* ha azonban a párhuzamossági axiómát a tompaszög-hipotézissel helyettesítjük, akkor az ilyen rendszer ellentmondásos lesz. A legérdekesebb a harmadik hipotézis volt, ugyanis bebizonyosodott, hogy *a hegyesszög-hipotézis nem más, mint a párhuzamossági axiómával ellentmondó állítás egy más megfogalmazása.* Tehát a párhuzamossági axióma helyett felvette axiómaként a hegyesszög-hipotézist, de bármilyen mértékben fejtette is ki az új, modifikált elméletet, ellentmondásra nem jutott.



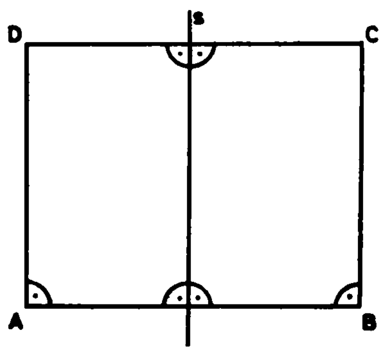
3. ábra

Saccheri is hasonlóan gondolkodott, ő egy olyan négyszöget tanulmányozott, melyben két derékszög van és melyben két oldal egyenlő (Saccheri-négyszög). A másik két szögre ő is három lehetőséget tanulmányozott (4. ábra): vagy mind a kettő derékszög, vagy mind a kettő tompaszög, vagy mind a kettő hegyesszög. Hogy ezek a hipotézisek tulajdonképpen a Lambert-négy-



4. ábra

szögnél felállított hipotézisekkel azonosak, azt úgy láthatjuk be, hogy meghúzzuk a Saccheri-négyszög szimmetrálisát, s így a Saccheri-négyszög két egybevágó Lambert-négyszögre esik szét (5. ábra). Saccheri is gondosan meg-



5. ábra

vizsgálta mindhárom hipotézist, de ő, Lamberttal ellentétben, a hegyesszöghipotézisben is ellentmondást vélt felismerni, azonban, mint utóbb kiderült, számításaiba tévedés csúszott.

Ily módon a probléma közvetett megközelítése sem járt sikerrel. Az erőfeszítések azért mégsem voltak teljesen hiábavalóak, mert ezen próbálkozások sok hasznos mellékeredménnyel járultak hozzá a probléma végleges megoldásához. Így például előállított egy sor, a párhuzamossági axiómával ekvivalens állítást. Az említetteken kívül például a következő: *„A háromszög belső szögeinek összege 180°."*

A XIX. század elején már minden készen állott a döntő, áttörő lépésre, csak lángelme kellett, aki ezt megtegye. Szerencsére ebben sem volt hiány. A döntő lépést egymástól függetlenül, de csaknem egyidőben, a matematika három óriása tette meg: Bolyai János (1802–1860) magyar, Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij (1792–1856) orosz és Carl Friedrich Gauss (1777–1855) német matematikus. Gauss, a történelem legnagyobb matematikusa, gondolatait nem dolgozta ki részletesen, és meg sem jelentette eredményeit, félve a közvélemény meg nem értő reagálásától, tehát szűkebb értelemben csupán Bolyai és Lobacsevszkij tekinthető az új geometria megalapítójának.

Mely zseniális meggondolással oldották meg ők a párhuzamosság évezredes problémáját? Kezdetben maguk is a párhuzamossági axióma bebizonyításán fáradoztak, azonban gyorsan okulva elődeik és saját maguk sikertelen próbálkozásain, felismerték a párhuzamossági axióma bebizonyíthatatlanságát, más szóval független mivoltát a többi axiómához viszonyítva. Tehát a bonyolult megfogalmazás ellenére a párhuzamossági axióma épp olyan jogosan axióma, mint a többi, s Euklidesznek igaza volt, mikor felvette axiómái közé. Most már érthetjük, miért voltak hiábavalóak a matematikusok évezredes próbálkozásai a párhuzamossági axióma bizonyítását illetően. Olyan bizonyítást kerestek, amely nem is létezik. Mikor Bolyai, Lobacsevszkij és Gauss túltették magukat e soha meg nem oldható problémán, egy új, más világ tárult szemük elé: a nemeuklideszi geometriák világa. Hisz ha a párhuzamossági axióma valóban független a többitől, akkor tisztán logikai megfontolásokat követve a párhuzamossági axióma helyett teljesen egyenrangúan fölvehetjük annak ellentétét is, s ebben az esetben egy új geometriát kapunk, mely éppúgy ellentmondásmentes lesz, mint a jól ismert euklideszi geometria. Ezt a geometriát nevezzük ma hiperbolikus vagy Bolyai-Lobacsevszkij-féle geometriának.

Noha az euklideszi geometria axiómái közül csak egyet változtattunk, mégpedig ellentétjére, ebben az új geometriában, a felfedezők nagy bámulatára, a már megszokott mértanhoz viszonyítva csodás dolgok történnek: létezik négyszögesíthető kör, a háromszög belső szögeinek összege kisebb mint 180°, két hasonló háromszög egyszersmind egybevágó is, nem lehetséges minden háromszög köré kört írni stb.

Bolyai, Lobacsevszkij és Gauss szilárdan hitték a párhuzamossági axióma függetlenségében és ezáltal a hiperbolikus geometria ellentmondásmentességében és létjogosultságában, de ezt bizonyítani nem tudták. Erre a kérdésre kategorikus választ ma sem tudunk adni, amit biztosan tudunk, az csak a következő: *ha a jól ismert euklideszi geometria ellentmondásmentes, akkor ebből kiindulva bebizonyítható a hiperbolikus geometria ellentmondásmentessége.* Azonban az euklideszi geometria ellentmondásmentessége sem egyszerű kérdés. Igaz ellentmondást eddig nem találtak benne, de ki tudja, mikor akadhat rá valaki? Ezen lehetőség ellen, mint majd látni fogjuk, nem vagyunk bebiztosítva.

1823-ban a kolozsvári születésű Bolyai János, röviddel a bécsi katonai mérnökakadémia befejezése után, a következőket írja apjának, Bolyai Farkasnak, a szintén kiváló matematikusnak: „A feltételem már áll, hogy mihelyt rendbeszedem, s elkészítem, 's mód leszsz, a parallelákról egy munkát adok ki; ebbe' a' pillanatba nints kitalálva, de az út, mellyen mentem, tsaknem bizonyosan ígérte a tzél el-érését, ha az egyébiránt lehetséges; nincs meg, de ollyan felséges dolgokat hoztam ki, hogy magam elbámultam 's örökös kár volna el-veszni; ha meg-látja, Édes Apám, megésmeri; most többet nem szollhatok, tsak annyit: hogy semmiből egy ujj más világot teremtettem, mind az, valamit eddig küldöttem, tsak kártyaház a' toronyhoz képest." Bolyai a döntő lépést ekkor valószínűleg még nem tette meg. Ami bámulatba ejtette, az a nemeuklideszi geometria csodás világa volt. Habár a párhuzamossági axióma független mivoltának gondolata akkor már nem volt tőle távol, még mindig reménykedett, hátha talál ellentmondást a modifikált axiómarendszer következményei között.

Az apa nehezen hitte el, hogy eme kétezer éves probléma megoldásához az ő fia közel jár. Hisz saját sokéves sikertelenségein okulva, három évvel előtte még így intette a fiát: „A' Parallélákat azon az úton ne próbáld: tudom én azt az utat is mind végig, megmértem azt a' feneketlen éjszakát én is, az életemnek minden világossága, minden öröme kialudt benne."

1825-ben azonban már megtörtént az áttörés és az apa megismerkedett fia elgondolásának vázlatával. Egy évvel később már Bolyai János egykori tanára is kézhez kapta a vázlatot. Bolyai Farkas hajlandó volt támogatni fiát, habár fia eredményének lényegét ekkor még nem értette meg. Valószínüleg saját sok évtizedes sikertelen próbálkozásai tették szkeptikussá. Az új geometriával csak Gauss elismerő véleménynyilvánítása után barátkozott meg.

Bolyai János műve nyomtatásban 1832-ben jelent meg, apja egyik művének függelékeként. Bolyai Farkas *Tentamen* néven ismert műve a következő címet viselte: „Kísérlet a tanulóifjúságot a tiszta matematika elemeibe és magasabb fejezeteibe szemléletes és éppen ezért közérthető módon bevezetni." E tankönyv három függeléke közül az egyik Bolyai János híres műve az *Appendix*. A mű teljes címe pedig: „Függelék. A tér abszolút igaz tudománya: függetlenül Euklidesz XI. (a priori soha el nem dönthető) axiómájának igaz vagy nem igaz voltától; hozzácsatolva nem igaz esetében a kör geometriai négyszögesítése." (A párhuzamossági axióma Euklidesz művének egyes kiadásaiban XI axiómaként is szerepel.) Az *Appendix*, akár a *Tentamen* is, latin nyelven jelent meg.

Bolyai Farkas még 1831-ben műve egyik különnyomatát elküldte Gaussnak, diákkori barátjának, kivel nagyobb megszakításokkal egész életében levelezett. Gauss válasza többek között ezt is tartalmazta: „Most valamit a Fiad munkájáról. Ha avval kezdem, hogy nem szabad dicsérnem: bizonyára megütődsz egy pillanatra. De mást nem tehetek: ha dicsérném, akkor magamat dicsérném, mivel a mű egész tartalma, az út, melyet Fiad követ és az eredmények amelyekre jutott, majdnem végig megegyeznek részben már 30–35 év óta folytatott elképzeléseimmel." Ezt Gauss más levelei is bizonyítják. 1824-ben Taurinushoz ezt írta: „Az a feltevés, hogy a három szög összege (a háromszögben) 180°-nál kisebb, egy sajátos, a mi (euklideszi) geometriánktól merőben különböző, de teljesen logikus geometriához vezet."

E válasz nagyon lehangolta Bolyai Jánost egyrészt, mert Gauss, szerinte, el akarta venni a fölfedezés időbeli elsőségét, másrészt, mert nem hívta fel a közvélemény figyelmét a műre. Az egyébként is ingerlékeny természetű, gyenge idegzetű Bolyai János, ki a hadseregből is kilépett, anyagi és családi gondok miatt, valamint Gauss nem éppen bátorító válasza folytán, olyannyira elkeseredett, hogy majdnem teljesen abbahagyta matematikai munkálkodását.

Ebben az is közrejátszott, hogy művét kortársai nem értették meg és semmi visszhangja sem volt. Apjával és környezetével való viszonya is megromlott. Elkeseredése odáig fajult, hogy Gauss többi eredményeiben is kételkedni kezdett, s élete végéig gyűlölte a nagy matematikust.

Míg Gauss Bolyai Farkasnak kimért és hideg elismeréssel nyilatkozott az *Appendix*ról, addig egyik levelében Gerlingnek ezt írta: „.... e napokban Magyarországról egy, a nem-euklideszi geometriát tárgyaló, kis művet kaptam. Ebben valamennyi eszmémet és eredményemet nagy eleganciával kifejtve újra föltalálom... Szerzője, ki nagyon fiatal osztrák katonatiszt, fia egyik ifjúkori barátomnak... Ezt a fiatal geométert, Bolyait, elsőrangú lángésznek tartom". Gauss magatartását tárgyilagosan mérlegelve, még ezt is hozzá kellene tenni:

sem az *Appendix*ot, sem saját idevágó eredményeit nem tárta a nyilvánosság elé, sőt más jelentős felfedezéseit sem jelentette meg, melyekről azt tartotta, hogy a közvélemény még nem érett rá.

1848-ban Bolyai János tudomására jutott, hogy rajta és Gausson kívül Lobacsevszkij orosz matematikus is kidolgozta a hiperbolikus geometriát. Új geometriájáról szóló első értekezését Lobacsevszkij 1826-ban nyújtotta be a kazáni egyetemhez, ahol dolgozott. A mű nyomtatásban 1829-ben jelent meg. Lobacsevszkij azonban Bolyainál jobb idegzettel és nagyobb lelkierővel győzte le környezetének megsemmisítő közömbösségét és folytatta termékeny munkáját.

A tudományos közvélemény elismerését, sajnos, egyik felfedező sem érte meg.

3. *Ismerkedés Bolyai János új, más világával*

„A szerző méltán abban a meggyőződésben él, hogy e dolog tisztázásával a tudomány valódi öregbítéséhez és ennél fogva az emberi sors emeléséhez a legfontosabb és legfényesebb adalékok egyikét szolgáltatta."

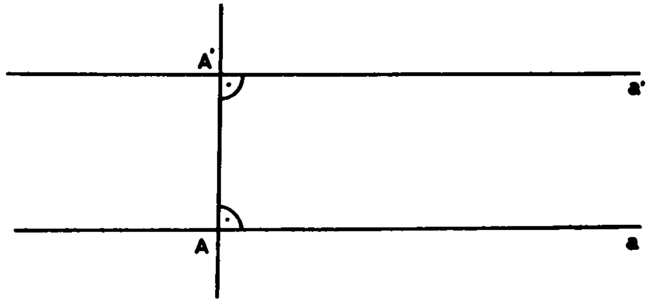
Bolyai János

Mivel a hiányos axiómarendszernek (az euklideszi geometria axiómái kivéve a párhuzamossági axiómát) és a belőle levezethető elméletnek külön is nagy jelentősége van, nevet is adtak neki: a b s z o l ú t g e o m e t r i a. E név Bolyai „a tér abszolút igaz tudománya" elnevezésének a rövidítése. Az abszolút geometriát tehát az első négy axiómacsoport és azok következményei alkotják. Ha ezekhez hozzávesszük a párhuzamossági axiómát, előáll a jól ismert e u k l i d e s z i g e o m e t r i a; ha pedig a párhuzamossági axióma ellentétét tekintjük a hiányos rendszer utolsó axiómájának, a h i p e r b o l i k u s g e o m e t r i á t kapjuk. Az abszolút geometria tulajdonképpen teljes egészében része mind az euklideszi, mind a hiperbolikus geometriának.

Most valaki így is gondolkodhat: az abszolút geometriát nem is szükséges tanulmányozni, mert aki jól ismeri az euklideszi geometriát, annak ismernie kell az abszolút geometriát is, hisz ez utóbbi az előbbiben foglaltatik. A továbbiakból kiderül azonban, hogy ez mégsem teljesen így van.

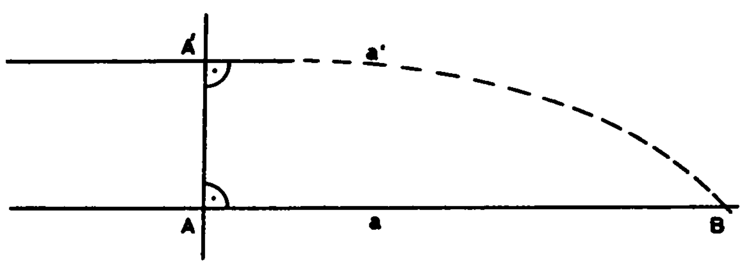
Az euklideszi geometriában a párhuzamosság fogalmát teljesen rögzíti a párhuzamossági axióma, hisz kimondja, hogy létezik egyenes, mely nem metszi az adott egyenest, sőt egy adott ponton át pontosan egy ilyen egyenes létezik, és ezt az egyenest nevezzük párhuzamosnak. Ez a fogalom az euklideszi geometriában teljesen meghatározott már a kezdet kezdetén: mint axiómát fogadjuk el.

Az abszolút geometriában azonban, a párhuzamossági axióma elvetése miatt nem ismerjük a párhuzamosság fogalmát. Most pedig egy váratlan és furcsa dolog történik: noha a párhuzamossági axiómát elvetettük, találhatunk olyan egyenest, mely áthalad egy adott ponton és nem metszi az adott egyenest. Erre az egyenesre a következőképpen lelhetünk rá (6. ábra): az egyenesen kivüli Á pontból merőlegest bocsátunk az a egyenesre (hogy ilyen merőleges csak



6. ábra

egyetlenegy van, azt abszolút geometriai tétel mondja ki; a következő lépésben bocsássunk merőlegest az AÁ egyenesre az Á pontban; legyen ez a merőleges á. Az így kapott á egyenes nem metszheti az a egyenest! Ha ugyanis egyik vagy a másik oldalon metszené (7. ábra), akkor olyan háromszöget alkotnának az

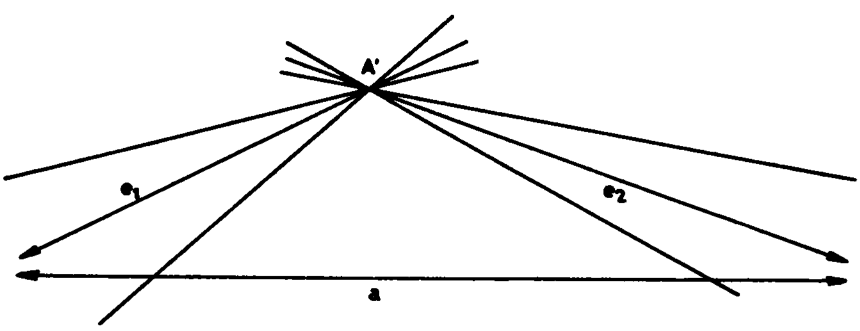


7. ábra

a, á és AÁ egyenesek, melyben két derékszög lenne. Ilyen háromszög létezését pedig szintén egy abszolút geometriai tétel tiltja. Ily módon *az abszolút geometriában találtunk adott ponton áthaladó egyenest, mely nem metszi az adott egyenest.*

Most már megválaszolhatjuk azt a kérdést is, miért jutott Lámbert a tompaszög-hipotézissel ellentmondásra. A tompaszög-hipotézis egyébként ekvivalens a következő állítással: *bármely két egyenes metszi egymást.* Tehát míg Lambert utolsó axiómája azt állította, hogy bármely két egyenes metszi egymást, addig az ő általa is elfogadott első négy axiómacsoportból egy ellentétes állítás következett, mely szerint létezik két olyan egyenes, melyek nem metszik egymást. A derék-, hegyes- és tompaszög-hipotézis megfogalmazható úgy is, hogy a Lambert-négyszög (vagy Saccheri-négyszög) szögei helyett a háromszög belső szögeit helyettesítjük. Az így kimondott hipotézisek teljesen egyenrangúak lesznek az eredeti hipotézisekkel. *Tehát: ha a háromszög szögösszegét két derékszögnek vesszük, ez ekvivalens lesz a párhuzamossági axiómával, ha kisebbnek vesszük, mint két derékszög, ez ekvivalens lesz a párhuzamossági axiómával ellentétes axiómával* (a hiperbolikus geometriában, ezek szerint, a háromszög szögösszege kisebb, mint 180°). A tompaszög-hipotézis, akár háromszögre, akár Lambert- vagy Saccheri-négyszögre fogalmazzuk meg, ellentmond mind az euklideszi, mind a hiperbolikus geometriának. Az ellentmondás forrása ugyanis e két geometria közös részében van, az abszolút geometriában. Létezik azonban olyan geometria is, amelyben szépen megfér a tompaszög-hipotézis. Ez a geometria, amelyet e l l i p t i k u s g e o m e t r i á n a k nevezünk, már nem csak egy, hanem több axiómában is különbözik az euklideszi axiómarendszertől. Ebben a geometriában tehát bármely két egyenes metszi egymást, és a háromszög belső szögeinek összege több mint 180°.

Az egymást nem metsző egyenesek létezésén túlmenően azt már nem bizonyíthatjuk az abszolút geometriában, hogy egy ponton át pontosan egy ilyen egyenes van, mert akkor tulajdonképpen a párhuzamossági axiómát bizonyítanánk be, fából vaskarika azonban sose lesz. Következésképp az abszolút geometriában eldöntetlen az a kérdés, hogy egy adott ponton át egy vagy több olyan egyenes fut át, mely nem metszi az adott egyenest (hogy van ilyen egyenes, azt azért biztosan tudjuk). De hogyan is nevezzük az ilyen egyenest vagy egyeneseket? Párhuzamosoknak nem nevezhetjük, mert ez egy pontosan meghatározott fogalom az euklideszi geometriában, márpedig ugyanazon szóval két fogalmat jelölni nem célszerű. Nevezzük el a b s z o l ú t p á r h u z a m o s o k n a k ! Történjék ez annak jeléül, hogy abszolút geometriabeli objektumról van szó, és hogy azért valamiben hasonlítanak ezen objektumok az euklideszi párhuzamosokra. Ily módon az abszolút geometriában olyan objek-



8. ábra

tumot találtunk, mely nem felel meg pontosan és egészében egyetlen euklideszi objektumnak sem. Rokonsági kapcsolat már fellelhető, hisz az abszolút párhuzamos egyeneseknek speciális esete a párhuzamos egyenes, mert az abszolút jelzőt akkor hagyhatjuk el, ha pontosan egy ilyen egyenes létezik.

Ha már bevezettük az abszolút párhuzamos egyenesek fogalmát, nézzük meg milyen tulajdonságokkal rendelkeznek. Egy egyenessel abszolút párhuzamos egyenesek közül, ha több ilyen létezik, kettőnek kitüntetett szerepe van (8. ábra), mely szerep abból áll, hogy elválasztják az Á-n áthaladó összes abszolút párhuzamos egyenest azon egyenesektől, melyek metszik az **a** egyenest. Képzeljük el, hogy megforgatunk egy egyenest a rögzített Á pont körül. Ekkor a forgó egyenes mind messzebbi pontban metszi az **a** egyenest, mígnem egyszerre csak elpattan tőle s ekkor az elválasztó egyenes helyzetébe kerül, tovább forogva pedig az abszolút párhuzamos egyenesek helyzetét veszi fel, míg annyira el nem forgatjuk, hogy a másik oldalon újból messe egyenesünket. Ezt a két kitüntetett (e_1 és e_2) abszolút párhuzamos egyenest e l p a t t a n ó e g y e n e s e k n e k nevezzük, az összes többi abszolút párhuzamos egyenest pedig u l t r a p a r a l e l e g y e n e s e k n e k. Az elpattanó egyeneseket úgy kell elképzelni, mint vég nélkül közeledő egyeneseket, melyek sohasem érik el egymást (akár egy nyílegyenesen a messzeségbe futó sínpár), az ultraparalel egyenesek pedig teljesen elkerülik egymást, azzal hogy ezt egy síkon belül kell elképzelni.

Míg ezen új fogalmak az abszolút geometriában hipotetikusak, addig a hiperbolikus geometriában valósággá válnak, hisz ott axiómába foglaltuk, hogy egy egyenesen kívüli pontból több olyan egyenes húzható meg, mely nem metszi az adott egyenest: tehát létezni fog két elpattanó és számtalan ultraparalel egyenes. Ezzel szemben az euklideszi geometriában az abszolút párhuzamos, az elpattanó és az ultraparalel egyenesek az egyedülálló párhuzamos fogalmába sűrűsödnek össze.

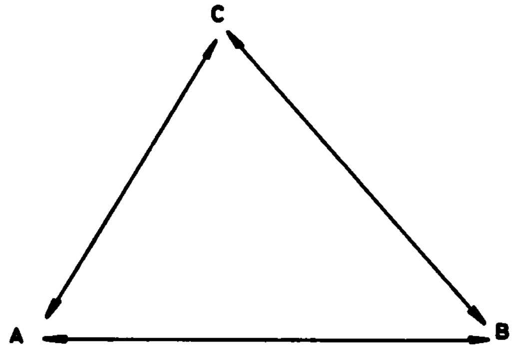
A továbbiakban két elpattanó egyenesről fogunk beszélni, mert végső soron nem is fontos, hogy melyik egyenes pattan el melyiktől, hisz ha egyik elpattan a másiktól, ez fordítva is igaz lesz. Hasonló meggondolás alapján beszélhetünk ultraparalel egyenesekről is.

Láttuk már, hogy az abszolút geometriában óvatosan fogalmaztunk, nem tudtuk ugyanis, hogy egy fogalom létezik-e vagy sem, de azon feltétel mellett, hogy létezik, elmondhattuk róla, hogy ilyennek, vagy olyannak kell lennie. Az abszolút geometriát ily módon továbbépítve egy sor feltételes állítás fog előállni, mint például a következő: *ha létezik két ultraparalel egyenes, akkor szükségképpen van közös merőlegesük.*

Bolyai János is így indult el az *Appendix*ben, csakhogy ő addig fűzte e hipotetikus tételek és fogalmak láncát, ameddig csak lehetett. Mi azonban, a nagyobb bizonyosság kedvéért, térjünk át már most a hiperbolikus geometria útjaira, ahol, mint már említettük, léteznek mind az elpattanó, mind az ultraparalel egyenesek.

Foglaljuk össze röviden, mit is tudtunk meg eddig a hiperbolikus geometriáról! A hiperbolikus geometria olyan axiómarendszeren nyugszik, mely csak egyetlenegy axiómában különbözik az euklideszi axiómarendszertől, nevezetesen a párhuzamossági axiómában; a hiperbolikus geometriában a háromszög belső szögeinek az összege kisebb mint 180° (ebből kifolyólag bármely négyszög belső szögeinek összege kisebb mint 360°, hisz a négyszög két háromszögből áll); egy egyenesen kívüli pontból két elpattanó és számtalan ultraparalel egyenes húzható, és ezek közül egy sem metszi az adott egyenest.

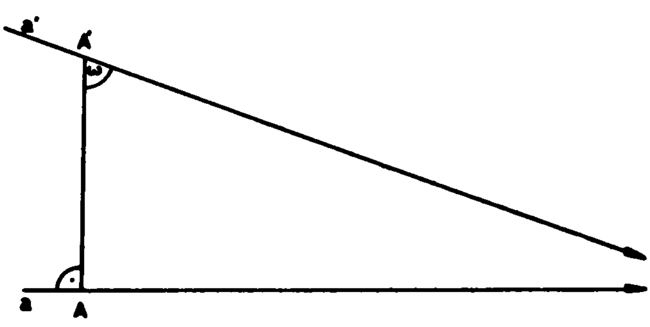
Az elpattanó egyenesek különösen érdekes objektumok a hiperbolikus geometriában. Rájuk teljes joggal mondhatjuk, hogy egymással nulla fokos szöget zárnak be. Képzeljünk el most három olyan egyenest, melyek közül kettő-kettő egymástól elpattanó egyens (9. ábra). Az ilyen alakzatot a s z i m p t o-



9. ábra

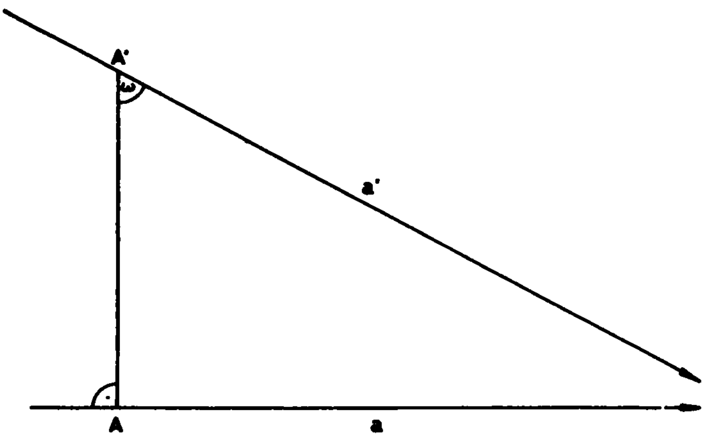
t i k u s h á r o m s z ö g n e k nevezzük. Rá egy sor furcsaság érvényes. *Belső szögeinek összege nulla fok!* Már említettük, hogy a hiperbolikus geometriában nincsenek hasonló háromszögek, ha két háromszög szögei rendre megegyeznek, akkor a két háromszög egybevágó is. Tehát *bármely két aszimptotikus háromszög egybevágó!* Annak ellenére, hogy az aszimptotikus háromszög mindegyik oldala egy végelen egyenes, *területe véges lesz!*

Az elpattanó egyenesekből még két, igen érdekes fogalom származtatható. Legyen á az Á ponton áthaladó az a egyenestől elpattanó egyenes (10. ábra).



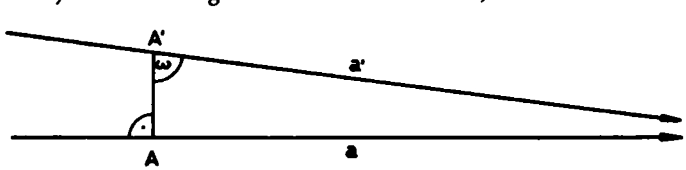
10. ábra

Bocsássunk az **Á** pontból merőlegeset az **a** egyenesre, jelöljük **a**-val az **á** és az **AÁ** egyenesek által bezárt szöget. Az **a** szöget nevezzük elpattanási szögnek, az **AÁ** szakaszt pedig elpattanási távolságnak. Ha adott az **a** egyenes és az **Á** pont, akkor természetesen adott az elpattanási távolság is (csak a merőlegest kell meghúzni), de ezáltal adott lesz az elpattanási szög is (ehhez elegendő az **Á**-n áthaladó egyik elpattanó egyenest meghúzni). Tehát *bármely elpattanási távolságnak egyértelműen megfelel egy elpattanási szög*. Ezt az egyértelmű megfeleltetést célszerű függvénynek is felfogni, vagyis egy olyan gépnek, mely ugyanazon bemenő adatra mindig egyféleképpen reagál, ugyanazon kimenő adatot produkálva. A mi esetünkben még az is érvényes, hogy két különböző bemenő adatra (távolságra), két különböző kimenő adat (szög) jelenik meg. Jelöljük meg Π-vel ezt a függvényt, mely bármely **AÁ** távolságra egy meghatározott ω szöget jelöl ki. Figyeljük most meg, milyen módon is függ az elpattanási szög az elpattanási távolságtól! Minél nagyobb



11. ábra

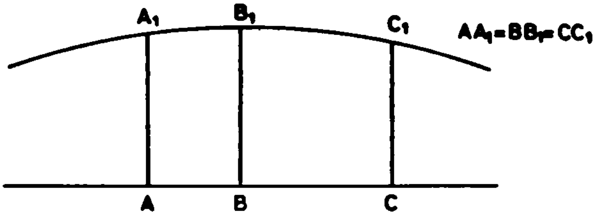
lesz az **AÁ** távolság, annál kisebb lesz az ω szög (11. ábra), és fordítva, minél kisebb lesz az **AÁ** távolság, annál közelebb lesz az ω szög a derékszöghöz (12. ábra). A derékszöget ω csak akkor érné el, ha **AÁ** minden határon túl



12. ábra

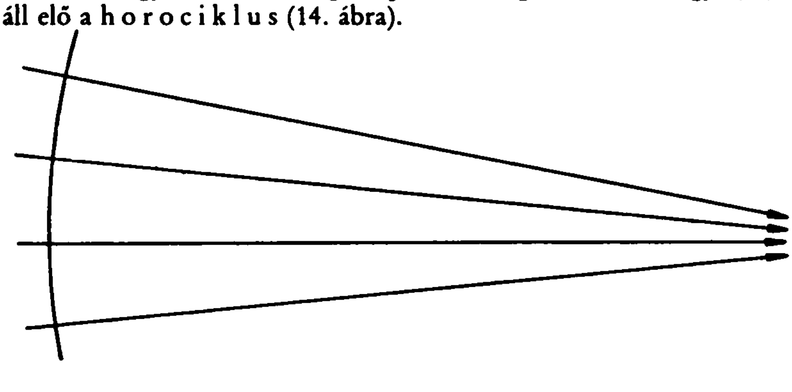
zsugorodna. Itt azonban egy váratlan analógiával találjuk szembe magunkat. Az elpattanási szög, vagyis az euklideszi geometria nyelvén a „párhuzamossági" szög, éppen az euklideszi geometriában derékszög! Az euklideszi geometriában ugyanis két párhuzamosnak közös merőlegese van. Ezek után így is fogalmazhatunk: *az euklideszi geometria a hiperbolikus geometria határesete, ha a távolságok határtalanul csökkennek* (ez esetben ugyanis az elpattanási szög derékszög felé tart). Mivel az euklideszi geometria ezek szerint a végtelen kis távolságok mértana, érthető az is, miért felel meg olyan jól az euklideszi geometria a földi méreteknél, ugyanis a földi méretek parányinak adódnak a csillagászati méretekhez viszonyítva.

A hiperbolikus geometriában nemcsak különleges (elpattanó és ultraparalel) egyesenesek vannak, hanem léteznek a körön kívül különleges görbék is, melyekhez hasonló nem található az euklideszi geometriában. Ismerkedjünk meg két ilyen görbével! Ha a hiperbolikus geometriában egy egyenestől egyenlő távolságra pontokat rajzolunk, ezek nem fognak egyenest alkotni (13. ábra). Az



13. ábra

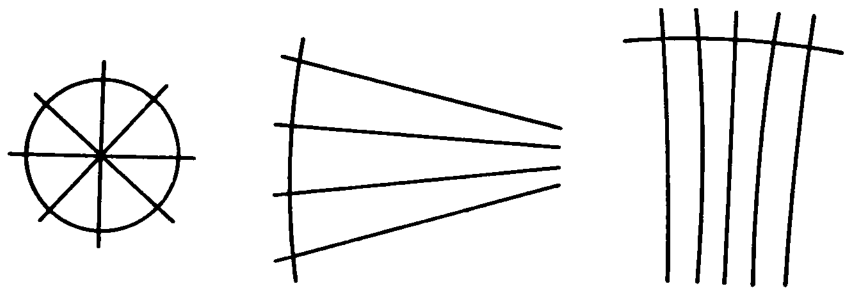
ezen pontok alkotta görbét e k v i d i s z t á n s g ö r b é n e k nevezzük. Az ekvidisztáns görbe euklideszi esetben (nagyon kis távolságok) egyenessé simulna ki. Képzeljünk el most egy számtalan egymástól elpattanó egyenesből álló egyenessereget, más szóval mindazokat az egyeneseket, melyek elpattannak egy adott egyenestől (14. ábra). Egy tetszőleges kör középpontját toljuk ki a végtelenbe, mégpedig épp oda, ahol ezen elpattanó egyenesek a legjobban megközelítik egymást. Míg az euklideszi geometriában a végtelenbe tolt középpontú körből egyenes lesz, addig a hiperbolikus geometriában egy újfajta görbe áll elő a h o r o c i k l u s (14. ábra).



14. ábra

Úgy tűnik most, hogy e sokféle egyenes és görbe eléggé komplikálja a hiperbolikus geometria tanulmányozását. Azonban a hiperbolikus geometria ismét meglepetéssel szolgál. Rövidesen kiderül, hogy az egyenesek és a görbék között szoros kapcsolat van, s ezáltal az eddigi ismeretek rendszerezhetőek.

Nevezzük egyenesseregnek azon egyeneseket, melyek egy ponton mennek át, elpattanó egyenesseregnek azokat az egyeneseket, melyek egy adott egyenestől elpattannak és ultraparalel egyenesseregnek azokat, melyek elkerülik egymást. Minden ilyen egyenessereghez igen természetes módon tartozik egy görbe is, melyet az egyenessereg trajektóriájának is nevezünk: az egyenessereg trajektóriája az a görbe, amely az egyenessereg minden egyenesét derékszög alatt metszi. Ezen görbékről a következő derült ki: *a közönséges egyenessereg trajektóriája a kör, az elpattanó egyenessereg trajektóriája a horociklus, az ultraparalel egyenessereg trajektóriája pedig az ekvidisztáns görbe* (15. ábra).

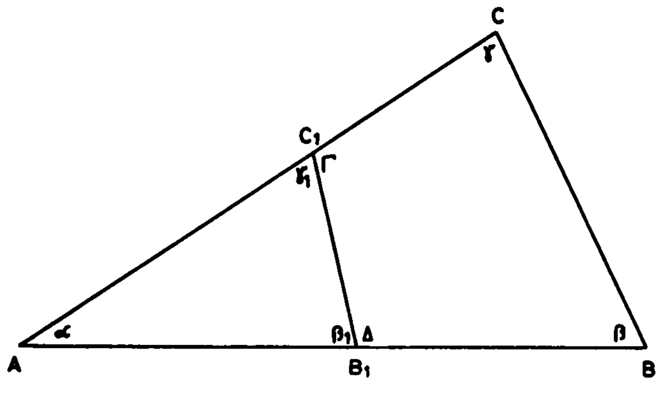


15. ábra

Az az állítás, miszerint a háromszög belső szögeinek szögfelezői egy ponton mennek át, s ez a pont a háromszögbe írható kör középpontja, az abszolút geometriához tartozik, mert bizonyításánál nem szükséges felhasználni a párhuzamossági axiómát, s ezáltal érvényes mind az euklideszi, mind a hiperbolikus geometriában. A háromszög köré írható kör létezésének bizonyításához azonban már szükséges a párhuzamossági axióma, s emiatt az a tétel, miszerint minden háromszög köré kör írható, csak az euklideszi geometriában érvényes, a hiperbolikusban már nem. Azért a hiperbolikus geometriában is lesznek olyan háromszögek, melyek köré kör írható, csak minden háromszögről nem állítható ez. Egészen pontosan a következő lesz a helyzet: *a háromszög oldalfelezői vagy egy ponton mennek át, és ekkor a háromszög köré kör írható, vagy egymástól elpattanó egyenesek lesznek, és ekkor a háromszög köré horociklus írható, vagy ultraparalel egyenesek lesznek, és ekkor a háromszög köré ekvidisztáns görbe írható.*

Időzzünk még egy kicsit az egyik legegyszerűbb geometriai objektumnál: a háromszögnél. Azt már láttuk, hogy a hiperbolikus geometriában a háromszög belső szögeinek összege mindig kisebb 180°-nál, ez az állítás ugyanis ekvivalens a hegyesszög-hipotézissel. Most egy még meglepőbb tulajdonság következik: *a háromszög belső szögeinek összege nem ugyanannyi minden háromszögnél.* Ezen állítás igazolására a legmegfelelőbb a r e d u c t i o a d a b s u r d u m m ó d s z e r. A lényege abban van, hogy a bebizonyítandó állítás helyett annak az ellenkezőjét tételezzük fel igaznak. Ha a bebizonyítandó állítás valóban fennáll, az ellenkezőjét pedig egyelőre szintén igaznak vettük, akkor a két ellentmondó állítás előbb-utóbb összeütközik és paradoxonhoz vezet. Más szóval olyasvalami fog következni feltevésünkből, amiről már rég tudjuk, hogy nem lehetséges. Ha az ellentmondás-vadászat sikerrel járt, akkor el kell vetnünk feltevésünket az állításunknak ellentmondó állítás igazáról. Ebből pedig az következik, hogy maga az állításunk az igaz, hisz harmadik lehetőség nincs. Állításunkat tehát bebizonyítottnak tekinthetjük. Ezzel a módszerrel az eddigiek során is találkoztunk már! Lambert és Saccheri tulajdonképpen ezzel a módszerrel próbálták bebizonyítani a párhuzamossági axiómát a többiből kiindulva. G. H. Hardy szerint „a reductio ad absurdum, amit Euklidesz oly nagyon kedvelt, a matematikusok egyik legélesebb fegyvere. Jóval kényesebb kezdés, mint bármely sakkmegnyitás: a sakkjátékos ugyanis ilyenkor feláldozhat egy parasztot vagy akár egy tisztet, de a matematikus számára az egész játszma a tét".

Próbáljuk alkalmazni ezt a módszert! Tételünk a következő: a háromszög belső szögeinek összege nem állandó. Adjuk fel most ideiglenesen tételünket és fogadjuk el a következőt: a háromszög belső szögeinek összege állandó. Célunk most, hogy ennek következményei között ellentmondásra akadjunk. Rajzoljunk az **ABC** háromszögbe egy másik **AB**$_1$**C**$_1$ háromszöget, úgy hogy az A csúcsnál levő α szög közös legyen (16. ábra). Feltételezésünk szerint tehát az



16. ábra

ABC és **AB**$_1$**C**$_1$ háromszögek szögösszege egyenlő (hogy ez a szögösszeg kisebb mint 180°, azt már tudjuk). Mivel α mindkét háromszög közös szöge, a szögösszegek egyenlősége annyit jelent, hogy

$$\gamma+\beta=\gamma_1+\beta_1$$

Másrészt pedig $\gamma_1+\Gamma$ és $\beta_1\Delta$ külön-külön egyenesszöget, vagyis 180°-os szöget alkotnak, együtt pedig teljesszöget:

$$\gamma_1+\Gamma+\beta_1+\Delta=360°$$

Mivel $\gamma_1+\beta_1=\gamma+\beta$, ezért $\gamma_1+\beta_1$, helyett $\gamma+\beta$-t is írhatunk az előbbi egyenlőségbe:

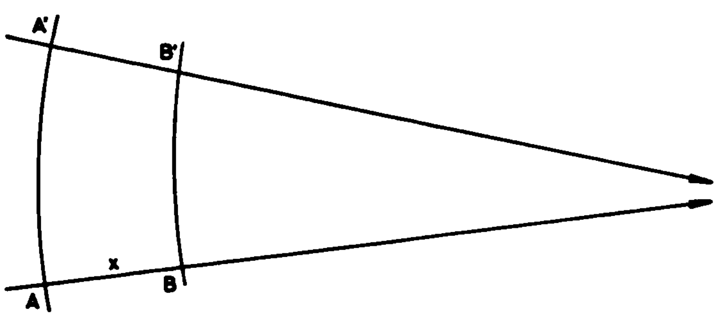
$$\gamma+\beta+\Gamma+\Delta=360°$$

És itt az ellentmondás! Azt kaptuk ugyanis, hogy a $\mathbf{C_1B_1BC}$ négyszög belső szögeinek összege 360°. Ez pedig ellenkezik a hiperbolikus geometria egyik axiómájával, mégpedig a párhuzamossági axiómával ellentétes axiómával, hisz ennek egyik alakja pont a következő: a négyszög belső szögeinek összege kisebb mint 360°. Feltételezésünk tehát ellentmondásra vezetett és el kell vetnünk. Igaznak ezért a következő állítást kell vennünk: a háromszög belső szögeinek összege nem állandó.

A 180°-nak és a háromszög szögösszegének a különbségét nevezzük el szögdefektusnak és jelöljük δ-val.
Tehát

$$\delta=180°-\alpha-\beta-\gamma$$

A δ szögdefektus a háromszög egyik jellemzője.



17. ábra

Miképp az euklideszi geometriában, éppúgy a hiperbolikus geometriában is tudunk mérni. Mielőtt azonban mérni kezdenénk a hiperbolikus geometriában, célszerű megismerkedni a hiperbolikus geometria paraméterével. Azt már tudjuk, hogy az elpattanó egyenessereg trajektóriája horociklus. Tekintsünk most két ugyanazon egyenessereghez tartozó horociklust (17. ábra), melyek párhuzamosak és x távolságra vannak egymástól. Két ilyen horociklus esetében, az **AÁ** és **BB'** ívek hosszúságának aránya a következőképpen adódik:

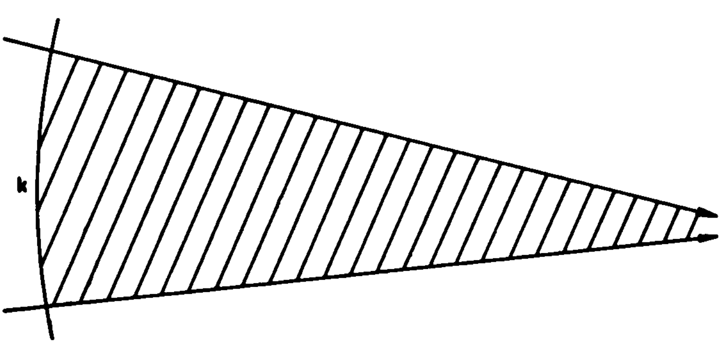
$$\mathbf{A\acute{A}}:\mathbf{BB'}=\sqrt[k]{e^x} \qquad (e=2{,}71828\ldots)$$

Bármely egyenessereget és bármely két horociklust vizsgálva, a **k** számra mindig ugyanazt az értéket kapjuk, más szóval **k** a hiperbolikus geometriában egy pozitív állandó. Ezt a k számot nevezzük a h i p e r b o l i k u s g e o m e t r i a p a r a m é t e r é n e k.

E képletből azonban sok más is kiolvasható. Többek között ez is: ha **k** határtalanul nő, más szóval a végtelenhez tart, akkor a megfelelő ívek aránya 1 lesz, vagyis a megfelelő ívek egyenlőek lesznek. Itt azonban újra felismerhető az euklideszi eset! A párhuzamos horociklusoknak, tudjuk, az euklideszi geometriában párhuzamos egyenesek felelnek meg. Márpedig párhuzamos egyenesek párhuzamos egyenesekből egyenlő szakaszokat metszenek ki (gondoljunk a paralelogramma esetére). Így is fogalmazhatunk: *ha a hiperbolikus geometria paramétere a végtelenhez tart, akkor az euklideszi geometria áll elő.*

A fenti képletből az is kiolvasható, hogy **k** azt a távolságot jelenti, melynél a megfelelő ívek aránya pont **e**. Ez pedig azt jelenti, hogy a **k** hosszúságú szakasznak a hiperbolikus geometriában kitüntetett szerepe van, hisz ezt a szakaszt, mérés nélkül is, tisztán logikai úton, meg tudjuk határozni.

Az euklideszi geometriában létezik egy kitüntetett szög, melyet szintén logikai úton értelmezünk, ez a derékszög (értelmezés: a derékszög az a szög, amely a mellékszögével egyenlő). Kitüntetett szakasz azonban az euklideszi geometriában nem létezik. Mivel létezik kitüntetett szög az euklideszi geometriában, könnyű a szögeket mérni: csak a derékszöghöz kell hozzámérni őket, ez a legtermészetesebb szögmérés. A hosszúságmérés esetében azonban, mivel nincs kitüntetett szakasz, az egységet tetszőlegesen választjuk. A hiperbolikus geometriában a szögmérés ugyanúgy történik, mint az euklideszi geometriában. A derékszög értelmezése ugyanis nem függ a párhuzamossági axiómától, ezért átvihető a hiperbolikus geometriába. A hiperbolikus hosszúságmérésnél azonban már más a helyzet, mivel létezik kitüntetett szakasz: a **k** hosszúságú szakasz. Természetesnek adódik ezt a szakaszt egységnek venni (**k**=1), és a többi szakaszt úgy mérni, hogy meghatározzuk: az adott szakaszban hányszor fér el a mi egységünk. Az így kapott hosszúsági mérőszámokat a hiperbolikus geometriában t e r m é s z e t e s m é r ő s z á m o k n a k nevezzük.



18. ábra

Mivel a terület méréséhez is egység szükséges, megpróbáljuk a természetes hosszegység segítségével a területmérési egységet meghatározni. Tekintsünk meg e célból egy horociklus cikket, melyet egy **k** hosszúságú horociklus ív és két elpattanó egyenes határoz meg (18. ábra). Ezen cikk területe legyen a területmérési egység és az ezzel a mértékkel mért területek mérőszámát nevezzük természetes mérőszámnak.

Gauss Bolyai Farkashoz intézett, már említett leveléhez, melyet az *Appendix* kézhezvétele után írt, egy bizonyítást csatolt, melyben meghatározta a háromszög területének képletét a hiperbolikus geometriában. Eredménye szerint a *háromszög területe természetes mérőszámban a szögdefektussal egyenlő:*

$$T=\delta=\pi-\alpha-\beta-\gamma$$

(A szögeket fokokon kívül radiánokban is szokták mérni, ekkor a 180°-os szög π radián lesz.)

Innen az következik, hogy a hiperbolikus geometriában a háromszög területe véges, korlátos, bármilyen nagy háromszöget mérünk is, mivel e terület π-nél nagyobb nem lehet. A legnagyobb területű, π területű, háromszög az aszimptotikus háromszög lesz, mert nála $\alpha+\beta+\gamma=0$.

A hiperbolikus sík megismerése után lépjünk most ki a hiperbolikus térbe! E térben a síkon és a gömbön kívül még két igen érdekes felület létezik: az e k v i d i s z t á n s f e l ü l e t és a h o r o s z f é r a. Ekvidisztáns felületnek azt a felületet nevezzük, melynek pontjai egy adott síktól egyenlő távolságra vannak. Horoszférának pedig egy olyan gömböt nevezünk, melynek a középpontját a végtelenbe vittük. Az értelmezés tehát analóg módon történik, mint a síkban. Még az is érvényes, hogy *az ekvidisztáns felület egy térbeli ultraparalel egyenessereg trajektóriája, a horoszféra pedig térbeli elpattanó egyenessereg trajektóriája.*

Ha az ekvidisztáns felületet önmagában szemléljük, akkor azt a furcsa dolgot vesszük észre, miszerint az ekvidisztáns felület pontjai és ekvidisztáns görbéi ugyanolyan tulajdonságokkal rendelkeznek egymáshoz viszonyítva, mint a pont és az egyenes a hiperbolikus síkban. Ezt matematikai szakkifejezéssel úgy mondjuk, hogy *az ekvidisztáns felület b e l s ő g e o m e t r i á j a a hiperbolikus geometria.* Ha a horoszférát is ilyen vizsgálatnak vetjük alá, még furcsább dolgot észlelünk! *A horoszféra belső geometriája az euklideszi geometria lesz!* Az euklideszi pontok szerepét a horoszféra pontjai játsszák, az egyenesek szerepét pedig a horociklusok. Ha az euklideszi axiómákban a pont és egyenes helyére ezen új fogalmakat helyettesítjük, az így kapott állítások teljes egészében érvényesek lesznek a horoszférára. Ez az eredményünk szinte hihetetlen: a párhuzamossági axiómával együtt elvetett euklideszi geometria a hiperbolikus geometriában főnixként újra megjelenik.

A gömb az euklideszi és a hiperbolikus geometria közös objektuma, úgyhogy róla a hiperbolikus geometriában nem sok újat mondhatunk. A gömb belső geometriája egyébként a már régóta ismert gömbháromszögtan.

4. *A hiperbolikus geometria megállja a helyét*

„Értelmünk a létért való küzdelemben fejlődött ki, tehát nem abból a célból, hogy a világ dolgain elmélkedjünk."

Oliwer Lodge

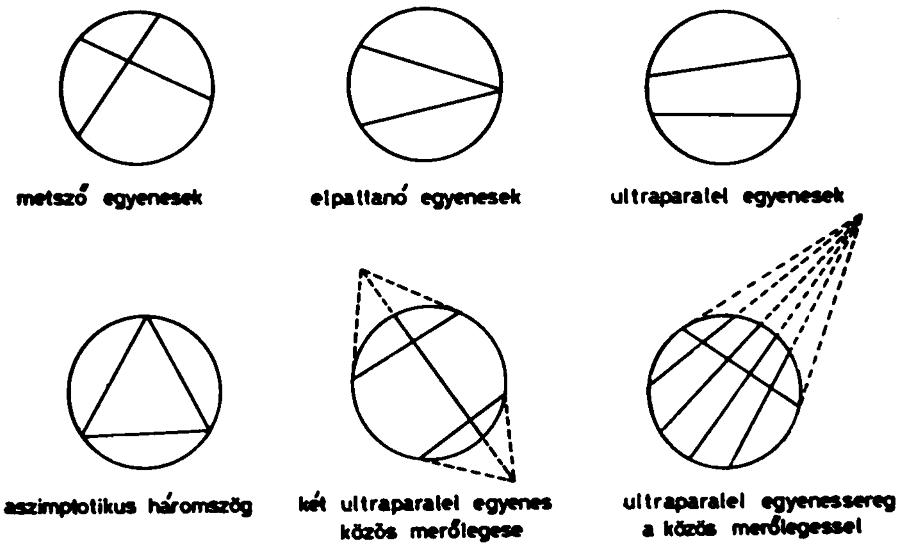
„Mit gondoljunk erről a kérdésről: Igaz-e az euklideszi geometria? Semmi értelme sincs... Egyik geometria sem igazabb, mint a másik; csupán célszerűbb lehet."

Henri Poincare

A hiperbolikus geometria elnevezése Felix Klein matematikustól származik. Ő a síkot, elméletben, kibővítette végtelen távoli pontokkal, melyek mind egy végtelen távoli egyenesen helyezkednek el. Ekkor a következő helyzet állt elő: az euklideszi geometriában az egyenesnek egy végtelen távoli pontja van (az a pont, melyben az egyenes két ága találkozik a végtelenben) és ez a helyzet a jól ismert parabolával is (két ága a végtelen távoli pontban találkozik), ezért az euklideszi geometriát parabolikus geometriának nevezte el. A Bolyai–Lobacsevszkij geometriában az egyenesnek két végtelen távoli pontja van, akár a hiperbolának, ezt a geometriát emiatt hiperbolikus geometriának nevezte el. Az elliptikus geometriában az egyenesnek nincs végtelen távoli pontja, éppúgy mint az ellipszisnek, így kapta a nevét is.

Már említettük a hiperbolikus geometria ellentmondás-mentességének kérdését. A probléma a következő: elegendő biztosíték-e az, miszerint a hiperbolikus geometriában eddig nem találtunk ellentmondást ahhoz, hogy ezentúl sem fog föllépni ellentmondás? Ha majd ezt a geometriát még tovább fejlesszük, megtörténhet-e egyszer, hogy bebizonyítunk egy állítást és úgyszintén annak ellenkezőjét? Kategorikus választ erre a kérdésre ma sem tudunk adni. Azt azonban már tudjuk, hogy a hiperbolikus geometria az ellentmondás-mentesség kérdésében semmivel sem különb az euklideszi geometriánál: ha az euklideszi geometriában jelentkezne ellentmondás, akkor a hiperbolikus geometria is ellentmondásos lenne; ez azonban fordítva is érvényes: ha a hiperbolikus geometriában találnánk ellentmondást, akkor az szükségképpen az euklideszi geometria ellentmondásosságát eredményezné. Azt is mondhatnánk, hogy *az euklideszi és a hiperbolikus geometria ellentmondás-mentessége együtt áll vagy bukik.* Arra a kérdésre, miért vonja maga után az euklideszi geometria ellentmondásossága a hiperbolikus geometria ellentmondásosságát csak utalunk, felidézve azt, miszerint a horoszféra belső geometriája az euklideszi geometria: tehát ha az euklideszi geometria ellentmondásos, akkor ellentmondásos lesz a horoszféra belső geometriája is, ez pedig a hiperbolikus geometria szerves része, s ezért a hiperbolikus geometria is ellentmondásos lesz.

A másik kérdéssel, miszerint a hiperbolikus geometria ellentmondásossága maga után vonja az euklideszi geometria ellentmondásosságát, kissé részletesebben foglalkozunk. Ennek igazolására egy m o d e l l t kellene találni az euklideszi geometriában, melyben maradéktalanul érvényes a hiperbolikus geometria (ahogyan a horoszféra az euklideszi geometria modellje a hiperbolikus geometriában). E modell keretében kétféle objektumot kell találni az euklideszi geometriában, úgy hogy az egyik a hiperbolikus pont, a másik a hiperbolikus egyenes szerepét játssza, és egymáshoz úgy viszonyuljanak, mint az „igazi" hiperbolikus pont és egyenes. A többféle ilyen modell közül talán a következő a legszemléletesebb. Képzeljünk el egy összeszűkült világot: az egész világ egy kör belseje. A képzelt világ lakói a körön kívül semmit sem ismernek, sőt a kövonal sem tartozik a világukhoz. Ez az összeszűkült világ lesz a hiperbolikus geometria modellje az euklideszi geometriában. Hiperbolikus pontnak a kör belsejébe eső pontokat választjuk, hiperbolikus egyenesen pedig olyan szakaszt fogunk érteni, amilyent a kör egy őt szelő egynesből kimetsz, tehát az egyenesek a kör húrjai lesznek (átmérői is), de a végpontok nélkül, mert maga a kör nem tartozik modellünkhöz. E két euklideszi objektum (kör belsejébe eső pont, kör húrjainak a belsejébe eső része) egymás közti viszonyára a hiperbolikus geometria axiómái lesznek érvényesek. Természetesen a szakaszok és szögek egyenlőségét sem a megszokott értelemben kell venni, a modellben a hiperbolikus mérés olyan értelmezést kap, mely nem azonos az euklideszi méréssel. A 19. ábrán néhány hiperbolikus objektum megfelelőjét mutatjuk be a modellben.



19. ábra

Ily módon a hiperbolikus síkot teljes egészében beágyaztuk az euklideszi síkba és nyilvánvaló, ha a hiperbolikus geometriában ellentmondás jelenne meg, az az összeszűkült világ révén, az euklideszi geometriához is hozzátartozna.

Ez minden, amit a hiperbolikus geometria ellentmondás-mentességéről tudunk. Még egyszer összefoglalva: *azon feltétel mellett, hogy az euklideszi geometria ellentmondásmentes, a hiperbolikus geometriáról is állíthatjuk ugyanezt.*

A legváratlanabb az, hogy az euklideszi geometria ellentmondás-mentességének kérdése semmivel sem könnyebb mint a hiperbolikus geometria esetében: az euklideszi geometria ellentmondás-mentessége sem bizonyítható be csupán az euklideszi geometria keretein belül. Ahogyan a hiperbolikus geometria ellentmondás-mentességét az euklideszi geometria ellentmondás-mentességére vezettük vissza, az euklideszi geometria ellentmondás-mentességét az aritmetikai ellentmondás-mentességére vezethetjük vissza. Ehhez nem kell mást tenni, mint a mértant a számok nyelvén fogalmazni meg. E célra a jól ismert koordináta-módszer használható: a sík egy pontjának például két szám felel meg, melyek a pont koordinátái. Így megkaphatjuk az euklideszi geometria egy modelljét az aritmetikában, tehát *ha az aritmetika ellentmondásmentes, akkor ezt teljes bizonyossággal állíthatjuk az euklideszi geometriáról is.* A kérdést azonban ezzel sem döntöttük el végleg, hiszen az aritmetika ellentmondás-mentessége sem magától értetődő. Az ellentmondás-mentesség kérdése tehát olyan bonyolult probléma, melyre kategorikus választ ma még nem adhatunk.

Meggyőződtünk róla, hogy logikai szempontból a hiperbolikus geometria éppoly létjogosult, mint az euklideszi. Miért alakult ki akkor az euklideszi geometria elsőnek? Amit az ember a világból közvetlenül észlelhet, az csak szűk környezete, a kis távolságok esetében pedig az euklideszi geometria kifogástalan eredményeket ad. Márpedig az euklideszi geometria az életszükségletek kielégítéséért folytatott harc közepette alakult ki, gyakorlati célokat szolgálva és nem elvont elmélkedések útján. Az euklideszi geometriában több mint kétezer évig a tapasztalati tér geometriáját tisztelték, s más geometria létezésének gondolata még csak fel sem merült. Megértést kell tanúsítanunk azon kétkedés iránt is, mellyel a kortársak a hiperbolikus geometriát fogadták, hisz az új geometria létezése mellett csak logikai érvek szóltak, az euklideszi geometria mellett pedig tapasztalati érvek is.

Miután a hiperbolikus geometria rést ütött a geometriai ismereteket övező, szilárdnak hitt falon, egymás után tűntek fel a nemeuklideszi geometriák. S az affin, a projektív és a többi geometriának éppúgy joga van a létezésre, mint az euklideszinek. Hogy az új geometriák nem csupán logikai játékok, arról a világ Einstein és Minkowski munkássága által győződhetett meg először. A relativitáselmélet szerint ugyanis a tapasztalati térben nem az euklideszi geometria érvényes. Kis távolságok esetében (a kozmikus méretekhez viszonyítva) az euklideszi geometria persze gyakorlatilag teljesen megfelel a tapasztalati tér leírására. A csillagászati távolságok esetében azonban már nem ez a helyzet. Mely geometria lesz akkor érvényes a tapasztalati térben? A válasz korántsem egyszerű. Mai ismereteink szerint erre teljes egészében egyetlen geometria sem alkalmas. Tapasztalati terünk görbülete ugyanis az anyageloszlástól függően változik, s a tér más-más részeiben a megfelelő görbületű geometriát kellene alkalmazni. Az euklideszi geometria nem jöhet számításba, mert nincs benne görbület. A relativitáselmélet szellemében továbbá a tér három dimenziójához fel kell venni negyediknek az időt is és a négydimenziós téridőt kell tanulmányozni, ennek leírására pedig a Hermann Minkowski által kidolgozott geometria a legmegfelelőbb.

Forrásmunkák

1. Coxeter, H.S.M.: A geometriák alapjai. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.
2. Dávid Lajos: A két Bolyai élete és munkássága. Gondolat, Budapest, 1979.
3. Fetisov, A. I.: O euklidskoj i neeuklidskim geometrijama. Školska knjiga, Zagreb, 1981.
4. Lánczos Kornél: A geometriai térfogalom fejlődése. Gondolat, Budapest, 1976.
5. Meschkowski, Herbert: Temelji euklidske geometrije. Školska knjiga, Zagreb, 1978.
6. Prvanović, Mileva: Neeuklidske geometrije. Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1974.
7. Struik, Dirk: Kratak pregled istorije matematike. Zavod za izdavanje udžbenika SRS, Beograd, 1969.
8. Szász Pál: Bevezetés a Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometriába. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973.
9. Szénássy Barna: A magyarországi matematika története. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1974.

Rezime

Novi svet Janoša Bojaija

Nedavno se završilo 150 godina od otkrivanja prve neeuklidske geometrije, hiperboličke geometrije Bojaija i Lobačevskog. Tim povodom se u članku daje kratak istorijski osvrt na razvoj geometrije do pojave neeuklidskih geometrija, i uvod na elementarnom nivou u hiperboličku geometriju.

U prvom delu članka izlažu se neke okolnosti pod kojima se pojavila geometrija u staroj Grčkoj oko 300. god. pr. n. e. U drugom delu se čitalac informiše o osnovnim idejama aksiomatskog prilaza geometriji, daje se i poseban prikaz problema V. euklidovog postulata, tj. aksiome paralelnosti. Saopštavaju se i rezultati do kojih su došli Lambert i Sakeri u ispitivanjima aksiome paralelnosti: iako ni jedan ni drugi nisu uspeli dokazati da je aksioma paralelnosti posledica ostalih aksioma euklidske geometrije, ipak su dali veliki doprinos izučavanju tog pitanja. Uprkos dotadašnjim neuspesima početkom XIX. veka nagomilao se ogroman koristan materijal u vezi sa problemom paralelnosti. Potrebni su bili samo matematičari, sposobni i hrabri za genijalne korake. Taj genijalni korak napravili su tri velikana matematike Bojai, Lobačevski i Gaus. Oni su došli do uverenja da je aksioma paralelnosti nezavisna od ostalih aksioma euklidske geometrije. Ta ideja im je širom otvorila vrata obogaćivanju matematike novom geometrijom: hiperboličkom geometrijom.

U nastavku se opisuju godine u kojima je Bojai Janoš došao do svog otkrića i objavio ga kao dodatak (Appendix) uz matematički udžbenik svog oca, Bojai Farkaša. U životu Bojai Janoša, punom problema, neshvatanja i sukoba sa okolinom, za istoriju matemati-

ke najinteresantniji su odnosi sa ocem, koji je bio vrsni matematičar svoga vremena, i sa Gausom, prijateljem Bojai Farkaša iz studentskih dana.

U trećem delu se izlažu osnovni pojmovi apsolu'tne geometrije, kao i elementarni rezultati hiperboličke geometrije. U četvrtom delu se diskutuje problem logičke neprotivrečnosti hiperboličke i euklidske geometrije. Pokazuje se da je hiperbolička geometrija neprotivrečna ukoliko je to i euklidska geometrija. Zbog toga se ne postavlja pitanje koja je geometrija tačna, sa logičkog stanovišta, naime, obe su „podjednako" tačne, iako ni jedna ne opisuje stvarni prostor oko nas u svojoj složenosti, već samo pojedine aspekte realnog sveta.

Resummee

Die neue Welt von János Bolyai

Unlängst endeten 150 Jahre der Erfindung der nicht euklidischen Geometrie, der hyperbolischen Geometrie von Bolyai und Lovatsevsky. Zu dieser Gelegenheit wird in dem Artikel ein kurzer historischer Hinweis, über die Entwicklung der Geometrie von der nicht euklidischen Geometrie und eine, auf elementarischen Nivo gehaltene Einführung in die hyperbolische Geometrie, gegeben.

Im ersten Teil des Artikels werden einige Gegebenheiten angeführt, die zu Erscheinung der Geometrie, im antiken Griechenland, etwa 300 Jahre vor unserer Zeitrechnung, geführt haben. Im zweiten Teil, wird der Leser über die grundlegenden Ideen des axiomatischen Zutritts zur Geometrie, informiert; es wird auch ein Hinweis auf die Probleme der V. Euklidespostulates gegeben, d. h. auf die Probleme – Axiome der Paralelität. Die Resultate, zu denen Lambert und Sakeri gekommen sind, werden mitgeteilt; obwohl so der eine wir der andere nicht beweisen konnten, dass das Axiom der Paralelität Folge aller anderen Axiome der euklidischen Geometrie sind, gaben sie doch grossen Beitrag zur Untersuchung dieser Frage. Trotz der grossen bisderzeitigen Erfolgslosigkeit, wurde eine Menge von Materialen zum Problem der Paralelität zusammengetragen. Es wären Mathematiker genug fähig und tapfer zu genialen Tritten notig. Diese geniale Tritte haben drei Grössen der Mathematik getan: Bolyai, Lobatsevsy und Gauss. Sie sind zur Überzeugung gekommen, dass das Axiom der Paralelität unabhängig von den anderen Axiomen der euklidischen Geometrie ist. Diese Idee hat die Möglichkeiten der Bereicherung der Mathematik, mit neuer Geometrie geöffnet: mit der hyperbolischen Geometrie.

Weiterhin werden die Jahre bearbeitet, in denen Bolyai Janos zu seiner Entdeckung gekommen ist und diese als Beitrag (Appendix) zum mathematischen Lehrbuch seines Vaters Bolyai Farkas, erscheinen lies. Im Leben von Bolyai Janos, im Leben voller Probleme und Unverständnissen mit der Umgebung, ist für die Historie der Mathematik – sein verhältnis zum Vater, vorragendem Mathematiker, seiner Zeit und mit Gauss, dem Freunde von Bolyai Farkas, aus Studentenzeiten – interessant.

Im dritten Teil werden die grundlegenden Begriffe der absoluten Geometrie, sowie die grundlegenden Resultate der hyperbolischen Geometrie, ausgeführt. Im vierten Teil wird über das Problem der Widerspruchlosigkeit der hyperbolischen und euklidischen Geometrie, diskutiert. Es wird bemerkt, dass die hyperbolische Geometrie widerspruchlos, sofern sie auch euklidische Geometrie ist. Es wird daher die Frage gestellt, welche Geometrie, aus logischen Standpunkt stimmt, d. h. beide stimmen gleichmässig, obwohl keine das ganze Terrain um uns in seiner Kompliziertheit sondern nur einige Aspekte der reellen Welt, erklärt.