Molnár Verona

A TERMELÉS ELŐKÉSZÍTÉSE MATEMATIKAI MÓDSZEREK ALKALMAZÁSÁVAL

A tervezés és a szervezés mellett a gazdaságos döntéshozatalnak igen hatékony eszköze az optimális döntéshozatal. Egyetlenegy döntéshozatal sem lehet véletlenszerű, ha azt akarjuk, hogy az gazdaságilag megvalósítható és konzisztens legyen, illetve ha azt kívánjuk, hogy még sok más követelménynek is eleget tegyen.

Minden gazdasági döntéshozatal, így a termelési folyamat előkészítésével kapcsolatos is az objektív körülményektől függ (pl. egységnyi anyagráfordítás, gépidő stb.). Ahhoz, hogy termelési programot készítsünk, szükséges, hogy elkészüljön a termelési program terve. Tudnunk kell a termelendő termékek névsorát, ismernünk kell a rendelkezésünkre álló nyersanyagmennyiséget, a termelés technikai-technológiai követelményeit, az output határidejét stb.

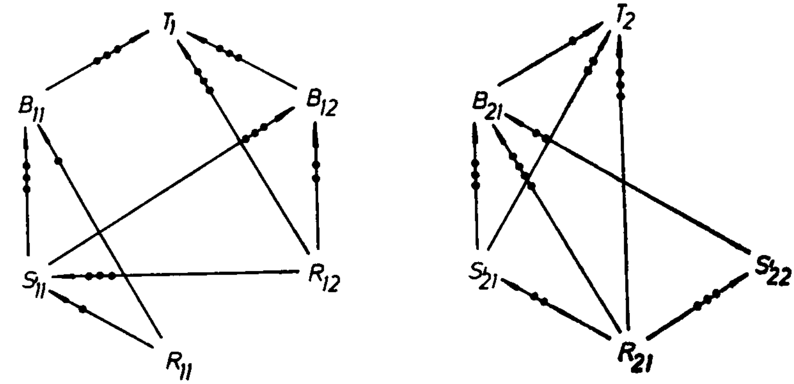
A konkrét gyakorlattól függően a termelés előkészítésével kapcsolatban az optimális programozás különböző típusait alkalmazhatjuk. A továbbiakban néhány, a termelés előkészítésével kapcsolatos problémát ismertetünk, de ugyanakkor rámutatunk azoknak gyakorlati alkalmazhatóságára.

1. A szükséges termelési tényezők mennyiségének tervezése

Kezdjük mindjárt egy példával:

Egy üzem két terméket széndékozik gyártani: P_1-et és P-t. A termékek blokkokból, szerelvényekből és részekből tevődnek össze. A kérdés az, hány termelési tényezőt kell beszerezni, illetve biztosítani (részek és a szükséges gépidő) adott termékmennyiség legyártásához.

A következő ábra, a termékek összeállításának módját mutatja. A pontok az egyes részeket alkotó blokkok, illetve szerelvények számát jelentik:



Az ábra alapján fel tudjuk állítani az egyes részek közvetlen felhasználásának táblázatát, amelyet N-nek nevezünk, és amelyet a szükséges termelési tényezők kiszámítására használunk (anyag, a kidolgozás időtartama stb.).

$[N] =$

	T_1	T_2	B_{11}	B_{12}	B_{21}	S_{11}	S_{21}	S_{22}	R_{11}	R_{12}	R_{21}
T_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
T_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B_{11}	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B_{12}	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B_{21}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S_{11}	0	0	3	2	0	0	0	0	0	0	0
S_{21}	0	2	0	0	3	0	0	0	0	0	0
S_{22}	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0
R_{11}	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
R_{12}	3	0	0	2	0	3	0	0	0	0	0
R_{21}	0	3	0	0	4	0	2	3	0	0	0

Az N mátrix azt mutatja, hogy minden termékblokk vagy szerelvény milyen és mennyi egyszerűbb elemből áll. Ezen mátrix alapján ki tudjuk számítani az össz szükségletek mátrixát, mégpedig a következő képlet alapján:

$$[B] = [I-N]^{-1}$$

Az össz szükségletek mátrixa tehát:

$[B] =$

	T_1	T_2	B_{11}	B_{12}	B_{21}	S'_{11}	S'_{21}	S'_{22}	R_{11}	R_{12}	R_{21}
T_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
T_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B_{11}	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
B_{12}	3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
B_{21}	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
S'_{11}	15	0	3	2	0	1	0	0	0	0	0
S'_{21}	0	5	0	0	3	0	1	0	0	0	0
S'_{22}	3	2	1	0	2	0	0	1	0	0	0
R_{11}	15	0	3	2	0	1	0	0	1	0	0
R_{21}	0	23	0	0	16	0	2	3	0	0	1

Ha ismert a termelendő mennyiség, vagyis a T_1-ből is és a T_2-ből is egyet-egyet kívánunk termelni, akkor a *B* mátrix és a termelés volumenét jelző vektor szorzásával a következő eredményhez jutunk:

$$\underline{B} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 15 \\ 5 \\ 5 \\ 15 \\ 54 \\ 23 \end{bmatrix}$$

A kapott oszlopvektor arról ad információt, hogy mennyi alkatrészre, szerelvényre, illetve blokkra van szükség ahhoz, hogy a T_1 és T_2-ből egy-egy terméket össze tudjunk állítani. Tehát megkaptuk a szükséges alkatrészmennyiségek vektorát. Pl. egy T_1 és egy T_2 termék összeállításához összesen 23 R_{21}-re van szükség.

Legyen ismert az össz R_{11}, R_{12} és R_{21} alkatrészek termeléséhez szükséges anyagmennyiség (mivel, hogy minden összetett elem R_{11}, R_{12} és R_{21}-ből áll).

	R_{11}	R_{12}	R_{21}
Nyersanyag I	3 kg/drb	1	1
Nyersanyag II	1	1	5

Ha most megszorozzuk az előbbi anyagszükséglet vektorát a szükséges alkatrészmennyiségek vektorával, akkor az anyagszükséglet vektorát kapjuk:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 15 \\ 5 \\ 5 \\ 15 \\ 54 \\ 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 122 \\ 184 \end{bmatrix}$$

A kapott eredmény alapján leszögezhetjük, hogy egységnyi T_1 és T_2 termék termeléséhez 122 kg nyersanyag I és 184 kg nyersanyag II-re van szükség.

Ha az üzem két gépparkkal rendelkezik, a feldolgozás pedig a következő módon történik:

	R_{11}	R_{12}	R_{21}
Gép I	1	0	0
Gép II	2	5	4

akkor a T_1, illetve T_2 előállítására összesen a következő időmennyiség szükséges:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 15 \\ 5 \\ 5 \\ 15 \\ 54 \\ 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 392 \end{bmatrix}$$

Tehát a T_1 előállítása 15, a T_2 előállítása 392 érát igényel. Ismerjük ezután mindegyik összetett elem szerelési idejét.

	P_1	P_2	B_{11}	B_{12}	B_{21}	S_{11}	S_{21}	S_{22}	D_{11}	D_{12}	D_{21}
Szerelési idő	25	10	8	10	2	5	2	10	0	0	0

Mindkét típusú egységnyi termék összeállítására szükséges szerelési időt a következő szorzat adja:

$$\begin{bmatrix} 25 & 10 & 8 & 10 & 20 & 5 & 2 & 10 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 15 \\ 5 \\ 5 \\ 15 \\ 54 \\ 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 244 \end{bmatrix} \text{óra}$$

2. *Optimális technológiai variáns kiválasztása*

Abban az esetben, amikor a termék több technológiai változat szerint állítható elő vagy ugyanazzal a technológiával, de különböző géptípusokon, melyeknek különböző a kapacitása, akkor matematikai programozással olyan optimális termékösszetétel található, amely minimális költséget eredményez vagy valamilyen más célt biztosít (pl. maximális árbevételt).

Legyenek ismertek a következő nagyságok:

x_{ij} = j technológiai változat szerint előállított i termékmennyiség,
r_i = szerződéssel lekötött termelési kötelezettség az i termékre vonatkozóan,
a_{ij} = technikai-technológiai koefficiensek, a szükséges ráfordítás az i termék előállítására j technológiai variáns szerint,
t_k = az egyes energiaforrások kapacitása,
c_{ij} = minden termék termelési költsége minden technológiai változat szerint.

Az adatok alapján a következő matematikai modellt írhatjuk fel:

$$x_{ij} \geqq 0 \quad \begin{matrix} (j=1,2,\dots,m) \\ (i=1,2,\dots,n) \end{matrix}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = r_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_{ij} \leqq t_k \qquad (k=1,2,\dots,s)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} = z \longrightarrow \min$$

Dolgozzunk ki egy példát:

Egy tmasz 3 terméket termel, mégpedig a következő mennyiségekben: 50, 100 és 200 db. A technikai-technológiai feltételek megengedik, hogy az első és a harmadik terméket 3 technológiai megoldás szerint állítsuk elő, míg a másodikat kétféleképpen. A termelési folyamat öt termelési eszközön történik (S_i, $i=1, 2, 3, 4, 5$), mindegyik meghatározott kombinációjával. A termelési erők a következő időmennyiséggel rendelkeznek: 500, 600, 300, 800 és 200 óra. A termékeket a következő technikai-technológiai körülmények között termelik, mégpedig a technológiai variáns és a termelési eszközöktől függően (gépó./db):

		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
I	1.	-	-	2	4	5
	2.	-	3	-	1	-
	3.	4	-	1	1	1
II	1.	-	2	1	3	-
	2.	6	-	2	-	-
III	1.	-	4	1	-	-
	2.	-	3	-	2	1
	3.	5	-	-	1	-
Kapacitás		500	600	300	800	200

Ha a termelőeszközök egy órára eső egységnyi költsége: 150, 200, 60, 40, illetve 20 din/gépó, és ha az összköltség minimálása a cél, akkor az a kérdés, hogy technológiai variánsok mely kombinácijával valósíthatjuk meg a tervet.

x_{11}, x_{12} és x_{13}-mal az első termék mennyiségét jelöljük, az 1., 2. és 3. technológiai variáns szerint, ugyanígy x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32} és x_{33} az egyes termékmennyiségeket jelölik variánsok szerint.

Az adatok szerint felírhatjuk a következő matematikai modellt:

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i=1,2,3) \quad (j=1,2,3)$$

$$\begin{aligned}
x_{11}+x_{12}+x_{13} &= 50\\
x_{21}+x_{22} &= 100\\
x_{31}+x_{32}+x_{33} &= 200\\
4x_{13}+6x_{22}+5x_{33} &\leq 500\\
3x_{12}+2x_{21}+4x_{31}+3x_{32} &\leq 600\\
2x_{11}+x_{13}+x_{21}+2x_{22}+x_{31} &\leq 300\\
4x_{11}+x_{12}+x_{13}+3x_{21}+2x_{32}+x_{33} &\leq 800\\
5x_{11}+x_{13}+x_{32} &\leq 200
\end{aligned}$$

$$150(4x_{13}+6x_{22}+5x_{33})+200(3x_{12}+2x_{21}+4x_{31}+3x_{32})+60(2x_{11}+x_{13}+$$
$$+x_{21}+2x_{22}+x_{31})+40(4x_{11}+x_{12}+x_{13}+3x_{21}+2x_{32}+x_{33})+20(5x_{11}+x_{13}+$$
$$+x_{32})=v\longrightarrow min.$$

A célfüggvény a következő lesz:

$$380x_{11}+640x_{12}+720x_{13}+580x_{21}+1020x_{22}+860x_{31}+700x_{32}+790x_{33}=v\longrightarrow min.$$

A kapott eredmény minimális összköltséget kell, hogy eredményezzen.

3. *Szalagrendszeres termelési program*

Egy tmasz n-féle terméket termel, m szalagon, mégpedig úgy, hogy minden termék legalább egy szalagon keresztülhalad.

A következő adatokkal rendelkezünk:

a_{ij} = aj termék száma, amely az i szalagon halad keresztül, míg $1/a_{ij}$ az i kapacitás azon részét jelöli, amelyet a j termék előállítása köt le,

b_s = (1, . . ., k, . . s) a többi termelési kapacitás,

c_{jk} = a j egységnyi termék előállításához szükséges k kapacitás, valójában technikai-technológiai koefficiens,

x_j = a termelt termék mennyisége,

$k_{21}, \dots k_{j1}, \dots k_{n1}$ = bármely termék és az első termék keresletének aránya (piaci feltétel).

A modell a következőképpen néz ki:

$$x_j > 0 \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

$$\sum_j \frac{1}{a_{ij}} x_j < 1 \qquad (i=1,2,\dots,m)$$

$$\sum_j c_{ij} \cdot x_j < b_k \qquad (i=1,2,\dots,s)$$

$$x_j = r_{ji} x_1$$

$$\sum_j x_1 = z \longrightarrow max.$$

A következő adatok ismertek:

A termelői egység két szalagrendszerrel rendelkezik, mégpedig a következő kapacitással:

	P_1	P_2	P_3	
T_1	2drb/gépó.	3	3	1
T_2	4	5	3	1

520 kg nyersanyagmennyiséggel, a szükségletek a következők: 3, 2 és 4 kg egységnyi termékre a P_1 termékből legalább kétszer annyit kell termelni, mint a P_2-ből és P_3-ból együttvéve, a piaci korlátok miatt.

A felállított matematikai modell a következő:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \leq 1$$

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \leq 1$$

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 520$$

$$x_1 \geq 2(x_2 + x_3) \longrightarrow \qquad -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 0.$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = z \longrightarrow max.$$

Az optimális program szerint a következő mennyiségeket kell termelni: $x_1 = 3/2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3/4$, míg a maximális mennyiség 9/4 db.

4. *Optimális anyagdarabolás*

Az optimális modelljét gyakran az optimális anyagdarabolás tervének elkészítésére is használják, a cél a minimális hulladékmennyiség, illetve a kiszabott anyag maximális mennyisége.

Legyen m a vágás alkalmával kapott darabok száma, b_i a szükséges darabok száma és létezzen összesen n kiszabási variáns. Minden variáns alkalmazásánál $a_{1j}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{mj}$ darabot kapunk, az x_j a felhasznált kiszabási variáns számát jelöli.

A modell a következő:

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\sum a_{ij} x_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\frac{\sum c_j x_j}{\sum d_j x_j} = z \longrightarrow max$$

ahol:

c_j = a kiszabás után kapott darabok ára

d_j = a kiszabás költsége.

A célfüggvényben szerepelhet a darabok maximális száma vagy a hulladék minimizális mennyisége.

Példa:

Valamely objektum építéséhez 1,5 és 2 m hosszú gerendák szükségesek, mégpedig: az elsőből 5000 db, a másodikból 25 000. Valamely előbbi építésnél 3 féle gerenda maradt meg. 1000 db a 3 m hosszúból, 2000 a 2,5- m-esből, és 1500 a 3,5 m-esből. Hogyan kell szétvágni a gerendákat ahhoz, hogy a vásárlandó gerendák száma minimális legyen?

A vágás lehetséges változatai a következők:

	3m		2,5m		3,5m	
Variáns	1.	2.	3.	4.	5.	6.
gerenda 2m	1	0	1	0	1	0
gerenda 1,5m	0	2	0	1	1	2
Hulladék	1	0	0,5	1	0	0,5

A kapott vágási változatok alapján fel tudjuk írni a következő modellt:

$x_1, x_2, \ldots, x_6$-tal a kiszabott gerendák számát jelöljük variánsok szerint.

$$x_1, x_2, \ldots x_6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

$$x_1 + x_3 + x_5 \leq 5000$$

$$2x_2 + x_4 + x_5 + 2x_6 \leq 2500$$

$$x_1 + x_2 = 1000$$

$$x_3 + x_4 = 2000$$

$$x_5 + x_6 = 1500$$

$$x_1 + 0{,}5x_3 + x_4 + 0{,}5x_6 = v \rightarrow min.$$

Abban az esetben, amikor a gerendák számát maximálni kívánjuk, a célfüggvény a következő:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = z \rightarrow max.$$

Az optimális program szerint:

$x_1 = 500$ gerenda
$x_2 = 500$ „
$x_3 = 2000$ „
$x_4 = 0$ „
$x_5 = 1500$ „
$x_6 = 0$ „ , míg az össz hulladék 1500 m.

Amikor két dimenziós vágásról van szó vagy amikor előre meghatározott geometriai alakokat kell kiszabni (körök, különböző négyzetek), akkor a probléma természetesen összetettebb.

Az első lépés itt is a kiszabási variánsok meghatározása a (V_1, V_2, ... V_k, ..., V_n) nyersanyagból, amelyeket *A*-val jelölünk, (az *A* elemei: a_{ij}, $i=1, 2, \ldots, m$, $j=1, 2, \ldots, n$), ahol az i a lemezek lehetséges méreteit, míg a j a lehető variánsokat jelöli:

Az i-ik féle lemez szükséges mennyiségét jelölje a b_i, az i-ik lemez felülete legyen t_i, a kiszabandó lemez felülete legyen t, míg ezen lemezek száma M.

A matematikai modell a következő:

$$x_k \geq 0$$
$$\sum_k a_{ik} x_k \geq b_i$$
$$\sum_k x_k \leq M$$

x_k — k variáns szerint a kiszabandó lemezek száma.

A célfüggvény a költségek minimizációjára törekszik:

$$(\sum_k x_k)t - \sum_i t_i(\sum_k a_{ik} x_k) = \sum_k x_k \cdot$$
$$(t - \sum_i a_{ik} t_i) \longrightarrow min.$$

Illetve, a célfüggvény az össz rendelkezésre álló lemezfelület és a kivágott lemezfelületek különbségének minimalizálása.

Nézzünk meg egy feladatot:

Olyan heti tervet kell kidolgozni, amely 3 típusú kalap termelését teszi lehetővé (T_1, T_2, T_3), mégpedig a következő mennyiségekben: 10 000, 10 000 és 20 000 db.

A kiszabandó négyszögek száma 1120.

A különböző típusú kalapok kiszabásának variánsai adottak:

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
T_1	20	10	-	15	30	-
T_2	15	10	20	-	10	-
T_3	4	20	30	35	-	50
Hulladék (cm^2)	400	200	600	300	800	700

Ha a hulladékot akarjuk minimalizálni, akkor a probléma matematikai modellje a következő:

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 és x_6 szimbólumokkal azon anyagmennyiséget jelöljük, amelyek kiszabásra kerülnek:

$$x_i \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,6)$$
$$20x_1 + 10x_2 + 15x_4 + 30x_5 = 10\,000$$
$$15x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 10x_5 = 10\,000$$
$$4x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 35x_4 + 50x_5 = 20\,000$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 1120$$
$$400x_1 + 200x_2 + 600x_3 + 300x_4 + 800x_5 + 700x_6 = v \longrightarrow min.$$

Ha „n" munka (munkás) elosztását kell megoldanunk „n" gépre (elvégzendő munkára), akkor a következő adatokat kell ismernünk:

x_{ij} = a j munka mennyisége (munkaórában kifejezve), amelyet az i gépen kell elvégezni,

d_{ij} = az az idő, amely az egyes j munkák elvégzésére szükséges, gépenként,

a_i = az i gép kapacitása,

b_j = a j munka mennyisége (órákban)

c_{ij} = az i gép költsége a j munkafolyamatra vonatkozóan.

Az adott probléma általános modellje a következő:

$$x_{ij} \geqq 0 \quad (i=1,2,..,m)$$

$$\sum_j d_{ij}x_{ij} \leqq a_i$$

$$\sum_i x_{ij} = b_j$$ mert az össz munkamennyiséget el kell végezni.

$$\sum_i \sum_j c_{ij}x_{ij} = v \longrightarrow min.$$

Példa:

Létezik négy gép, és ugyanakkor négy munkát kell elvégezni. A gépek kapacitásai: 2, 2, 1, illetve 3 gépóra, az elvégzendő munkamennyiségek viszont: 3, 1, 2, illetve 1 óra.

A technikai koefficiensek is ismertek, arra az időre vonatkoznak, amely szükséges ahhoz, hogy az egyes munkákat elvégezzék az egyes gépeken.

$$[d_{ij}] = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b_j = [3, 1, 2, 1], \qquad a_i = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Az egyes műveletek időtartamát kell minimalizálni. A modell a következő alakban írható fel:

$$x_{ij} \geqq 0 \qquad (i=1,2,3,4)$$
$$(i=1,2,3,4)$$
$$4x_{11}+x_{12}+4x_{13}+x_{14} \leqq 2$$
$$x_{21}+x_{22}+2x_{23}+3x_{24} \leqq 2$$
$$2x_{31}+3x_{32}+x_{33}+x_{34} \leqq 1$$
$$3x_{41}+x_{42}+3x_{43}+x_{44} \leqq 3$$
$$4x_{11}+x_{21}+2x_{31}+3x_{41} = 3$$

$$x_{12}+x_{22}+3x_{32}+x_{42}=1$$
$$4x_{13}+2x_{23}+x_{33}+3x_{43}=2$$
$$x_{14}+3x_{24}+x_{34}+x_{44}=11$$

A célfüggvény:

$$4x_{11}+x_{12}+4x_{13}+x_{14}+x_{21}+x_{22}+2x_{23}+3x_{24}+2x_{31}+3x_{32}+x_{33}+x_{34}+$$
$$+3x_{41}+x_{42}+3x_{43}+x_{44}=v\longrightarrow min$$

Amikor „n" munkást kell „n" munkához rendelni, a probléma másképp néz ki. Minden munkás valamennyi munkát elvégezhet, de különböző termelékenységgel. Minimális összidőt kell elérni ahhoz, hogy a munkát időben elvégezzék. Az adott hozzárendelési problémát (asszignáció) a következő modell alakjában írhatjuk fel:

x_{ij} = az i-ik munkás j-ik munkát végzi,

p_{ij} = a j munkát végző i-ik munkás termelékenysége.

$$x_{ij}\geqslant 0 \qquad (i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,n)$$
$$\sum_i x_{ij}=1$$
$$\sum_j x_{ij}=1$$
$$x_{ij}^2=x_{ij}$$
(mert az x_{ij} csak 0 vagy 1 lehet)
$$\sum\sum p_{ij}x_{ij}=z\longrightarrow min$$

A magyar módszer alkalmazásánál a modell igen egyszerűen megoldható. Nem célunk a számítási folyamatot részletesen ismertetni, de a módszer alkalmazását példán is bemutatjuk:

Négy munkást kell négy munkára irányítani. A munka intenzitásától és a munkás ügyességétől függően a feladat elvégzésére különböző időmennyiség szükséges, amelyet a következő táblázat mutat:

	P_1	P_2	P_3	P_4
M_1	4	1	4	2
M_2	1	1	2	3
M_3	2	3	1	1
M_4	3	1	3	2

Természetesen az a cél, hogy az össz elhasznált idő minimális legyen. A redukció után és a független nullák és fedővonalak kiválasztása után a táblázat a következőképpen néz ki:

3	$\boxed{0}$	3	1
$\boxed{0}$	0	1	2
1	2	$\boxed{0}$	0
2	0	2	1

A redukció megismétlése és a független nullák kiválasztása után a következő optimumot kapjuk:

3	0	2	$\boxed{0}$
$\boxed{0}$	0	0	1
2	3	$\boxed{0}$	1
2	$\boxed{0}$	1	0

Ez annyit jelent, hogy M_1 a P_4, M_2 a P_1, M_3 a P_3, míg M_4 munkás a P_2 munkát kell hogy elvégezze ahhoz, hogy az össz elhasznált munkaórák száma 5 legyen.

Abban az esetben, amikor azt a kikötést is biztosítani kell, amely az egyes munkások munkaidejének felső határát szabja meg (pl. egy munkás sem dolgozhat 3-nál több órát), akkor a tiltott relációkon ∞ jelet használunk, s ezzel eleve kizárjuk a programozás lehetőségét erre a helyre. A kezdő táblázat a következő lenne:

	P_1	P_2	P_3	P_4
M_1	00	1	00	1
M_2	1	1	2	00
M_3	2	00	1	1
M_4	00	1	00	2

A probléma megoldásával az előbb megkapott optimumot kapnánk.

A magyar módszer a transzport problémára is alkalmazható, amely szintén a termelés előkészítési területéhez tartozik. A transzport probléma olyan hozzárendelési feladat, ahol az nxm nagyságú mátrix elemei ismertek, amelyek a távolságokra vonatkoznak, vagy pedig a szállítási költségekre az egyes relációkon.

Induljunk ki egy példából. Meg kell határoznunk egy szállítási tervet, ahol a nyersanyagot négy raktárból 6 műhelybe kell szállítani. A távolságot (km), a szükségletet, valamint a raktárkészletet a következő táblázatban láthatjuk:

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	Készlet
R_1	7	1	3	2	5	1	40
R_2	4	5	7	2	5	8	50
R_3	1	3	4	2	1	5	50
R_4	3	6	2	3	4	4	40
Szükséglet	20	40	30	20	30	40	

[q]-ban

A redukció után a következő táblázatot kapjuk:

6	0	2	1	4	0	40
2	3	5	0	3	6	50
0	2	3	1	0	4	50
1	4	0	1	2	2	40
20	40	30	20	30	40	

Nem célunk a magyar módszert részletesen ismertetni, hanem inkább rámutatunk a felhasznált irodalomra: [2].

	10				30	0
	30		20			0
20				30		0
0	0	0	0	0	0	

Mivel több anyagmennyiség már a készletekben nincs, és ugyanakkor minden szükséglet ki van elégítve, a feladat megoldottnak tekinthető. Az optimális program szerint:

R_1, 10q nyersanyagot M_2-nek és 30q M_6-nak szállít
R_2, 30q " M_2 és 20q M_4 "
R_3, 20q " M_1 és 30q M_5 "
R_4, 30q " M_3 és 10q M_6 "

Az össz minimális távolság és a szállított nyersanyagmennyiség szorzata:

$$10\cdot1+30\cdot1+30\cdot5+20\cdot2+20\cdot1+30\cdot1+30\cdot2+10\cdot4=380\,q\,km.$$

Felhasznált irodalom

1. A vállalati döntések előkészítésének matematikai modelljei, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1967.
2. Mr. Kisimre István: A „magyar módszer" alkalmazása, Létünk, 5/1976. str. 42.

3. Operációkutatási esettanulmányok. Számítástechnikai Oktató Központ, Budapest, 1971.
4. Mr. Đorđe Sorad: Matematički metodi u pripremi proizvodnje, II deo, Planiranje i analiza poslovanja, 3/1973. Beograd.
5. Mr. Đorđe Sorad: Matematički metodi za planere i analitičare, Planiranje i analiza poslovanja, 10/1971. Beograd.
6. Mr. Đorđe Sorad: Optimalno odlučivanje, Ekonomski fakultet, Subotica, 1973.
7. Dr. Varga József: Gyakorlati programozás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.

Rezime

Priprema proizvodnje uz korišćenje savremenih matematičkih metoda

Članak obrađuje najvažnije oblasti u pripremi proizvodnje, gde se koriste razni metodi matematičkog programiranja. Optimalno programiranje se danas u praksi koristi u nedovoljnoj meri.

Izlaganje se sastoji od kratkog teoretskog izlaganja metoda i od konkretne ekonomske primene na primeru. Na takav način autor prikazuje planiranje potrebnih količina proizvodnih faktora, tj. izračunavanje potrebnih količina sastojaka za proizvodnju složenog proizvoda, kao i ostalih pomoćnih materijala, fonda vremena mašinskog parka, vremena montiranja svake vrste proizvoda. Obrađuje se i način izbora optimalne tehnološke varijante u slučaju kada se jedan proizvod može izraditi po više tehnoloških varijanata ili istom tehnologijom ali na raznim tipovima mašina, koji imaju različite kapacitete.

Prikazuje se i izrada programa proizvodnje u sistemu montažnih traka, zatim optimalno krojenje materijala, gde je cilj minimizacija otpadaka. Sve je to u uskoj vezi sa ekonomisanjem proizvodnih faktora (materijala, sirovina, mašinskog vremena).

Sledeća oblast je program raspodele radova (radnika) na mašine uz minimalizaciju potrebnog vremena izrade operacija.

Zusammenfassung

Die Produktionsvorbereitung mit Hilfe zeitgemässer matematischer Methoden

Im Artikel werden die wichtigsten Gebiete der Produktionsvorbereitung bearbeitet, bei denen verschiedene Methoden der mathematischen Programmierung angewandt werden können. Optimale Programmierung wird heutzutage bei uns ungenügend gebraucht.

Die Ausführung besteht aus einer kurzen theoretischen Erklärung der Methode, und aus konkreter Durchführung, mit Hilfe eines Beispiels. Auf diese Weise zeigt der Verfasser das Planen der nötigen Produktionsfaktoren, d. h. das Berechnen der nötigen Bestandteile zur Erzeugung eines komplizierten Pro-

duktes. Gleichzeitig auch die nötigen Hilfsmaterien, der Arbeitszeit der Maschinen und die Montierungszeiten jedes Produktes.

Es wird die Möglichkeit der optimalen technologischen Varianten — wenn ein Produkt nach verschiedenen Varianten, oder auf Grund der selben Technologie, aber an verschiedenen Maschinen mit verschiedener Kapazität ausgearbeitet werden kann — vorgezeigt.

Ebenso wird im Artikel dargestellt, wie man ein Programm der Produktion, bei montierten Bändern ausarbeitet, sowie die besten Methoden des Schneidens verschiedener Materiale und der Minimisierung der Abfälle. Das alles ist in engem Zusammenhang mit der ökonomischen Anwendung der Produktionsfaktoren (Material, Grundstoffe, Maschinen, Arbeitszeit usw.).

Das nächste Gebiet ist die Arbeitsteilung der Arbeiter bei den Maschinen und Minimisierung der nötigen Zeit für die einzelnen Operationen.