Krekó Béla

ÚJ MÓDSZER AZ OPTIMUMSZÁMÍTÁSBAN

Még két éve sincs annak, hogy az újságírói fantázia a kelleténél nagyobb mértékben keltette fel a közvélemény érdeklődését egy olyan matematikai eljárással kapcsolatban, amelyet elliptikus módszernek szoktak nevezni.

Az események hátterében az a tény áll, hogy L. G. HACSIJAN szovjet matematikus 1979 februárjában közzétett egy új algoritmust a lineáris programozási feladatok megoldására. A közlemény mindjárt felkeltette a szakemberek érdeklődését, és ennek nyomán elég széles körben indult meg az új eljárás vizsgálata. Erre annál is inkább szükség volt, mert a szerző az említett, lényegében csak a bejelentést célzó cikkében nem adta meg a matematikai indoklást. (A legfontosabb irodalmi adatokról a cikk végén található jegyzék nyújt tájékoztatást.) A matematikusok előtt tehát a dolog már távolról sem volt ismeretlen, amikor az üggyel a napi sajtó is elkezdett foglalkozni. S amint ilyenkor gyakran megtörténik, az újságírók inkább az olvasók fantáziájának felcsigázására, mintsem a kérdés reális megítélésére törekedtek. Nem lehetünk biztosak abban, hogy ezzel jó szolgálatot tettek ennek a kétségtelenül jelentős vállalkozásnak.

A jelen cikknek az a célja, hogy valós képet nyújtson az olvasónak.

1. A módszer alapgondolata

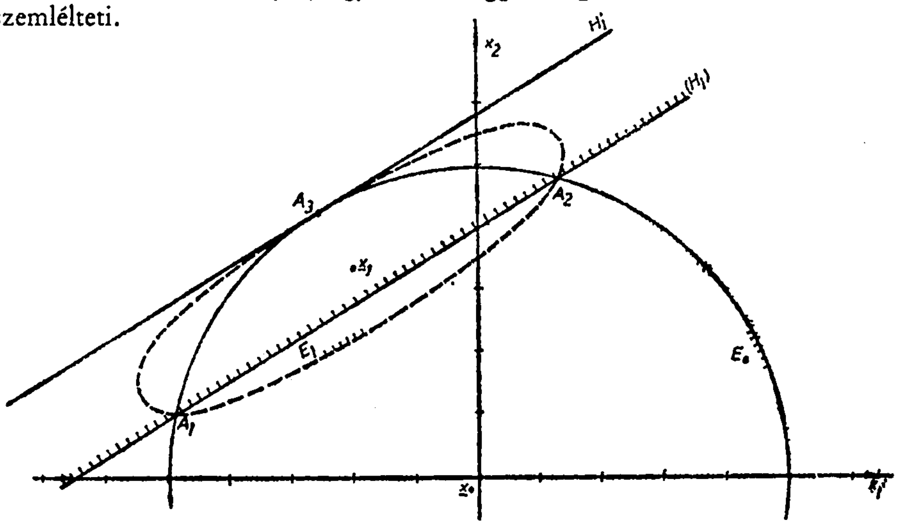
Az elliptikus algoritmus tulajdonképpen arra ad lehetőséget, hogy segítségével megkeressük egy adott lineáris egyenlőtlenség-rendszer valamelyik lehetséges megoldását. (Feltéve természetesen, hogy ilyen megoldás egyáltalában létezik.) Az eljárás lényegére egy egyszerű példa segítségével is könnyen rávilágíthatunk. E cél érdekében tekintsük a következő feladatot:

$$
\begin{array}{ll}
(H_1) & 3x_1-5x_2=-20 \\
(H_2) & -3x_1-2x_2=-\ 6 \\
(H_3) & x_2=\ 7
\end{array}
$$

* Elsősorban arra a cikkre gondolunk, amely a NEW YORK TIMES címoldalán jelent meg 1979 novemberében: "A SOVIET DISCOVERY ROCKS WORLD OF MATHEMATICS"

E feladat könnyen megoldható elemi eszközökkel is, de az elliptikus módszer bemutatása érdekében ezeket az eszközöket most nem vesszük igénybe.

Az algoritmus azzal kezdődik, hogy megnézzük, megoldást jelent-e az origó, azaz az $\underline{x}_0=\underline{0}$ pont. Mivel az $x_1=0$ és $x_2=0$ helyettesítéssel már az első egyenlőtlenségnél ellentmondásra jutunk, megállapíthatjuk, hogy az $\underline{x}_0$ vektor nem ad megoldást. A következő lépés abban áll, hogy az origóból, mint középpontból, húzunk egy olyan kört, amely biztosan tartalmaz legalább egy megoldást. Ha a sugarat elég nagyra választjuk, ilyen kör mindig található, hacsak a lehetséges megoldások halmaza nem üres. Annak vizsgálatába, hogy e sugár hosszát hogyan kell megválasztani, itt nem bocsátkozunk, csupán arra a tényre szorítkozunk, hogy az $R=5$ összefüggésnek megfelelő E_0 kör eleget tesz a kikötéseknek.* Az E_0 kört és a (H_1) egyenlőtlenséggel megadott félsíkot az 1. ábra szemlélteti.



1. ÁBRA

A félsík határvonalát a $3x_1-5x_2=-20$ reláció meghatározta egyenes képezi. Ez az egyenes az E_0 kört az A_1 és az A_2 pontban metszi. S ha ezt az egyenest önmagával párhuzamosan eltoljuk, a H'_1 szimbólummal jelölt érintőhöz juthatunk, amely az E_0 kört az A_3 pontban érinti.

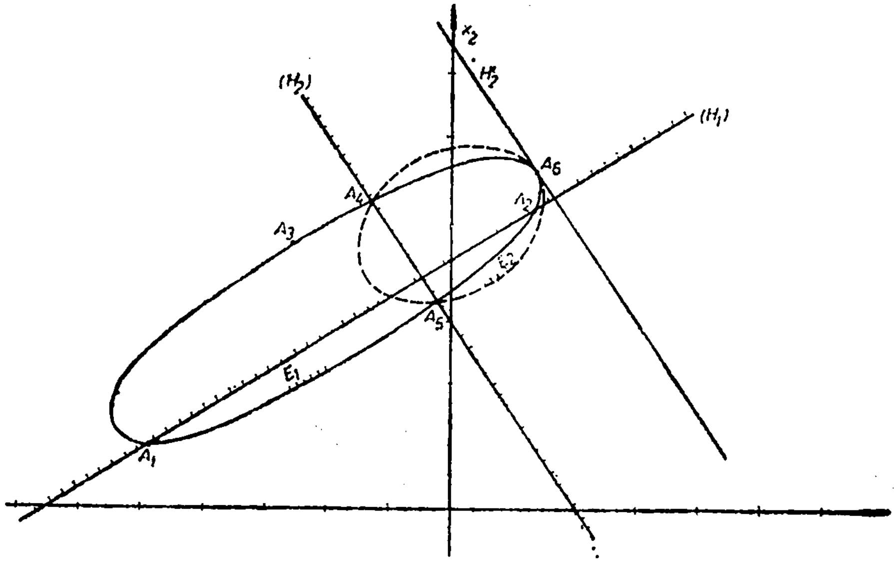
A következő lépésben meg kell keresnünk azt a minimális területű E_1 ellipszist, amely egyrészt keresztülmegy az A_1, A_2, A_3 pontok mindegyikén, másrészt pedig a H'_1 egyenessel ugyancsak az A_3 pontban érintkezik. A számítások szerint az E_1 középpontja az

$$\underline{x}_1 = \begin{matrix} -2 \\ 3{,}4 \end{matrix}$$

vektornak megfelelő pont.** Mivel ez a (H_2) egyenlőtlenséget még nem elégíti ki, az előbbi eljárást – támaszkodva a 2. ábrára –

* Az R az E_0 kör sugarát jelenti.

** A számításokat egy tizedes jegyre terjedő pontossággal végeztük.



ÁBRA

megismételjük. A (H_2) egyenlőtlenséghez tartozó félsíkot a $-3x_1-2x_2=-6$ egyenlőség által meghatározott egyenes határolja. Ez az egyenes az E_1-et az A_4 és az A_5 pontban metszi, a H'_2-vel jelölt értintő pedig az E_1-et az A_6 pontban érinti. Most olyan új, minimális területű ellipszist kell konstruálni, amely átmegy az előbbi három ponton, s amelyet a H'_2 egyenes ugyancsak az A_6 pontban érint. E követelményeket – a számítások szerint – teljesíti az az E_2 ellipszis, amelynek középpontja

$$x_2 = \begin{matrix} 0 \\ 4{,}5 \end{matrix}$$

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy ez már kielégíti mind a három egyenlőtlenséget. Feladatunkat ezzel meg is oldottuk.

Lényegében ugyanerről van szó az általános esetben is. A magasabb dimenziójú terekben persze eleve le kell mondanunk a szemléltetésről. Az egyes egyenlőtlenségeknek megfelelő halmazok határát nem egyenesek, hanem hipersíkok képezik, az ellipszisek szerepét pedig ellipszoidok veszik át. A módszer alapgondolata azonban változatlan marad. Alkalmasan megválasztott ellipszoidokon keresztül mindaddig folytatjuk a számításokat, amíg olyan ellipszoidhoz nem jutunk, amelynek középpontja már minden egyenlőtlenséget kielégít. Bebizonyítható, hogy ez véges számú lépésben elérhető, amennyiben a feladatnak van megoldása.

2. *Az algoritmus leírása*

S most megadjuk az algoritmus formális leírását, mellőzve a részletes matematikai indokolást.* Itt csupán az a célunk, hogy érthetővé tegyük az eljárás „működését”.

Tegyük fel, hogy az

$$(1) \qquad \underline{A}\underline{x} \leqq \underline{b}$$

összefüggéssel megadott egyenlőtlenségrendszerről van szó, amelyben az $\underline{A}$ egy adott m.n tipusú mátrix, a $\underline{b}$ pedig egy adott m-elemű vektor. Az $\underline{x}$ az n-dimenziós euklidészi tér bármely olyan pontja lehet, amely kielégíti az (1) alatti relációt. Eleve feltesszük, hogy az $[\underline{A}, \underline{b}]$ mátrix elemei mind egész számok. Ha az eredeti feladat paraméterei a racionális számtesthez tartoznak, ez a követelmény mindig biztosítható. A trivialitások elkerülése végett feltesszük azt is, hogy az $[\underline{A}, \underline{b}]$ mátrixnak nincsen olyan oszlopa, az $\underline{A}$-nak pedig nincsen olyan sora, amelyben minden elem 0 lenne. Azon $\underline{x}$ vektorok halmazát, amelyek kielégítik az (1) alatti egyenlőtlenséget M-mel fogjuk jelölni. Az a feladat, hogy határozzuk meg az M egyik elemét.

Ha a $\underline{b}$-nek nincs egyetlen negatív komponense sem, akkor az $\underline{x}=\underline{0}$ vektor máris megoldást jelent. Ellenkező esetben azzal folytatjuk az eljárást, hogy megkonstruáljuk az

$$(2) \qquad \frac{1}{R^2}\cdot \underline{x}^*\underline{x} \leqq 1$$

összefüggésnek megfelelő E_0 halmazt.** Az E_0 olyan n-dimenziós gömböt jelent, amelynek a sugara R. Az R-et úgy kell megválasztani, hogy ez a gömb mindenképpen tartalmazzon M-beli elemet, amennyiben az M nem üres. Be lehet bizonyítani, hogy az alábbi elgondolás célhoz vezet:

Először is képezzük az $[\underline{A}, \underline{b}]$ mátrix oszlopvektorainak euklidészi normáit.*** Legyenek ezek rendre az

$$\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_n, \hat{b}$$

skalárok, amelyek az adott kikötések mellett mind pozitívok. Ezután e normák segítségével definiáljuk az

$$R=n\cdot\hat{a}_1\hat{a}_2\ldots\hat{a}_n\hat{b}+1$$

* A matematikában kellő jártassággal rendelkező olvasó számára az irodalomjegyzékre utalunk.

** Az $\underline{x}^*\underline{x}$ oszlopvektor transzponáltja. Így az $\underline{x}^*\underline{x}$ az $\underline{x}$ vektornak önmagával alkotott skaláris szorzatát jelenti.

*** Valamely $\underline{a}$ vektor euklidészi normáján az $\sqrt{\underline{a}^*\cdot\underline{a}}$ skalárt értjük. Ha az $\underline{a}$ nem nullvektor akkor ez a skalár pozitív.

előírásnak megfelelő pozitív valós számot. Ez az R már biztosan megfelel a kitűzött célnak.

Az előbbiek alapján egy közbeeső – itt a k indexszel jelölt – iteráció tárgyalásánál már ismertnek tételezzük fel az

$$(3) \qquad (\underline{x}-\underline{x}_k)^* \; \underline{P}_k^{-1}(\underline{x}-\underline{x}_k) \leqq 1$$

formulával definiált E_k ellipszoidot, ahol az $\underline{x}_k$ az ellipszoid középpontja, a $\underline{P}_k$ pedig az ellipszoid alakját meghatározó pozitív definit mátrix. Feltesszük azt is, hogy az $\underline{x}_k$ nem eleme az M-nek, az E_k mindazonáltal tartalmazza mindazon M-beli elemeket, amelyek bennefekszenek az E_0-ban is. Az induláskor $k=0$, $\underline{x}_0=\underline{0}$ és $\underline{P}_0=R^2\underline{E}$, ahol az R az előbb definiált pozitív skalár, az $\underline{E}$ pedig az egységmátrix szimbóluma.

Az iteráció lebonyolításánál az az első teendőnk, hogy meghatározzuk minden $i=1, 2, \ldots, m$ indexre nézve az

$$\frac{\underline{a}_i^* \underline{x}_k - b_i}{\sqrt{\underline{a}_i^* \underline{P}_k \underline{a}_i}}$$

hányados értékét, ahol az $\underline{a}_i^*$ az $\underline{A}$ mátrix i-edik sorvektorát, a b_i pedig a $\underline{b}$ vektor i-edik komponensét szimbólizálja. E hányadosok közül azután kiválasztjuk a maximálisat, amelyet d_k-val fogunk jelölni. Ha ugyanekkor a megfelelő $\underline{a}_i^*$ vektort egyszerűen $\underline{a}^*$-val, a b_i komponenst meg b-vel jelöljük, akkor

$$(4) \qquad d_k = \frac{\underline{a}^* \underline{x}_k - b}{\sqrt{\underline{a}^* \underline{P}_k \underline{a}}}$$

A d_k az $\underline{x}_k$ pontnak az $\underline{a}^*\underline{x}=b$ egyenlettel megadott hipersíktól való távolságát jellemzi. Így a d_k meghatározása úgy interpretálható, hogy az $\underline{e}_i^*(\underline{A}\underline{x})=\underline{e}_i^*\underline{b}$ alakú egyenlőségek* által meghatározott hipersíkok közül kiválasztjuk azt amelyik legtávolabb fekszik az $\underline{x}_k$ ponttól. Mivel az $\underline{x}_k$ az (1) által képviselt egyenlőtlenségek közül legalább egyet nem teljesít, biztosak lehetünk abban, hogy

$$d_k > 0$$

Az a kérdés azután, hogy a d_k mekkora pozitív szám, a további vizsgálatok szempontjából alapvető jelentőségű.

a/ Ha történetesen $d_k > 1$, ez azt jelenti, hogy az induló E_0 ellipszoid tulajdonképpen egyetlen M-beli elemet sem tartalmaz. Ez azonban csakis akkor következhet be, ha a feladat nem oldható meg, azaz $M=\emptyset$. A $d_k > 1$ esetben tehát az algoritmust azzal a megállapítással fejezhetjük be, hogy az adott feladatnak nincs megoldása.

b/ Ha $d_k=1$, akkor arról van szó, hogy a további vizsgálatoknál csupán az

* Az $\underline{e}_i^*$ [0, . . . , 1 , . . . , 0] vektor az i-edik egységvektor.

$$(5) \qquad \hat{\underline{x}}_k = \underline{x}_k - \frac{1}{\sqrt{\underline{a}^* \underline{P}_k \underline{a}}} \underline{P}_k \underline{a}$$

pont jöhet szóba. Ha ugyanis az E_0 tartalmaz M-beli elemet, akkor az a jelen esetben csupán az $\hat{\underline{x}}_k$ pont lehet. Így már csak annak a vizsgálata van hátra, hogy teljesül-e az $\underline{A}\hat{\underline{x}}_k = \underline{b}$ reláció, vagy sem. Ha teljesül, akkor az $\hat{\underline{x}}_k$ eleme az M-nek, ha azonban nem teljesül, akkor az M halmaz üres. Így az algoritmus mindenképpen befejeződik.

c/ Ha $d_k < 1$, akkor az E_0, s így az E_k is, több M-beli pontot is tartalmazhat. A feladat most az, hogy határozzunk meg egy minimális térfogatú E_{k+1} ellipszoidot, amely az előbb említett pontokat ugyancsak tartalmazza. A vizsgálatok szerint az új ellipszoid középpontja az

$$(6) \qquad \underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k - \frac{h_k}{\sqrt{\underline{a}^* \underline{P}_k \underline{a}}} \underline{P}_k \underline{a}$$

vektor, ahol

$$(7) \qquad h_k = \frac{n d_k + 1}{n+1}$$

Ha az $\underline{x}_{k+1}$ kielégíti az $\underline{A}\underline{x}_{k+1} \leqq \underline{b}$ előírást, akkor azzal a megállapítással, hogy az $\underline{x}_{k+1}$ megoldása a feladatnak, az algoritmust befejezettnek tekinthetjük. Ellenkező esetben meg kell határozni az E_{k+1} ellipszoidhoz tartozó $\underline{P}_{k+1}$ mátrixot is. E mátrixot a

$$(8) \qquad \underline{P}_{k+1} = \frac{1}{w_k^2} \left[\underline{P}_k - \frac{2h_k}{1+d_k} \frac{1}{\underline{a}\underline{P}_k\underline{a}} (\underline{P}_k\underline{a})(\underline{P}_k\underline{a}) \right]$$

formula szolgáltatja, ahol

$$(9) \qquad w_k^2 = \frac{n^2-1}{n^2} \frac{1}{1-d_k^2}$$

Ezután rátérhetünk a következő iterációra.

Felmerülhet még a kérdés; Mi biztosítja az algoritmus végességét? A felelet a következő: Ha az algoritmus nem fejeződnék be a

$4(n+1)^2 \cdot \ln(nR)$ kifejezésnek megfelelő számú iteráció lebonyolítása után, akkor biztosak lehetünk abban, hogy a feladatnak nincs lehetséges megoldása.

Az eljárás tehát mindenképpen véges.

Ezzel az algoritmus leírását be is fejeztük.

3. *Mire használható az elliptikus módszer?*

Mindenekelőtt lineáris egyenlőtlenség-rendszerek megoldására. Ez már önmagában véve is széles körű alkalmazási lehetőséget biztosít. Legfontosabb alkalmazási területének azonban most is a lineáris programozási feladatok megoldását tekintik.

Könnyen megmutatható, hogy bármely lineáris programozási feladat megoldása visszavezethető egy alkalmas egyenlőtlenségrendszer megoldására. Tekintsük ugyanis a következő feladatot:

$$\underline{x} \geqq \underline{0}$$
$$\underline{A}\underline{x} \leqq \underline{b}$$
$$\underline{c}^{*}\underline{x} \rightarrow \max$$

Mint ismeretes, ehhez – az ún. primális feladathoz – az alábbi duális feladat tartozik:

$$\underline{u} \geqq 0$$
$$\underline{u}^{*}\underline{A} \geqq \underline{c}^{*}$$
$$\underline{u}^{*}\underline{b} \rightarrow \min$$

A dualitási tételek értelmében a két célfüggvény kapcsolatát a

$$\underline{c}^{*}\underline{x} \leqq \underline{u}^{*}\underline{b}$$

reláció jellemzi, ahol az $\underline{x}$ bármely lehetséges megoldása lehet a primális feladatnak, az $\underline{u}$ pedig bármely lehetséges megoldása a duális feladatnak. Egyenlőség csakis olyan $(\underline{x}_0, \underline{u}_0)$ vektorpár mellett jöhet létre, ahol az $\underline{x}_0$ a primális feladatra nézve, az $\underline{u}_0$ pedig a duális feladatra nézve optimális megoldást jelent. Az elmondottakból következik, hogy az

$$\underline{x} \geqq \underline{0}, \underline{u} \geqq \underline{0}$$
$$\underline{A}\underline{x} \leqq \underline{b}$$
$$-\underline{A}^{*}\underline{u} \leqq -\underline{c}$$
$$\underline{b}^{*}\underline{u} - \underline{c}^{*}\underline{x} \leqq 0$$

egyenlőtlenség-rendszer bármely lehetséges megoldása optimális megoldást szolgáltat mindkét duális feladatra nézve. S az elliptikus módszer éppen arra nyújt lehetőséget, hogy meg tudjuk határozni egy adott lineáris egyenlőtlenségredszer valamelyik lehetséges megoldását.

Megjegyezzük, hogy számítástechnikai szempontból az előbbinél gazdaságosabb utat is lehet találni a lineáris programozási feladatok megoldására. S mivel bármely hiperbolikus programozással kapcsolatban lehet szerkeszteni egy vele ekvivalens lineáris programozási feladatot, világos, hogy a hiperbolikus probléma is megoldható az elliptikus módszerrel.

Folynak a vizsgálatok a tekintetben is, hogyan lehetne az elliptikus eljárás hatókörét egyéb matemetikai programozási feladatok megoldására is kiterjeszteni. Ilyen vizsgálatról ad számot pl. az [5] alatti tanulmány.

4. *A módszer értékelése*

Elméleti szempontból az elliptikus módszer kétségtelenül nagy jelentőségű. Számos teoretikus problémát magasabb szinten old meg, mint a matematikai programozás egyéb eljárásai. Az ezzel kapcsolatos megjegyzéseinket két pontban foglalhatjuk össze:

a/ Az elliptikus módszer bizonyítottan polinomiális algoritmus. Ez végső fokon azt jelenti, hogy a végrehajtás során felmerülő elemi műveletek száma a feladat paramétereinek felírásához szükséges bináris kódok számának polinomiális függvénye. A szakemberek jól tudják, hogy az algoritmus alkalmazása szempotjából ez igen előnyös tulajdonság. A matematikai programozás ismert algoritmusai közül számos eljárás nem rendelkezik ezzel a sajátossággal.

b/ A numerikus stabilitás az elliptikus algoritmusnál elvben eldöntött kérdésnek tekinthető. Ezzel szemben az általánosan ismert szimplex módszernél a stabilitás kérdésére még nem tudunk egzakt feleletet adni.

A gyakorlati alkalmazásokat illetően már más a helyzet. Ezt legjobban akkor tudjuk megítélni, ha az összehasonlításnál a szimplex módszert vesszük alapul. Találtak ugyan olyan speciális feladattípusokat, amelyeknél az elliptikus algoritmus gyorsabban vezet eredményre, mint a szimplex módszer, általánosan szemlélve azonban a kérdést, azt állíthatjuk, hogy az elliptikus módszer hatékonysága még távolról sem közelíti meg a szimplex módszer hatékonyságát. Ennek két alapvető oka van:

a/ Az indulásnál szereplő R sugár a tapasztalat szerint olyan nagy szám, hogy több nagyságrenddel haladja meg a szükséges mértéket.

b/ A konvergencia a gyakorlatban felmerült feladatoknál rendkívül lassúnak bizonyult.

E nehézségek kiküszöbölésére számos kísérlet történt már, de folynak a próbálkozások ma is. Reális a remény, hogy a kutatások kellő eredménnyel fognak járni.

IRODALOM

[1] Хачиян, Л.Г.: Полиномиальный алгоритм в линейном программировании. Докл. АН СССР, 1979ь 244, № 5, 1093–1096.

[2] Gács, P.-Lovász, L.: KHACHIAN'S ALGORITHM FOR LINEAR PROGRAMMING, Report STAN-CS-79-750, Stanford University, 1979.

[3] Wolfe, P. THE ELLIPSOID ALGORITHM, Optima, Mathematical Programming Society Newsletter, 1980 Nr. 1

[4] Walukiewicz, S.: ELLIPSOIDAL ALGORITHM FOR LINEAR PROGRAMMING, Linköping Institut of Technologie, LiTH-MAT-R-80-11, 1980.

[5] Grötschel, M.-Lovász, L.-Schrijver, A.: THE ELLIPSOID METHOD AND ITS CONSEQUENCES IN COMBINATORIAL OPTIMIZATION, kéziratban

[6] Хачиян, Л.Г.: Полиномиальные алгоритмы в линейном программировании. Ж. вычисл. матем. и матеь. физ., 1980, 20, № 1, 5д-68.

Summary

New method of Optimization

In the past few years, both professional and daily news, magazines have been occupied more or less with Hacsiján's new method of optimization, socalled elliptical method. This article is to give a realistic picture of this circle of problems. Serving this interest it gives. the algorithm and information on the effectiveness of this method as well as possibilities of application. For those who want to get deeply involved with the problems there is a list of literature and instructions.

Rezime

Novi metod u izračunavanju optimuma

U zadnjih godinu i po dana, stručno javno mnenje, kao i dnevna štampa, mnogo se bavila, novim načinom izračunavanja optimuma, koji je razvio HAČIJAN, sa tzv. eliptičnim metodom. Cilj ovog članka je, da pruža realnu sliku o čitavoj toj problematici. U tom cilju opisuje se algoritam, daje se obaveštenje o efektivnosti i mogućnosti korišćenja postupka. Za one, koji i dalje žele da se pozabave sa ovom problematikom dublje, daje se na kraju članka spisak literature i potrebna uputstva.