Krekó Béla–Szórád György

A NAGYMÉRETŰ LINEÁRIS PROGRAMOZÁSI PROBLÉMÁK MEGOLDÁSI MÓDSZEREIRŐL

0. BEVEZETÉS

Az utóbbi húsz évben rendkívül gazdag irodalmi anyag halmozódott fel a nagyméretű lineáris programozási problémák megoldási módszereiről. Amióta (1960-ban) DANTZIG és WOLFE megjelentették úttörő munkájukat (1), igen sok megoldási javaslat-módszer látott napvilágot. Az új keresését először a számítógépek kis kapacitása tette szükségessé, majd később az idő- és költségigény csökkentése.[1]

A feltárt módszerek két nagy csoportba sorolhatók:

1. a ***bázismanipulációs eljárások***, amelyek a szimplex módszer tulajdonságainak továbbfejlesztésére támaszkodnak,
2. a ***dekompozíciós eljárások***, amelyek célja az adott feladathoz tartozó új megoldási algoritmusok kidolgozása; általában több, kisebb, ill. könnyebb feladatra való bontással és ezek többszöri megoldásával.

Mi egyértelműen a második csoport módszereiért szállunk síkra, mert ezek nem csak gazdagították az optimumszámítás módszertanát, hanem lehetővé tették bizonyos – addig megoldhatatlan – problémák (pl. nem lineáris) megoldását, ill. gazdasági folyamatok modellezését és elemzését. Ez elsősorban a gazdasági tervezés igen fontos feladatkörére vonatkozik.

A továbbiakban ezért figyelmünket csak a dekompozíciós eljárásokra irányítjuk, de e gazdag halmazból is csak néhány fontos mozzanatra összpontosítunk.

1. A DEKOMPOZÍCIÓS ELJÁRÁS

Tekintsük az alábbi feladatot:

$$
\begin{array}{rl}
 & x_0 \geqq 0,\ x_1 \geqq 0,\ \ldots,\ x_q \geqq 0 \\
 & K_0 x_0 + K_1 x_1 + \ldots + K_q x_q \leqq b_0 \\
 & \qquad\quad A_1 x_1 \qquad\qquad\qquad \leqq b_1 \\
(1.1) & \\
 & \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad A_q x_q \leqq b_q \\
 & c_0^* x_0 + c_1^* x_1 + \ldots + c_q^* x_q \rightarrow \max.
\end{array}
$$

Azonnal látható, hogy ez egy lineáris programozási feladat, amely minden további nélkül megoldható szimplex módszerrel. Most azonban egy ettől eltérő lehetőséget kívánunk bemutatni, az ún. *dekompozíciós* eljárást.[2]

A tárgyalást megkönnyítheti a kérdéses feladat egy lehetséges közgazdasági interpretációja. Tegyük fel, hogy valamely gazdasági szervezetben a *központ* q különböző egység, ún. *szektor* tevékenységét irányítja, miközben maga is részt vesz a termelésben. Az erőforrások egy része közvetlenül a központ kezelésében van, más részük felett azonban a szektorok szabadon rendelkeznek. Ezért az (1.1) feladatban a b_0 a központi erőforrások, a $b_1, \ldots, b_q$ pedig a szektorerőforrások kapacitásvektorát jelenti. A K_0, K_1, ..., K_q mátrixok a központ, ill. a szektorok ráfordítási együtthatóit tartalmazzák, természetesen a központi erőforrásokra vonatkozólag. Ugyanakkor az $A_1, \ldots, A_q$ mátrixok az egyes szektorok saját erőforrásaikra vonatkozó ráfordítási együtthatóit mutatják. A c_0 a központi tevékenységek, a $c_1, \ldots, c_q$ pedig a szektortevékenységek hatékonysági együtthatóit ölelik fel. A központ tevékenységi szintjét az x_0 jelzi, a szektorok tevékenységi szintjét pedig az $x_1, \ldots, x_q$ vektorok képviselik. A cél annak az $(x_0, x_1, \ldots, x_q)$ tevékenységi rendszernek a meghatározása, amely a maximális hatékonyságot biztosítja.

Megemlítjük még, hogy a

$$K_0x_0+K_1x_1+\ldots+K_qx_q\leq b_0$$

reláció az ún. *központi feltételeket*, az

$$A_ix_i\leq b_i \qquad (i=1, \ldots, q)$$

reláció pedig az ún. *szektorfeltételeket* képviseli.

A lehetséges szektorprogramokat az

$$(1.2) \qquad L_i=\{x_i \mid x_i\geq 0,\ A_ix_i\leq b_i\} \qquad (i=1, \ldots, q)$$

előírással definiáljuk. (Ezek természetesen olyan értelemben lehetségesek, hogy csupán a szektorfeltételeket vesszük figyelembe.) Az L_i halmazról a mi vizsgálatainkban eleve feltételezzük, hogy korlátos.[3] Ez esetben az L_i olyan konvex poliédert jelent, amelynek csúcspontjai nem mások, mint az (1.2) alatt megadott egyenlőtlenségrendszer bázismegoldásai. Ha tehát a P_i oszlopvektorai megegyeznek ezekkel a bázismegoldásokkal, akkor az L_i az

$$(1.3) \qquad L_i=\{x_i \mid x_i=P_iv_i,\ v_i\geq 0,\ 1^*v_i=1\} \qquad (i=1, \ldots, q)$$

alakban is felírható.

Felhasználva az (1.3) alatt megadott formulát, az (1.1) alatti feladat így alakítható át:

$$(1.4) \qquad \begin{array}{l} x_0\geq 0, \quad v_1\geq 0, \ldots, \quad v_q\geq 0 \\ K_0x_0+(K_1P_1)v_1+\ldots+(K_qP_q)v_2\leq b_0 \\ \qquad 1^*v_1 = 1 \\ \\ \\ \qquad 1^*v_q=1 \\ c_0^*x_0+(c_1^*P_1)v_1+\ldots+(c_q^*P_q)v_q\to \max. \end{array}$$

Ezt nevezzük az (1.1) alatti feladat, az ún. *eredeti feladat, transzformált alakjának.* A két feladat között egyfajta ekvivalencia áll fenn, mégpedig a következő tételnek megfelelő formában:

1. tétel: Ha az $(x_0^0, v_1^0, \ldots, v_q^0)$ *vektorrendszer optimális megoldása a transzformált feladatnak, akkor az* $(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_q^0)$ *vektorrendszer, ahol*

$$x_i^0 = P_i v_i^0 \qquad (i=1, \ldots, q),$$

optimális megoldása az eredeti feladatnak.

Bizonyítás: Az állítás egyszerűen abból következik, hogy az (1.4)-et az (1.1)-ből az $x_i = P_i v_i$ transzformációval származtattuk, figyelembe véve persze azt is, hogy $v_i \geqslant 0$ és $1^* v_i = 1$.

E tétel szerint az eredeti feladat megoldása visszavezethető a transzformált feladat megoldására. Gyakorlati szempontból azonban ennek a lehetőségnek közvetlen felhasználása kilátástalan vállalkozás lenne. Egy konkrét feladat esetén ugyanis az (1.4) felírásához, szükség lenne a $P_1, \ldots, P_q$ mátrixok előállítására, ami még kisebb feladatok esetén is lényegesen nagyobb erőfeszítést igényelne, mint az (1.1) azonnali megoldása az általános szimplex módszerrel.

Az alkalmazott transzformációra támaszkodva mégis nyerhetünk hatékony algoritmust, az ún. *dekompozíciós* eljárást.

Ehhez szükségünk lesz az (1.4) alatti feladat duálisára:

$$(1.5) \qquad \begin{aligned} & s \geqslant 0, \quad y_1 \in E_1, \ldots, y_q \in E_1 \\ & s^* K_0 \qquad\qquad\qquad \geqslant c_0^* \\ & s^*(K_1 P_1) + y_1 1^* \quad \geqslant c_1^* P_1 \\ & \qquad \vdots \\ & s^*(K_q P_q) \quad + y_q 1^* \geqslant c_q^* P_q \\ & s^* b_0 + y_1 + \ldots + y_q \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Az *s* itt úgy értelmezhető, mint a központi erőforrások *árnyékárvektora*, az $y_1, \ldots, y_q$ skalárok pedig, mint bizonyos *gazdasági mutatók* az egyes szektorok számára.

A bemutatandó módszernek az az alapgondolata, hogy kiindulunk a transzformált feladat egy redukált változatából, és ezt lépésről lépésre addig bővítjük, míg optimális megoldáshoz nem jutunk. A redukált változat annyit jelent, hogy a teljes P_i mátrixból csupán néhány oszlop áll rendelkezésünkre.[4] A P_i-nek ezt a redukált alakját P_i-vel fogjuk jelölni, s ugyanekkor a megfelelő „gyakorisági" vektort $\hat{v}_i$-vel. Most tegyük fel, hogy a t-edik iterációban az (1.4) alábbi redukált változata áll előttünk:

$$(1.6) \qquad \begin{aligned} & x_0 \geqslant 0, \quad \hat{v}_1 \geqslant 0, \ldots, \quad \hat{v}_q \geqslant 0 \\ & K_0 x_0 + (K_1 \hat{P}_1)\hat{v}_1 + \ldots + (K_q P_q)\hat{v}_q \leqslant b_0 \\ & \qquad 1^* \hat{v}_1 \qquad\qquad\qquad = 1 \\ & \qquad \vdots \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad 1^* \hat{v}_q = 1 \\ & c_0^* x_0 + (c_1^* \hat{P}_1)\hat{v}_1 + \ldots + (c_q^* \hat{P}_q)\hat{v}_q \rightarrow \max. \end{aligned}$$

Azt feltesszük, hogy ennek van optimális megoldása. Ez esetben az erős dualitási tétel értelmében van optimális megoldása a megfelelő duális feladatnak is. Ha a duális feladatpár optimális megoldását az

$$(x_{0t}, \hat{v}_{1t}, \ldots, \hat{v}_{qt}; s_t, y_{1t}, \ldots, y_{qt})$$

vektorrendszer mutatja, akkor, ugyancsak az erős dualitási tétel szerint

$$(1.7) \qquad c_0^* x_{0t} + (c_1^* \hat{P}_1)\hat{v}_1 + \ldots + (c_q^* \hat{P}_q)\hat{v}q = s_t^* b_0 + y_{1t} + \ldots + y_{qt}.$$

Adott esetben a redukált feladat optimális megoldásából következtethetünk az eredeti feladat optimális megoldására is. Erre vonatkozik a

2. tétel: Ha az $(s_t, y_{1t}, \ldots, y_{qt})$ *vektorrendszer lehetséges megoldása az (1.5)-nek, akkor az* $(x_{0t}, x_{1t}, \ldots, x_{qt})$ *vektorrendszer, ahol*

$$x_{it} = \hat{P}_i \hat{v}_{it} \qquad (i=1, \ldots, q),$$

optimális megoldása az (1.1)-nek.

Bizonyítás: Az oszlopok esetleges átrendezésével a P_i a $P_i=[\hat{P}_i, \bar{P}_i]$ módon particionálható. Ezt figyelembe véve megkonstruáljuk a $v_{it}^* = [\hat{v}_{it}, 0^*]$ vektort, ahol a 0^* blokk komponenseinek száma megegyezik a P_i oszlopainak számával. Ilyen körülmények között világos, hogy az $(x_{0t}, v_{1t}, \ldots, v_{qt})$ lehetséges megoldása az (1.4)-nek sőt a tételben megfogalmazott kikötés és az (1.7) szerint egyúttal optimális megoldása is.[5] Ekkor pedig az 1. tétel alapján már nyilvánvaló állításunk helyessége.

Gyakorlatilag azonban még ez az út sem járható közvetlenül. Azt a kérdést ugyanis, hogy az $(s_t, y_{1t}, \ldots, y_{qt})$ vektorrendszer lehetséges megoldása-e az (1.5)-nek, csak úgy tudnók eldönteni, ha ismernők az (1.5)-öt. S mi éppen e feladat megkonstruálását kívánjuk elkerülni. Egyszerűbb lehetőség is kínálkozik. Ennek érdekében definiáljuk az ún. *szektorfeladatot.* Az i-edik szektorfeladat a következő:

$$(1.8) \qquad \begin{aligned} & x_i \geqq 0 \\ & A_i x_i \leqq b_i \qquad (i=1, \ldots, q) \\ & z_i = (c_i^* - s_i^* K_i)\, x_i \rightarrow \max. \end{aligned}$$

Mivel

$$(c_i^* - s_t^* K_i)x_i = c_i^* x_i - s_t^*(K_i x_i),$$

azért a szektorfeladat célfüggvénye úgy értelmezhető, hogy a $c_i x_i$ skaláris szorzatnak megfelelő gazdasági eredményből levonjuk a termeléshez felhasznált központi erőforrások értékét, mégpedig az s_t-ben megadott árnyekáron számítva. Mivel az L_i korlátos, ennek a feladatnak van optimális megoldása. Legyen $\hat{x}_{i,t+1}$ *optimális bázismegoldás.*[6] Ha az optimális függvényértéket z_{it}-vel jelöljük, akkor

$$z_{it} = (c_i^* - s_t^* K_i)x_{i,t+1}\,.$$

A z_{it} ismeretében már könnyen felelhetünk az előbb megfogalmazott kérdésre.

3. tétel: Ha minden i=1, ..., q indexre nézve $z_{it} \leqq y_{it}$, *akkor az* $(s_t, y_{1t}, \ldots, y_{qt})$ *vektorrendszer lehetséges megoldása az (1.5)-nek, vagyis a 2. tételben megadott* $(x_{0t}, x_{1t}, \ldots, x_{qt})$ *vektorrendszer optimális megoldása az (1.1)-nek.*

Bizonyítás: Az kézenfekvő, hogy az

$$s_t^* K_0 \geqq c_0^*$$

egyenlőtlenség teljesül. Azt kell még megmutatnunk, hogy fennáll az

$$(1.9)\qquad s_t^*(K_iP_i) + y_{it}1^* \geq c_i^*P_i,$$

reláció is minden $i=1, \ldots, q$ esetén. Ennek megmutatására abból indulunk ki hogy bármely $x_i \in L_i$ mellett

$$(c_i^* - s_t^* K_i)x_i \leq z_{it}.$$

Így az $x_i = P_i v_i$ relációból és a $z_{it} \leq y_{it}$ feltételből azonnal következik, hogy

$$(c_i^* - s_t^* K_i)P_i v_i \leq y_{it}.$$

Mivel ennek minden olyan v_i-re teljesülni kell, ahol $v_i \geq 0$ és $1^*v_i = 1$, azért fennáll a

$$(c_i^* - s_t^* K_i)P_i \leq y_{it}1^*$$

egyenlőtlenség is.[7] S az ekvivalens az (1.9) alatti relációval.

Emlékeztetünk arra, hogy az $\hat{x}_{i,\,t+1}$ bázismegoldása (persze optimális megoldása is) az (1.8) alatti feladatnak. Így az $x_{i,\,t+1}$, mindenképpen szerepel a P_i oszlopvektorai között. Fontos kérdés számunkra, nem szerepel-e ugyanez a vektor a redukált $\hat{P}_i$ mátrixban is. Erre vonatkozik a

4. tétel: Ha $z_{it} > y_{it}$, *akkor az* $\hat{x}_{i,\,t+1}$ *nem szerepelhet a* P_i *oszlopvektorai között.*

Bizonyítás: Az adott feltétel mellett ugyanis

$$(c_i^* - s_t^* K_i)\hat{x}_{i,\,t+1} > y_{it},$$

azaz

$$s_t^* K_i \hat{x}_{i,\,t+1} + y_{it} < c_i^* \hat{x}_{i,\,t+1}.$$

S ez ellentmond annak, hogy az $(s_t, y_{1t}, \ldots, y_{qt})$ megoldása az (1.6) alatti redukált feladat duálisának.

Az eddigiek alapján már megfogalmazhatjuk a dekompozíciós eljárás algoritmusát.

Tegyük fel, hogy a t-edik iterációnál tartunk, ahol $t=1,2, \ldots$ A megfelelő redukált feladat legyen éppen az (1.6) alatti. Ennek – mint tudjuk – megoldhatónak kell lennie.

1. lépés: Megoldjuk az (1.6) alatti feladatot, az ún. *központi feladatot*. Legyen az optimális megoldás az

$$(x_{0t}, \hat{v}_{1t}, \ldots, \hat{v}_{qt}; s_t, y_{1t}, \ldots, y_{qt})$$

vektorrendszer.

2. lépés: Megoldjuk a (1.8)-nak megfelelő szektorfeladatokat. Az optimális bázismegoldást $x_{i,\,t+1}$-gyel, a megfelelő függvényértéket pedig z_{it}-vel jelöljük.

3. lépés: Ha $z_{it} \leq y_{it}$ minden $i=1, \ldots, q$ mellett, akkor az algoritmust befejezzük. Az optimális megoldást a 2., ill. a 3. tétel alapján állítjuk elő. Ha a $z_{it} \leq y_{it}$ reláció nem teljesül minden i-re, akkor következik a 4. lépés.

4. lépés: Minden olyan i-re nézve, ahol $z_{it} > y_{it}$, a $\hat{P}_i$ helyébe a $[\hat{P}_i, x_{i,\,t+1}]$, mátrixot írjuk. Egyéb esetben a $\hat{P}_i$ változatlan marad. Ezután – figyelembe véve a $t=t+1$ relációt – rátérünk a következő iterációra.

Hátra van még az első iteráció kérdése. Ha normál feladatról van szó, akkor minden i-re nézve indulhatunk a $P_i=0$ mátrixszal, hiszen ez esetben a nulvektor minden szektorprogramban optimális megoldást jelent. S mivel minden feladat normálfeladatra yezethető vissza, ezzel az indulás problémáját is elintéztük.

5. tétel: Az algoritmus véges.

Bizonyítás: Ha a t-edik iterációban nem nyerünk optimális megoldást, akkor a 4. lépés szerint minden olyan $\hat{P}_i$ mátrixot bővítünk, ahol $z_{it} > y_{it}$. Az új vektor, az $x_{i,\,t+1}$, a 4. tétel értelmében nem szerepel a $\hat{P}_i$-ben. Így, ha előbb nem jutunk megoldáshoz, véges számú lépésben el kell jutnunk az (1.4) alatt transzformált feladathoz. S ebből már következik állításunk helyessége.

Az eddigiekben azt hangsúlyoztuk, hogy el akarjuk kerülni a transzformált feladat rendkívül fáradságos megoldását, sőt még a konkrét megfogalmazását is. Az 5. tétel bizonyításánál úgy tűnhet – szembekerültünk ezzel a törekvéssel. De nem erről van szó. Csupán arról, hogy az algoritmus végességét minden eshetőségre számítva bizonyítsuk.

Az ismertetett eljárással kapcsolatban meg kívánjuk jegyezni a következőket:

a) Ha történetesen ismerjük az (1.1) egy lehetséges $(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_q)$ megoldását, akkor indulhatunk a

$$\hat{P}_1 = \bar{x}_1, \ldots, \hat{P}_q = \bar{x}_q$$

redukált mátrixszal is. Még akkor is, ha az $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_q$ nem csúcspontja a szektorprogramoknak. Ez nyilván nem érinti az algoritmus alkalmazását, ha a továbbiakban az adott előírásoknak megfelelően járunk el.

b) A központi feladat megoldásánál legjobb az ún. *felsőkorlát módszert* alkalmazni.

c) A szektor-feladatok megoldását nagymértékben megkönnyítheti az a tény, hogy a feltételek változatlanok maradnak, csupán a célfüggvény változik. (Célszerű itt is a módosított szimplex-módszert alkalmazni).

d) A módszer, mint már említettük, könnyen kiterjeszthető arra az esetre is, amikor az L_i nem korlátos. Ezzel a kérdéssel azonban mi nem foglalkozunk, mert gyakorlati jelentősége elhanyagolható.

2. EGYÉB DEKOMPOZÍCIÓS ELJÁRÁSOK

Az előző pontban ismertetett D–W dekompozíciós eljáráson kívül még mintegy 70 egyéb dekompozíciós módszer látott eddig napvilágot. E nagyszámú eljárás kidolgozását az (1.1) típusú, nagyméretű optimumszámítási feladatok számítógépes megoldásának problémái tették szükségessé. Idővel azonban a számítástechnikai problémákról a figyelem átterelődött az (1.1) probléma közgazdasági jelentőségére és a módszerek olyan lehetséges közgazdasági interpretációjára, amely lehetővé teszi egyes közgazdasági folyamatok, mint pl. a tervezés modellezését, ill. elemzését. Ez a tény indokolja, hogy röviden összefoglaljuk a dekompozíciós módszerek közös jellemzőit, majd pedig kifejtsük a BENDERS-féle algoritmust. E módszer bemutatását az igazolja, hogy számítógépes realizációja igen kedvező tapasztalatokat mutat, ami nem állítható egyértelműe a módszerek többsége esetében.

A D–W módszernél vázolt megoldási menet elemei fellelhetőek az egyéb dekompozíciós módszerek legtöbbjénél. Ezen elemek összefoglalásához a következő közös jellemzőkből kell kiindulni:[8]

a) Az *eredeti* (1.1) feladatot átalakítjuk (dekomponáljuk) az (1.4) típusú *transzformált feladatra* és az (1.8) típusú *szektorfeladatokra*, ami által a megoldás kisebb, könnyebben kezelhető feladatokra vezethető vissza. Ez az ún. *dekompozíciós szabály.*

b) Az (1.4) és (1.8) típusú feladat közötti kapcsolat megteremtésére megadható egy ún. *megoldási stratégia.*

c) Az (1.4) és (1.8) típusú feladatok között meghatározott *információáramlás* van.

d) Az algoritmusok *iterációk sorozatából* állnak.
Az *a) alatti átalakítás* vagy más néven *manipuláció* az eredeti feladaton lehet:
- dualizálás,
- belső linearizálás,
- külső linearizálás,
- vetítés.

Ezek célja a felbontás, izolálás és a közelítés. A következő táblázat csak néhány ismertebb dekompozíciós módszert soroltunk be, feltüntetve az alkalmazott manipulációkat:

	Módszer / Manipuláció	Dualizálás	Belső linearizáció	Külső linearizáció	Vetítés
1.	Abadie–Williams		+		
2.	Benders			+	+
3.	Dantzig–Wolfe		+		
4.	Kate		+		
5.	Rosen	+			+
6.	Weitzman			+	+

A b) alatt említett megoldási stratégiák száma igen nagy, ezért csak a legfontosabbakat említjük:
- relaxáció,
- lépcsőzetes közelítés,
- restrikció.

Az első táblázatba foglalt módszerek a következő megoldási stratégiákat alkalmazzák a szektorproblémák megoldásánál:

	Módszer / Stratégia	Relaxáció	Lépcsőzetes közelítés	Restrikció
1.	Abadie–Williams	+		
2.	Benders		+	
3.	Dantzig–Wolfe			+
4.	Kate		+	
5.	Rosen	+	+	
6.	Weitzman		+	

A felsorolt manipulációk és megoldási stratégiák párosítása lehetővé teszi a dekompozíciós módszerek osztályokba sorolását. Mivel valamely stratégia általában több manipulációval is párosítható, s ezen keretekben nem célunk valamennyi dekompozíciós módszert osztályokba sorolni,[9] ezért ezzel a kérdéssel tovább nem is foglalkozunk. Inkább a c) jellemző – az *információáramlás* – szerint foglaljuk össze az előbbi táblázatokban már ismertetett módszereket. Az áttekintés az információcsere közgazdasági tartalmának megfelelően történik, két csoportra osztva a módszereket. (Lásd a következő oldalon található táblázatot.)

Most pedig térjünk át a BENDERS-féle particiós v. vetítési módszerre. Már a módszer nevéből adódik, hogy az eredeti feladat felbontásánál a vetítési manipulációt alkalmazzuk.

Ezáltal jutunk egyszerűbb feladathoz. Ezt úgy érjük el, hogy a változók egy részét átmenetileg rögzítjük.

Sorszám	Szerzők	Az eljárás megnevezése*	A publikáció időpontja	Szakirodalmi hivatkozás	Információáramlás a központból a szektorba	Információáramlás a szektorból a központba
1.	Abadie, J.– Williams, A.C.	Duális dekompozíciós módszer	1963	„Dual and Parametric Methods in Decomposition", in Graves. R.L. – Wolfe, P. (ed.): Recent Advences in Mathematical Programming New York: McGraw-Hill, 1963.	A központi termékek és erőforrások árnyékárai	A központi termékek és erőforrások aggregált kereslete és kínálata
2.	Benders, J.F.	Particionálási módszer	1962	„Partitioning Procedures for Solving Mixed–Variable Programming Problems", Numerische Mathematic, 4. évf. (1962) 238-252. l.		
3.	Dantzig, G.B.– Wolfe, P.	Dekompozíciós módszer	1960	„Decomposition Principle for Linear Programs", Operations Research, 8. évf. (1960) 101-111. l. „The Decomposition Algorithm for Linear Programs", Econometrica, 29. évf. (1961) 767-768. l.		
4.	Rosen, J.B.	Primális particionáló programozás	1964	„Primal Partition Programming for Block Diagonal Matrices", Numerische Mathematik, 6. évf. (1964) 250–260. l.		
5.	Kate, A. T.	Direkt disztribúciós módszer	1970	„Decomposition of Linear Programs by Direct Distribution" (sokszorosítva), Rotterdam: Netherland School of Economics, 1970.	A központi termékek és erőforrások input-kereteinek output-feladatainak allokációja	A központi termékek és erőforrások árnyékárai
6.	Weitzman, M.	Többszintű tervezés termelési feladatokkal	1970	„Iterative Multi-level Planning with Production Targets", Econometrica. 38. évf. (1970) 50–55. l.		

* Az első csoport (1–4. dekompozíciós eljárások) olyan információáramlási folyamatot képvisel, amikor a központ az erőforrásait közvetett korlátfelosztással biztosítja a szektoroknak.
A második csoportba sorolt dekompozíciós eljárások a közvetlen korlátfelosztást alkalmazzák.

Induljunk ki a

$$
(2.1)\quad
\begin{array}{l}
s^*,\quad u_1^*,\quad u_2^* \geqslant 0^* \\
-s^*K_0 \leqslant -c_0^* \\
-s^*K_1 - u_1^*A_1 \leqslant -c_1^* \\
-s^*K_2 \quad - u_2^*A_2 \leqslant -c_2^* \\
-s^*b_0 - u_1^*b_1 - u_2^*b_2 = z \to \max.
\end{array}
$$

feladatból, amely azon feltevésen alapszik, hogy a rendszer a központon kívül még 2 szektort ölel fel.[10] E feladat duálisa a

$$
(2.2)\quad
\begin{array}{l}
x_0,\quad x_1,\quad x_2 \geqslant 0 \\
-K_0x_0 - K_1x_1 - K_2x_2 \geqslant -b_0 \\
-A_1x_1 \geqslant -b_1 \\
-A_2x_2 \geqslant -b_2 \\
-c_0^*x_0 - c_1^*x_1 - c_2^*x_2 = v \to \min.
\end{array}
$$

Ez nem más, mint a (1.1) feladat kétszektoros esetben, tehát alkalmazható most is a D–W dekompozíciós eljárás:

a) Feltételezzük az (1.2)-höz hasonlóan, hogy az

$$L_i = \{x_i \mid x_i \geqslant 0,\ -A_ix_i \geqslant -b_i\} \qquad (i=1,2)$$

poliéder nem üres, illetve, hogy az

$$S = \{s^* \mid s^* \geqslant 0^*,\ -s^*K_0 \leqslant -c_0^*\}$$

poliéder korlátos.

b) Felírjuk az (1.3) alapján az (1.4) alakú transzformált feladatot, vagyis a

$$
(2.3)\quad
\begin{array}{l}
x_0,\quad v_1,\quad v_2 \geqslant 0 \\
-K_0x_0 - (K_1P_1)v_1 - (K_2P_2)v_2 \geqslant -b_0 \\
-1^*\ v_1 = -1 \\
-1^*\ v_2 = -1 \\
-c_0^*x_0 - (c_1^*P_1)\,v_1 - (c_2^*P_2)\,v_2 \to \min.
\end{array}
$$

feladatot, melynek az S poliéder korlátossága folytán van lehetséges megoldása.

c) Az (1.8)-nak megfelelő szektorfeladat a

$$
(2.4)\quad
\begin{array}{l}
x_i \geqslant 0 \qquad (i=1,2) \\
-A_ix_i \geqslant -b_i \\
-(c_i^* - s_t^*K_i)x_i \to \min.
\end{array}
$$

feladat, ahol az s_t a (2.3) duálisának optimális megoldásából adódik a t-edik iterációban.

A BENDERS-féle dekompozíciós eljárás során a (2.3) és a (2.4) helyett a duálisát oldjuk meg.[11] A (2.3) duálisa a

$$
(2.5)\quad
\begin{array}{l}
s^* \geqslant 0,\quad y_1 \in E_1,\quad y_2 \in E_1 \\
-s^*K_0 \leqslant -c_0^*
\end{array}
$$

$$(2.5)\quad \begin{array}{l} -s^*K_1P_1 - y_1 1 \leqslant -c_1^* P_1 \\ -s^*K_2P_2 \quad y_2 1 \leqslant -c_2^* P_2 \\ -s^* b_0 \ -y_1 \ -y_2 \rightarrow \max. \end{array}$$

feladat,[12] melynek az S korlátosságából kifolyólag vagy van optimális megoldása, vagy nincs lehetséges megoldása. Mivel a (2.3) feladatnak mindig van lehetséges megoldása, így a második lehetőség csak olyan esetben jelentkezhet, amikor a (2.3) feladat nem korlátos, és ezért az eredeti (2 1) feladatnak sincs lehetséges megoldása.
A (2.4) feladat duálisa az

$$(2.6)\quad \begin{array}{ll} u_i^* \geqslant 0^* & (i=1,2) \\ -u_i^* A_i \leqslant -(c_i^* - s_t^* K_i) & \\ u_i^* b_i \rightarrow \max. & \end{array}$$

feladat, melynek vagy van optimális megoldása vagy nincs lehetséges megoldása,[13] mert az L_i nem üres voltából következik; hogy a (2.4) feladatnak minden s^* mellett van lehetséges megoldása.
Az eddigiek alapján már megfogalmazhatjuk a BENDERS-féle dekompozíciós eljárás algoritmusát:
0. lépés: Induláskor tekintjük a (2.5)-ből leválasztható

$$(2.7)\quad \begin{array}{l} s^* \geqslant 0^* \\ -s^* K_0 \leqslant -c_0^* \\ -s^* b_0 \rightarrow \max. \end{array}$$

feladatot, és feltételezzük, hogy $z=-\infty$, $v=+\infty$.
1. lépés: Ha $z_t=v_t$, akkor az eljárás véget ér: a z_t-ét meghatározó (s_t, u_{it}) az eredeti (2.1) feladat optimális megoldása lesz. Ha $z_t<v_t$, akkor megoldjuk a (2.7) ill. a (2.5) alatti feladatot. Amennyiben nincs lehetséges megoldás, akkor az eljárás véget ér, mert a (2.2) feladat nem korlátos és (2.1) feladatnak nincs lehetséges megoldása. Ha van lehetséges megoldás, akkor van (s_t, y_{it}) optimális megoldás is z_t célfüggvényértékkel.
2. lépés: Megoldjuk a (2.6) feladatot. Ha van optimális megoldás,[14] akkor az legyen u_{it}. Ugyanakkor legyen P_{it} a (2.4) feladat egy bázismegoldása és bővítsük a (2.7) feladatot a (2.5)-nek megfelelően, majd folytassuk az 1. lépéstől.
A BENDERS-féle eljárás közvetlenül követi a D–W eljárást, de a duális feladatra alkalmazva a lépéseket. A két eljárás tehát egymásnak „duálisa", mert az alapvető különbség lényegében abban áll, hogy a központi és a szektorfeladatok egymásnak „duálisai".

3. UTÓSZÓ

Mivel jelen keretek között több módszerről már nem lehet bővebben szó, valamint a módszerek közgazdasági interpretációjáról és alkalmazásáról sem, ezért az érdeklődő olvasó figyelmébe ajánljuk az irodalomból a [2], ill. [4] munkákat.

Jegyzetek

[1] Idővel nem változott az igények intenzitása, csak tartalma.

[2] Ezt Dantzig és Wolfe közösen dolgozta ki [1]. Ezért szoktak D–W dekompozícióról beszélni.

[3] Ez a gyakorlatban mindig biztosítható. Elméletileg persze érdeklődésre számíthat az az eset is, amikor az L_i nem korlátos.

[4] A P_i több ezer oszlopot is tartalmazhat, s lehet, hogy a számítások során ennek csak kis részét kell igénybe venni.

[5] Ez az erős dualitási tétel következménye.

[6] Mint tudjuk, ha van optimális megoldás, akkor van optimális bázismegoldás is.

[7] Ezt az előbbiből úgy nyerjük, hogy a v_i helyébe rendre behelyettesítjük az $e_1, e_2, \ldots$ egységvektorokat.

[8] Az összefoglaló [2] alapján készült.

[9] Ez különben is nehezen kivitelezhető feladat, mert vannak olyan módszerek is, amelyek nem vethetők alá a felsorolt manipulációk és stratégiák párosításának.

[10] Az (1.1) feladat közgazdasági interpretációját továbbra is feltételezzük, azzal, hogy most $i=1,2$. (Szükség esetén a tárgyalás kiterjeszthető tetszés szerinti számú szektorra.)

[11] Ez megengedett művelet, amennyiben a duális feladat megoldhatatlanságából következtetni lehet az eredeti feladat sorsára.

[12] Ez itt az ún. központi feladat.

[13] Ez esetben van L_i-ben olyan q_i extremális irány, amelyre $(c_i^* - s_i^* K_i)q_i < 0$.

[14] Ha nincs lehetséges megoldás, akkor érvényes az előbbi lábjegyzet, illetve (2.7) feladat bővítése a (2.5)-nek megfelelően az extremális irányra vonatkozó feltétellel.

Irodalom

1. Dantzig, G.B.–Wolfe, P., „Decomposition Principle for Linear Programs", Operations Research, 1960/1, 101-112.
2. Geoffrion, A.M., „Elements of Large-Scale Mathematical Programming", Management Science, 1970/11, 652-691.
3. Korna, J.: Gondolatok a többszintű tervezési rendszerekről. Közgazdasági Szemle, 1971/9. 1047-1065.
4. Sorad, Dj.: Višenivosko planiranje u poslovnom sistemu primenom metoda dekompozicije. Institut za informatiku i organizaciju, Subotica, 1982.

Rezime

O metodima za rešavanje velikih problema linearnog programiranja

U poslednjih dvadeset godina pojavio se veoma veliki broj metoda za rešavanje velikih problema linearnog programiranja. Pojavu ovih metoda su najpre uslovili mali kapaciteti računara, a zatim potreba za smanjenjem vremena za rešavanje i s tim povezano smanjenje troškova.

Svi metodi u ovoj oblasti se mogu podeliti u dve grupe:
1) postupci bazne manipulacije
2) postupci dekompozicije.

U ovom radu je dat osvrt na drugu grupu metoda, koji su ispunili, ne samo uslove zbog kojih su se pojavili, već su obogatili i repertoar mogućnosti primene linearnog programiranja – naročito u oblasti planiranja. Razmatranja (sa dokazima) posebno obuhvataju metod D–W i metod BENDERSA, odnosno njihovu međusobnu vezu.

Summary

On Methods of Solving Some Great Problems of Linear Programming

Last twenty years great number of methods have appeared to solve some big problems of linear programming. The appearance of these methods was caused by the small capacity of computers, and demand for timesaving and cutting the expences.

All methods in this branch can be devided into two groups

1) procedures of basic manipulation,

2) procedures of decomposition.

This work is a review of the second group of methods, which have not only fulfilled the requirements but also have enriched the repertoire of application possibilities of linear programming – mostly on the field of planning. The discussion (with the evidences) contents the D–W method, and the method of BENDERS, such as their mutual connection.