Kollár László

A DINAMIKUS PROGRAMOZÁS ALKALMAZÁSÁNAK LEHETŐSÉGEI

1. ELŐSZÓ

Ma már a gazdasági kérdések feldolgozásakor fokozottabban alkalmazzák az operációkutatás módszereit. Persze csak akkor, ha valójában felismerik az általuk kínált lehetőségeket.

Olyan ismeretek birtokában kell lennünk, hogy a gazdasági életben felmerülő kérdéseket — az adottságok méltányolásával — matematikai módszerekkel is megoldhassuk.

Az operációkutatásnak jelentős szakirodalma van, feltűnő azonban, hogy a szerbhorvát és a magyar nyelven megjelent szakkönyvekben a dinamikus programozás — talán éppen azért, mert új elmélet — nem kapott méltó helyet.

Márpedig az elmélet alaposabb megértését és gyakorlati alkalmazhatóságának felismerését a szakirodalom nagymértékben elősegítené. Az ember akaratlanul is érdeklődni, kutatni kezd, hiszen a témában való elmélyülés a gazdálkodásban új megoldást villant fel, amely újabb lehetőségeket ad az optimalizálás elméletének.

Habár az operációkutatás módszerei közül a lineáris programozás már meghonosodott, és a nem lineáris programozás módszere is egyre inkább tért hódít, sok esetben mégsem tudjuk egyiket sem alkalmazni a feladatok megoldására. Ezen az akadályon átsegít bennünket a dinamikus programozás módszere. A tudományban így kapott helyet és így tör utat magának napjainkban.

Alapja az optimalizálási tétel.

Richard Bellman amerikai matematikus fejtette ki 1956-ban a gazdasági jelenségekben előforduló értékfüggvények optimumának keresésekor.

A Bellman-féle optimalizálási értelmezésből kell kiindulnunk, hogy a következő részben ismertessük a dinamikus programozás alkalmazási lehetőségeit.

A beruházás dinamikus programozása tulajdonképpen elméleti megoldásokat és következtetéseket ad, azzal, hogy konkrét példa segítségével közelíti meg a gyakorlatot. Hiszen a beruházás és az eszközfelosztás minden időben, de főleg korunk gazdaságában sarkalatos kérdés. Nem csupán a gazdasági szervezetek beruházását és eszközfelosztását érinti, hanem kiterjed a gazdasági övezetek, ágazatok és csoportok közti beruházásra, illetve eszközfelosztásra. Valódi jelentősége tulajdonképpen ebben rejlik.

A munka utolsó része tömören ismerteti a dinamikus programozás egyéb alkalmazási lehetőségeit. Megemlíti a készletgazdálkodást, az optimális irányítást, a termelés tervezésének problémáját stb.

2. *R. Bellman optimalitási tétele*

Richard Bellman amerikai matematikus a dinamikus programozás megalapozója. Első írásai 1956-ban, első könyve, a Dynamic Programming pedig 1957-ben jelent meg. Módszerének, amelyet a gazdasági jelenségekben előforduló értékfüggvények optimumának megkeresésére dolgozott ki, a dinamikus programozás nevet adta. Egyébként talán jobban megfelelt volna a nem annyira attraktív név, pl. a rekurziós optimalizálás.

Módszerét nemcsak gazdasági problémák megoldására lehet felhasználni, hanem például a fizikai vagy a matematikai kutatásban, elemzésben is.

A Bellman által kifejtett módszer alapja egy bizonyos optimalitási tétel, melyet általános elvként így fogalmazott meg: „Valamely politika akkor optimális, ha egy adott időben — akármilyenek voltak is az előző döntések — a hátralevő döntések optimális politikát alkotnak, figyelembe véve az előző döntések eredményét". (Irodalom 2, 64. oldal)

Dinamikus programozásnak nevezhetjük az olyan jellegű optimalizálási módszert, amelyben a célfüggvény extrémálása, egymást követő döntések optimális sorozata ún. optimális politikával történik.

A dinamikus jelzőkkel azt kívánjuk hangsúlyozni, hogy az ilyen programozási feladatok jellegzetessége a döntések egymásutánjának (sorozatának, folyamatának) jelenléte.

A döntések sorozatát politikának nevezzük. A kapcsolódó döntések sorozatát, amely valamely politikának a része, alpolitikának hívjuk. Bizonyítható, hogy az optimális politika csak optimális alpolitikákból állhat, ugyanis az optimális politika csak a tényleges kezdeti helyzettől függ. A folyamatban a rendszer múltbeli története nem befolyásolja a jövőbeli tevékenységet. Persze a dinamikus programozás előrenéző, perspektívát figyelembe vevő, nem rövidlátó, egy lépésre történő tervezés. Ellenkezőleg, minden lépésben az egész operáció érdekeinek figyelembevételével választható meg a döntés.

Ezek után megállapíthatjuk, hogy a dinamikus programozás tulajdonképpen több részes folyamat szakaszonkénti tervezése, melynek során mindegyik szakaszon csak egy lépést, részt optimalizálunk.

Végezetül megjegyezzük: A módszer, amelynek segítségével az optimumot megkeressük a d i n a m i k u s p r o g r a m o z á s. Abból áll, hogy addig keresünk optimális alpolitikákat, míg végül megtaláljuk az optimális politikát. Az optimalizálást egy bizonyos fázisból kiindulva végezzük. Az a fontos, hogy az alkalmazott gondolatmenet az o p t i m a l i t á s i tételre támaszkodhasson.

3. *A beruházás dinamikus programozása*

A beruházás anyagi és műszaki megalapozottsága, a rendelkezésre álló erőforrások koncentrált és hatékony felhasználásával kapcsolatos gondok egyidősek a tervgazdálkodással.

A vállalatvezető sok esetben még ma is hosszú évek során szerzett tapasztalatokra, statisztikai és számviteli adatokra alapozva dönt egy-egy beruházásról. A fentiekben leírtakban tendenciát lát, és ennek alapján egyedi határozatokat hoz. Természetesen igyekszik számításaival kiszínezni, valószínűvé tenni intenzív döntéseit. Pedig ma már a gazdasági problémák megoldásához egyre nagyobb mértékben alkalmazzák az operációkutatás módszereit.

A gazdasági fejlődés bonyolult összefüggései statikusan is ábrázolhatók és értelmezhetők. S ebben nincs semmi titokzatosság. A dolgok közötti összefüggések az egyértelműség látszatát keltik. A direkt kapcsolatok — legalábbis abban a sémában, amelyben felvázolják őket — valóban fennállnak. Így pl. ha a gazdasági szerkezetből az egyik vagy másik ágazatot kiragadjuk, akkor belső összefüggései magától értetődőeknek tűnnek. Az ágazat fejlesztésének vagy korszerűsítésének oka önmagában mindig a megalapozottság látszatát kelti. Ebből fakad az ágazati, az iparági és a nagyvállalati fejlesztési koncepció visszatérő motívuma: az *egyesek* kiemelt fejlesztése. Az ilyen okok akkor válnak kétségessé, ha a többi termelőterület (ágazat, vállalat) is hasonlókra hivatkozva kér különleges elbírálást. Ezért nem könnyű a fejlesztési eszközök elosztása. A döntés joga azt a szervet illeti meg, amelynek megvannak a döntéshez szükséges feltételei, s a helyes döntéshez a legnagyobb érdeke fűződik.

Az ellentmondás nyilvánvaló. Belőle kell kiutat találnunk. Tehát el kell vetnünk az autoakcionális nézőpontot, mivel ez a szemlélet nem vezethet eredményre.

Hogyan közelíthetők meg ezek a problémák?

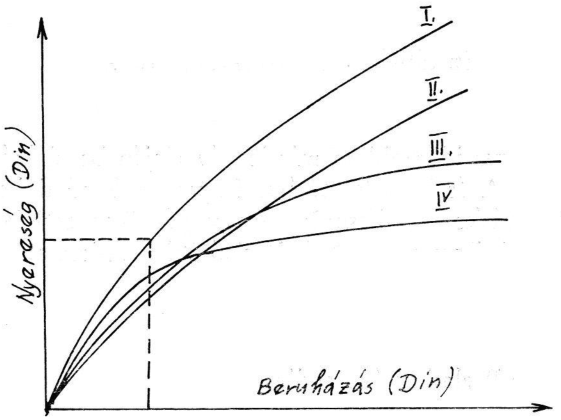
Az *egyéb* feltételeken kívül alkalmaznunk kell az operációkutatás módszereit és modelljeit. A többi között alkalmazhatjuk a dinamikus programozás módszerét is. Megjegyzem, hogy ma már alapos kutatás folyik mind a makroökonómiában, mind némely ágazatban, iparágban és vállalatban. Eredményei valóban felhasználhatók. Bár az operációkutatás már több évtizede ismert, mégsincs nálunk erre alapozott irányítás, döntés.

3.1. *A beruházási probléma meghatározása*

Ebben a részben ismertetünk több idevágó elméleti és módszertani összefüggést, s a beruházás dinamikus programozásának matematikai megfogalmazását.

3.11. *A beruházási eszközök szétosztása*

Legyen pl. négy gazdasági övezetünk (I, II, III, IV)
Rendelkezünk „A" beruházási összeggel. Ezt kell a négy övezet között szétosztani. Az övezetekben elérhető nyereség a beruházás függvényében ismert. Az egyes övezetekben elérhető nyereség a beruházás függvényében:



Meg kell keresnünk, hogy a beruházás szétosztásának melyik politikája adja a maximális nyereséget.

A feladat megoldására felhasználjuk az optimalitási tételt.

Legyen X_1, X_2, X_3, X_4 a beruházás az I, II, III és IV övezetben. A nyereség legyen $w_1(X_1)$, $w_2(X_2)$, $w_3(X_3)$, $w_4(X_4)$ és az összes nyereség $W(X_1, X_2, X_3, X_4)$.

Tehát:

$W(X_1, X_2, X_3, X_4) = w_1(X_1) + w_2(X_2) + w_3(X_3) + w_4(X_4)$ az alábbi korlátozó feltétellel

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = A$ (A négy változó csak egész számú értéket vehet fel.)

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$X_1+X_2=u_1 \qquad\qquad u_1\leq A$$
$$u_1+X_3=u_2 \qquad \text{hol}$$
$$u_2+X_4=A \qquad\qquad u_2\leq A$$

Tehát:

$$W\ (X_1,\ u_1,\ u_2,\ A)=w_1\ (X_1)+w_2\ (u_1-X_1)+w_3\ (u_2-u_1)+w_4\ (A-u_2).$$

Számítsuk ki a következőket:

$$w_{1,\,2}\,(u_1)=\underset{X_1=0,\,1,\,2\,\ldots,\,u_1}{\mathrm{MAX}}\ [w_1\,(X_2)+w_2\,(u_1-X_1)]$$
$$w_{1,\,2,\,3}\,(u_2)=\underset{u_1=0,\,1,\,2\,\ldots,\,u_2}{\mathrm{MAX}}\ [w_{1,\,2}\,(u_1)+w_3\,(u_2-u_1)]$$
$$w_{1,\,2,\,3,\,4}\,(A)=\underset{u_2=0,\,1,\,2\,\ldots,\,A}{\mathrm{MAX}}\ [w_{1,\,2,\,3}\,(u_2)+w_4\,(A-u_2)]$$

Az optimális politikákat kiszámítottuk A esetében. Ezek X_1^*, X_2^*, X_3^* és X_4^*.

A fenti módszerhez táblázatot i szerkeszthetünk.

3.12. Egy m éves időszakban minden év elején beruházást kell végezni két üzemrészleg, A és B fejlesztésére. Legyen a kezdeti beruházási keret x, és ebből induláskor fordítsunk A-ra y pénzösszeget! B-re tehát x—y pénzösszeg marad. Legyen az A és B első évi jövedelme:

$$g\ (y),\ \text{illetve}\ h\ (x-y)$$

az év végén A és B eladási ára pedig

$$a \cdot y\ \text{ill.}\ b\ (x-y)$$

Az y értékének alkalmas eldöntésével az első évi jövedelem maximálandó azaz

$$w_1(x)=\max\ [g\ (y)+h\ (x-y)]=\max\ W\ (x,\ y)-W\ (x,\ y_0)$$

A második év eleji x_1 beruházási keret eggyezzék meg az első év végén, a maximális jövedelemmel kapott eladási árral, azaz:

$$x_1=ay_0+h\ (x_0-y_0) \qquad (x_0=x)$$

Az X_1 keretet a korábbi módon, vagyis a $\max W(x_1, y^*) = W(x_1, y_1)$ évi jövedelem-maximális alapján osztjuk fel y_1 és $x_1—y_1$ részre.

Az első *két* évi maximális jövedelem:

$$w_2(x) = \max_{\substack{0 \le y \le X \\ 0 \le y \le X_1}} [W(x, y) + W(x_1, y^*)] = \max_{0 \le y \le X} [W(x, y) + \max_{0 \le y \le X_1} W(x_1, y)] =$$
$$= \max_{0 \le y \le x} [W(x, y) + w_1(X_1)] = W(x_0, y) + W(x_1, y_1)$$

A fentiekhez hasonlóan a harmadik évi x_2 beruházás és az y_2 eldöntése (a és b állandósága mellett):

$$x_2 = ay_1 + b\,(x_1 — y_1), \quad \max W(x_2, y^*) = W(x_2, y_2),$$

az első háromévi maximális jövedelem:

$$w_3(x) = \max [W(x, y) + w_2(X_2)] = \sum_{i=0}^{2} W(x_i, y_i)$$

módon kapható.

Teljes indukcióval az első k évi maximális jövedelem

$$w_k(x) = \max \{W(x,y) + w_{k-1}[X(x, y)]\}$$
$$k = 1, 2, \ldots, m; \quad w_0 = 0,$$
$$X(x,y) = ay + b(x—y); \quad W(x, y) = g(y) + h(x—y)$$

rekurzív formulával fejezhető ki, amelyben az $X(x, y)$ alakot k—1 lépésen át optimális értelemben vehetjük, vagyis megfelel a

$$O \le y_0 = y \le x, \qquad 0 \le y_{k-i} \le x_{k-1}$$

optimális politikának.

$$\text{Az } X_0 = X, \; x_{k-1} = ay_{k-2} + b(x_{k-2} — y_{k-2}), \; X(x_{k-2}, \; y_{k-2})$$

beruházási állapothatározókkal számítható.

Az m éves időszak teljes maximális jövedelme

$$w_m(X) = \max \; w(X, y) + w_{m-1} \; X(X,y)$$

módon alakul.

A feladat lényege, hogy évenként meghozzuk az x_{k-1} beruházási állapothatározóval kapcsolatos y_{k-1} optimális felosztási döntést. Az így megkapott optimális politika maximálja az m időszak teljes hozamát.

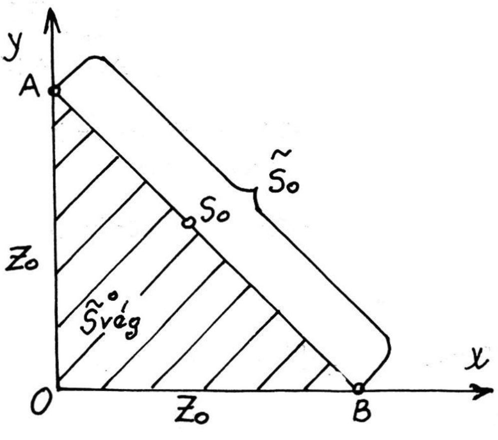
3.2. *Az eszközök elosztása*

Két gazdasági ágazatunk van: I. és II. (részleg). Az anyagi eszközök mennyisége Z_0. A befektetett anyagi eszközökből az I. termelési ágban $f_{(x)}$ lesz a jövedelmünk. Ugyanakkor az eszközök csökkennek részben elhasználódnak, úgyhogy az év végére a kezdetiből $\gamma_{(x)}$ mennyiség marad. $\gamma_{(x)} \leq x$. Azonos a helyzet a II. ágba beruházott anyagi eszközök y-mennyisége esetében. Egy év alatt g(y) jövedelmet eredményez, és $\gamma_{(y)}$-ra csökken. $\gamma_{(y)} \leq y$

Az eszközök megmaradt részét minden év elteltével újból elosztjuk a termelési ágak között. Új eszközök nem állnak rendelkezésünkre, és a termelésbe csak a megmaradt eszközöket ruházzuk be.

Milyen összegű eszközt, melyik évben, melyik termelési ágba kell beruháznunk, amellyel „m" év alatt az összegezett jövedelem eléri a maximumot?

A rendszer állapotát a fázistérben S ponttal ábrázoljuk.



Az O_x abszcisszatengelyen az I. termelési ágba befektetett eszközök összegét, az O_y ordinátatengelyen a II. termelési ágba befektetett eszközök összegét mérjük fel.

A fázistér tehát az xO_y síknak az AOB háromszög által határolt része.

$$x+y \leq Z_0 \text{ és}$$

$$x \geq 0, \qquad y \geq 0$$

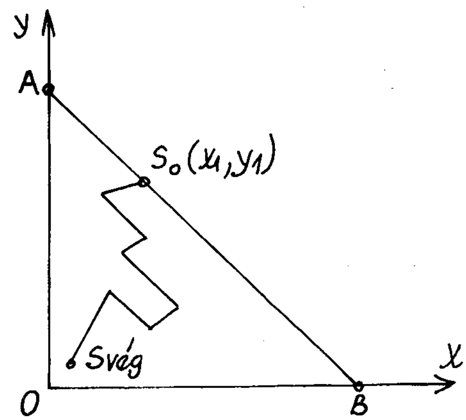
A rendszer kezdeti állapotának tartománya (S_0) az AB szakasz bármelyik pontja, mert tudjuk hogy $x+y=Z_0$.

Ami a rendszer Svég végső helyzetére vonatkozik, abból csak azt tudjuk, hogy

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y=Z_0, \text{ azaz}$$

az Svég tartomány az egész AOB háromszöget felöleli, kivéve az AB átfogót.

A következő ábra az S pont mozgását ábrázolja a fázistérben:



Meg kell találnunk az S_0 pont olyan S_0^* helyzetét az AB egyenesen és az S pont olyan pályáját a fázistérben, hogy az összegezett bevétel

$$W = \sum_{i=1}^{m} w_i \text{ az összes lépés alatt a maximumot érje}$$

el. Ez a példa a dinamikus programozás tipikus feladata.

3.3. Sztochasztikus változat

A beruházás dinamikus programozását determinisztikus változatban végeztük, azaz pontos adatokkal és eredményekkel.

A valósághoz közelebb áll azonban a dinamikus programozás sztochasztikus változata.

Sokszor van olyan feladatunk, amelyben lényeges szerepet játszanak az S rendszer állapotára és a W nyereségére ható véletlenségi tényezők. Az irányítást nem lehet egyértelműen meghatározni az S_0 kezdeti állapottal és a választott U irányítással, mivel valamilyen mértékben a véletlentől függ. Az ilyen feladatot nevezik sztochasztikusnak.

A dinamikus programozás sztochasztikus feladata a következő módon közelíthető meg. Az adott S rendszer az idő múlásával változtatja állapotát. A folyamatra valamilyen módon hatással lehetünk, úgy, hogy a kívánt irányban befolyásoljuk. A hatást nem ellenőrizhetjük teljesen, mivel menete a véletlentől is függ. Az ilyen folyamatot *véletlen irányította folyamatnak* is nevezhetjük.

Megállapítottuk, hogy az S rendszer állapota véletlen, ezért minden szakaszon a w_i jövedelem és a W összegezett jövedelem is a véletlentől függ. Természetesen olyan U irányítást *szeretnénk* alkalmazni, amely maximum W jövedelmet eredményez. De mivel bármilyen irányítás ellenére is a W jövedelem véletlen marad, ezért olyan irányítást kell választanunk, amely esetében a véletlen W jövedelem *átlagos értéke* maximális lesz.

A W átlagos értékét (várható teljes valószínűségét) $\overline{W}$ betűvel jelöljük.

Ha a W kritérium additív, akkor:

$$\overline{W} = \sum_{i=1}^{m} \overline{W}_i$$

ahol $\overline{W}_i$ az átlagos jövedelem i-edik szakaszán van.

A véletlen W kritérium helyett megvizsgáljuk átlagos $\overline{W}$ értékét. Ez a kritérium szintén additív.

Az egyes szakaszokon U_1^*, U_2^*, ... U_m^* optimális irányításokból álló olyan U^* optimális irányítást kell kiválasztanunk, hogy a $\overline{W}$ kritérium maximális legyen.

A sztochasztikus feladatokban az S_i rendszer állapotát az i-edik lépés után *nem teljesen* az S_{i-1} állapot és az U_i irányítás *határozza* meg. A rendszer állapota a véletlentől is függ.

A w_i jövedelmet az i-edik lépésen nem határozza meg teljesen a rendszer S_{i-1} állapota és az alkalmazott U_i irányítás; véletlen értéket is felvehet, és az S_{i-1}-től, illetve U_i-től a lehetséges értékek között csak a valószínűség eloszlása függ. Bennünket azonban nem is a w_i véletlen jövedelme érdekel, hanem átlagos értéke, amelyet a valószínűségi eloszlás figyelembevételével átlagosíthatunk és vizsgálhatunk.

Feltételezzük, hogy mind az S_i véletlen állapotára vonatkozó valószínűségi eloszlás, mind a feltételezett átlagos jövedelem $\overline{W}_i$ (S_{i-1}, U_i) csak az S_{i-1} és U_i értékétől függ.

Feladatunk, hogy bármely lépés lehetséges kimenetele közül mindegyikre megtaláljuk a következő lépésen a feltételes optimális irányítást.

A sztochasztikus megoldásban maga *az U^* optimális irányítás véletlen lesz,* és egyes esetekben attól függ, hogyan alakul a véletlen folyamat. Meg kell határoznunk minden lépésre azt az *irányítást, amely megfelel az előző lépés bármely véletlen kimenetelének.* Ez a rendszer tényleges állapotától függő *visszacsatoláson* alapuló irányítás.

A sztochasztikus feladat i-edik lépésén meg kell határoznunk az U_i^*

(S_{i-1}) feltételezett optimális irányítást, amely az összes további lépést, a feltételezett átlagos jövedelmet a maximumhoz viszi közelebb. A maximumot úgy határozzuk meg, mint a determinált megoldásnál, azzal a különbséggel, hogy a véletlen jövedelem helyébe az átlagos értéket helyettesítjük.
Az i-edik lépés bármely kimenetelére az utolsó lépéseken a feltételezett maximális átlagos jövedelem ismert:

$$\overline{W}^{*}_{i+1}, \ldots m(S_i)$$

Az S_i állapot véletlen, és eloszlása az S_{i-1}-től és U_i-től függ, ezért a véletlen jövedelmet átlagolni lehet, s így megkapjuk a *kétszer átlagolt* jövedelmet.

$$\overline{\overline{W}}_{i+1}, \ldots m(S_{i-1}, U_i)$$

Adjuk össze ezt az értéket az i-edik lépésen szerzett bármilyen U_i irányításkor kapott átlagos jövedelemmel:

$$\overline{W}_{i,\ i+1}, \ldots m(S_{i-1}, U_1) = w_i (S_{i-1}, U_1) + \overline{\overline{W}}_{i+1}, \ldots, m (S_{i-1}, U_i).$$

Az i-edik lépésen a feltételezett U_i^* (S_{i-1}) optimális irányítás olyan, amelynél az előbbi értéke a maximumot éri el:

$$\overline{W}_{i,\ i+1}, \ldots, m(S_{i-1}) = \overset{\max}{u_1} \{ \overline{W}_{i,\ i+1}, \ldots, m(S_{i-1}, U_1) \} =$$

$$= \overset{\max}{U_i} \{ \overline{w}_i \ (S_{i-1}, U_i) + \overline{\overline{W}}^{*}_{i+1}, \ldots, m(S_{i-1}, U_i) \} .$$

A fenti képletet mindegyik lépésre alkalmazva meghatározzuk a feltételezett optimális irányítást és a feltételezett átlagos maximális jövedelmet. Az S_0 kiinduló állapot rendszerint nem véletlen, és a valószínűségi eloszlás miatt nem szükséges variálni. Ez esetben az első szakaszban az U_i^* optimális irányítás is teljesen meghatározott. Az átlagos jövedelem e szakasz figyelembevételével a következő:

$$\overline{W}^{*} = \overline{\overline{W}}^{*}_{1,\ 2,\ \ldots,\ m}.$$

Ezzel a feladat megoldása kész. Az optimális irányítás

$$U^* = [U_1^*, U_2^* (S_1), U_3^* (S_2), \ldots, U_m^*(S_{m-1})]$$

melynek minden eleme, kivéve az elsőt, véletlen és a rendszer állapotától függ. Ennek az irányításnak megfelelő maximális átlagos jövedelem

$$\overline{W}^{*} = \overline{\overline{W}}^{*}_{1,\ 2,\ \ldots,\ m}.$$

Így alkalmazható tehát az optimális tétel sztochasztikus esetben.

*

Az itt felsorolt beruházási feladatok csak egy része a lehetségesnek. A helyzettől függően a beruházási feladatok különböző módon, különböző ismérvekkel fogalmazhatók meg. Pl. a termelésbe beruházható a teljes jövedelem, vagy csak annak bizonyos hányada. Kereshető olyan irányítás, amely m szakasz alatt maximális bevételt eredményez. Ezenkívül más feladat is meghatározható és megoldható a dinamikus programozás módszerével.

3.4. *Az eszközök elosztásának dinamikus programozása*

Példánk egy munkaszervezet 5 évre szóló fejlesztési programja. Tudjuk, mennyi pénzt osztanak el a társult munka alapszervezetei között. A jövedelem alakulásához kvadratikus függvényt illeszthetünk. Az eszközcsökkenést lineáris függvény fejezi ki.

Az egyszerűség kedvéért jövedelmünkből nem végeztünk beruházást. Így tisztán azt vizsgáltuk, hogy az optimális elosztás mekkora jövedelmet biztosít a vállalatnak.

A függvények:

$$\text{I.}\ f(x)=0{,}1\ x^2$$
$$p(x)=0{,}9\ x$$
$$\text{II.}\ f(y)=0{,}25\ y^2$$
$$p(y)=0{,}65\ y$$

Kezdeti anyagi eszközünk, amelyet az I. és II. alapszervezet között kell elosztani a tervezett időszakban, ill. annak egy-egy évében $Z_0=14{,}50$ millió dinár. 5 évre kell terveznünk.

3.4.1. *Megoldás*

1. Az x_5 feltételezett optimális irányítást az utolsó lépésben mint x_5 értéket kapjuk, s ez az az irányítás, amelynél a jövedelem a maximumot éri el. Az 5. év elején az eszközök mennyisége Z_4-gyel legyen egyenlő. Ahhoz, hogy az 5. lépésben megtaláljuk a feltételezett optimális irányítást, az $x_5(Z_4)$-et meg kell mindegyik Z_4-re keresni.

$$W_5(Z_4)=\max_{0\leq x_5\leq Z_4}\{w_5(Z_4,\ x_5)\}$$

ahol:

$$w_5(Z_4, x_5)=0{,}1\, x_5^2 + 0{,}25\,(Z_4-x_5)^2$$

A függvény grafikonja adott Z_4

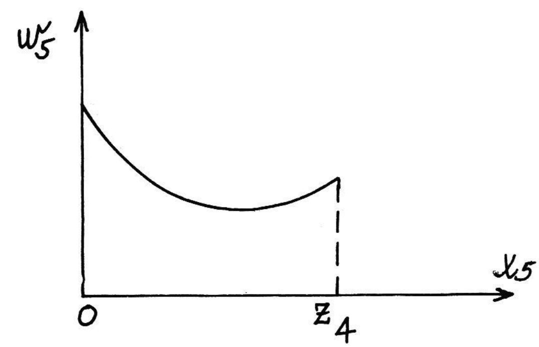
$$w_5 = w_5(Z_4, x_4)$$

esetén az x_5 változótól függő parabolával ábrázolható. A w_5 függvény x_5 szerinti második differenciálhányadosa pozitív, s ezért a parabolának minimuma van. A maximális értéket a $(0, Z_4)$ szakasz határán éri el Meghatározzuk, hogy hol. Behelyettesítjük az $x_5=0$ és $x_5=Z_4$ értékét Az első esetben (amikor $x_5=0$)

$$w_5=0{,}25\ Z_4^2\ ,$$

a második esetben (amikor $x_5=Z_4$)

$$w_5=0{,}1\ Z_4^2\ .$$



Az első mennyiség nagyobb a másodiknál, azaz független az $x_5=Z_4$ értékétől. Akkor lesz jövedelmük az utolsó lépésen, ha $x_5=0$, ez viszont azt jelenti, hogy az utolsó lépésben minden anyagi eszközt a II. alapszervezetbe kell beruházni.

Optimális irányítás esetén az utolsó év:

$$W^*_5(Z_4)=0{,}25\ Z_4^2 \text{ jövedelmet eredményez.}$$

2. Térjünk rá az eszközöknek a 4. évben való elosztására. Feltételezzük, hogy ehhez az évhez Z_3 eszköztartalékkal érünk el. Keressük meg az utolsó két évre a feltételezett maximális jövedelmet.

$$W^*_{4,5}\,(Z_3)=w_4(Z_3, x_4)+W^*_5\,(Z_4)$$

$$w_4(Z_3, x_4) = 0{,}1\, x_4^2 + 0{,}25\, (Z_3 - x_4)^2,$$

$$Z_4 = 0{,}9\, x_4 + 0{,}65\, (Z_3 - x_4), \text{ azonban}$$

$$W^*_5\, (Z_4) = 0{,}25\, [0{,}9\, x_4 + 0{,}65\, (Z_3 - x_4)]^2 \text{ és ezért}$$

a fentiek alapján

$$W_{4,5}(Z_3) = \{0{,}1\, x_4^2 + 0{,}25\, (Z_3 - x_4)^2 + 0{,}25\, [0{,}9\, x_4 + 0{,}65\, (Z_3 - x_4)]^2\}$$

A kapcsos zárójelben levő kifejezés az x_4-hez viszonyítva újból pozitív második diferenciálhányadosú másodfokú polinom. Grafikonja szintén minimummal rendelkező parabola. A maximumot ezért újból az intervallum szélső pontjaiban kell keresnünk: $x_4 = 0$ és $x_4 = Z_3$.

Az első esetben (amikor $x_4 = 0$)

$$W_{4,5} = 0{,}3556\, Z_3^2\,,$$

a második esetben (amikor $x_4 = Z_3$)

$$W_{4,5} = 0{,}30\, Z_3^2\,.$$

Az első mennyiség nagyobb a másodiknál. A maximumot újból $x_4 = 0$ esetén éri el, és

$W^*_{4,5}(Z_3) = 0{,}3556\, Z_3^2$-vel egyenlő, azaz a 4. lépésben is minden anyagi eszközt a II. alapszervezetbe kell beruháznunk.

3. Nézzük a harmadik lépést!

Keressük meg az utolsó 3 évre a feltételezett maximális jövedelmet!

$$W^*_{3,4,5}(Z_2) = w_3(Z_2, x_3) + W^*_{4,5}(Z_3), \text{ ahol}$$

$$w_4(Z_2, x_3) = 0{,}1\, x_3^2 + 0{,}25\, (Z_2 - x_3)^2$$

$$Z_3 = 0{,}9\, x_3 + 0{,}65\, (Z_2 - x_3)$$

$$W^*_{4,5}(Z_3) = 0{,}3556\, [0{,}9\, x_3 + 0{,}65\, (Z_2 - x_3)]^2$$

A fentiek alapján:

$$W_{3,4,5}(Z_2) = \{0{,}1\, x_3^2 + 0{,}25\, (Z_2 - x_3)^2 + 0{,}3556\, [0{,}9\, x_3 + 0{,}65\, (Z_2 - x_3)]^2\}$$

A kapcsos zárójelben levő kifejezés az x_3-hoz viszonyítva újból pozitív második differenciálhányadosú másodfokú polinom, grafikonja minimummal rendelkező parabola. A maximumot ezért az intervallum szélső pontjaiban keressük:

$$x_3 = 0 \text{ és } x_3 = Z_2.$$

Az első esetben (amikor $x_3 = 0$)

$$W_{3,4,5} = 0{,}40\, Z_2^2 ,$$

a második esetben (amikor $x_3 = Z_2$)

$$W^*_{3,4,5} = 0{,}388\, Z_2^2 .$$

Az első mennyiség nagyobb a másodiknál. A függvény a maximumot újból $x_3 = 0$ esetén éri el, és

$W^*_{3,4,5}(Z_2) = 0{,}40\, Z_2^2$ egyenlő, azaz a 3. lépésben is minden anyagi eszközt a II. tmasz-ba kell beruháznunk.

4. Térjünk rá a második lépésre!

Keressük meg az utolsó 4 évre a feltételezett maximális jövedelmet!

$$W^*_{2,3,4,5}(Z_1) = w_2(Z_1, x_2) + W^*_{3,4,5}(Z_1), \text{ ahol}$$

$$w_2(Z_1, x_2) = 0{,}1\, x_2^2 + 0{,}25\, (Z_1 - x_2)^2$$

$$Z_2 = 0{,}9\, x_2 + 0{,}65\, (Z_1 - x_2)$$

$$W_{3,4,5}(Z_2) = 0{,}4\, [0{,}9\, x_2 + 0{,}65\, (Z_1 - x_2)]^2$$

$$W_{2,3,4,5}(Z_2) = \{0{,}1\, x_2^2 + 0{,}25\, (Z_1 - x_2)^2 + 0{,}4\, [0{,}9\, x_2 + 0{,}65\, (Z_1 - x_2)]^2\}$$

A kapcsos zárójelben levő kifejezés az x_2-höz viszonyítva újból pozitív második differenciálhányadosú másodfokú polinom, grafikonja minimumos parabola. A maximumot ezért az intervallum szélső pontjaiban keressük:

$$x_2 = 0 \text{ és } x_2 = Z_1.$$

Az első esetben (amikor $x_2 = 0$)

$$W_{2,3,4,5}\, (Z_1) = 0{,}419\, Z_1^2 ,$$

a második esetben (amikor $x_2 = Z_1$)

$$W_{2,3,4,5}(Z_1) = 0{,}424\ Z_1^2 .$$

A második mennyiség nagyobb az elsőnél, azaz független az $x_2 = 0$ értékétől. A jövedelem ebben a lépésben akkor lesz maximális, ha $x_2 = Z_1$, azaz a feltételezett optimális irányítás csak a Z_1-től függ, és ez azt jelenti, hogy a második lépésben minden anyagi eszközt az I. tmasz-ba kell beruháznunk.

5. Térjünk rá az első lépés megtervezésére! A Z_0 értékét már pontosan ismerjük.

$$W^*_{1,2,3,4,5}(Z_0) = w_1(Z_0, x_1) + W^*_{2,3,4,5}(Z_0)$$

$$w_1(Z_0, x_1) = 0{,}1\ x_1^2 + 0{,}25\ (Z_0 - x_1)^2$$

$$Z_1 = 0{,}9\ x_1 + 0{,}65\ (Z_0 - x_1)$$

$$W_{2,3,4,5}(Z_0) = 0{,}424\ [0{,}9\ x_1^2 + 0{,}65\ (Z_0 - x_1)]^2$$

A fentiek alapján:

$$W_{1,2,3,4,5}(Z_0) = \{0{,}1\ x_1^2 + 0{,}25(Z_0 - x_1)^2 + 0{,}424[0{,}9\ x_1^2 + 0{,}65(Z_0 - x_1)]^2\}$$

A kapcsos zárójelben levő kifejezés az x_1-hez viszonyítva újból pozitív második differenciálhányadosú másodfokú polinom, grafikonja minimumos parabola. A maximumot ezért az intervallum szélső pontjaiban keressük:

$$x_1 = 0 \text{ és } x_1 = Z_0.$$

Az első esetben (amikor $x_1 = 0$)

$$W_{1,2,3,4,5} = 0{,}429\ Z_0^2$$

a második esetben (amikor $x_1 = Z_0$)

$$W^*_{1,2,3,4,5} = 0{,}4344\ Z_0^2$$

A második mennyiség nagyobb az elsőnél, azaz független az $x_1 = 0$ értékétől. A jövedelem ebben a lépésben akkor lesz maximális, ha $x_1 = Z_0$, azaz első lépésben minden anyagi eszközt az I. tmasz-ba kell beruháznunk.

A maximális jövedelem ennek megfelelően

$$W^* = W^*_{1,2,3,4,5} = 0{,}4344\ Z_0^2 = 0{,}4344 . 14{,}50^2 =$$

$$W = 91{,}34 \text{ millió dinár lesz.}$$

6. Ezután meg kell határoznunk a teljes optimális irányítást:

$$X^* = (x^*_1,\ x^*_2,\ x^*_3,\ x^*_4,\ x^*_5).$$

Ismerve az első lépésben végrehajtandó optimális irányítást:

$$x^*_1 = Z_0 = 14{,}50,$$

kiszámíthatjuk az első év eszközkészletét:

$$Z^*_1 = 0{,}9\ x_1 + 0{,}65\ (Z_0 - x_1) = 0{,}9 . 14{,}50 = 13{,}05.$$

A második lépésben az optimális irányítás:

$$x^*_2 = Z^*_1 = 13{,}05$$

A második év végén az anyagi eszközök maradványa:

$$Z^*_2 = 0{,}9\ x_2 + 0{,}65\ (Z_1 - x_2) = 0{,}9{,}13{,}05 = 11{,}745$$

A harmadik lépés optimális irányítása:

$$x^*_3 = 0$$

Az anyagi eszközök maradványa a harmadik év végén:

$$Z^*_3 = 0{,}9\ x_3 + 0{,}65\ (Z_2 - x_3) = 0{,}65 . 11{,}745 = 7{,}63425$$

A negyedik lépés optimális irányítása:

$$x^*_4 = 0$$

A negyedik év végén az anyagi eszközök maradványa:

$$Z^*_4 = 0{,}9\ x_4 + 0{,}65\ (Z_3 - x_4) = 0{,}65 . 7{,}63425 = 4{,}96226$$

Az ötödik lépés optimális irányítása:

$$x^*_5 = 0$$

Az ötödik év végén az anyagi eszközök maradványa:

$$Z^*_5 = 0{,}9\ x_5 + 0{,}65\ (Z_4 - x_5) = 0{,}65.4{,}96226 = 3{,}2254$$

Figyelembe véve, hogy az eszközkészletek minden év kezdetén ismertek:

$$Z_0 = 14{,}50;\ Z^*_1 = 13{,}05;\ Z^*_2 = 11{,}745;\ Z^*_3 = 7{,}634;$$

$$Z^*_4 = 4{,}96;\ Z^*_5 = 3{,}225$$

automatikusan megkapjuk a II. tmasz-ba beruházandó eszközök évenkénti mennyiségét:

$$y^*_1 = Z_0 - x^*_1 = 0$$

$$y^*_2 = Z_1 - x^*_2 = 0$$

$$y^*_3 = Z_2 - x^*_3 = 11{,}74$$

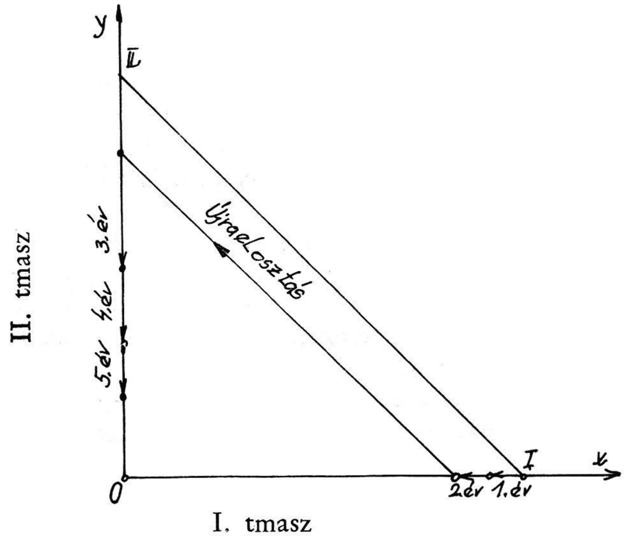
$$y^*_4 = Z_3 - x^*_4 = 7{,}63$$

$$y^*_5 = Z_4 - x^*_5 = 4{,}96$$

Ily módon megfogalmazhatjuk az eszközök optimális elosztására vonatkozó javaslatokat. Évenként a következő összegeket kell az I. és II. tmasz-ba befektetnünk:

TMASZ \ Év	Első	Második	Harmadik	Negyedik	Ötödik
I.	14,50	13,05	0	0	0
II.	0	0	11,74	7,63	4,96

Ilyen tervezés esetén öt év alatt
$W^*_{1,2,3,4,5} = 91{,}34$ millió dinár lesz a maximális jövedelmünk.
Az időszak végén az eszközök maradványa
3,2254 millió dinár.
A következő ábrán az eszközök ilyen elosztásának megfelelő optimális pályája látható a fázistérben.
Példánkban az optimális irányítás abban állt, hogy az összes anyagi eszközt beruháztuk vagy az egyik vagy a másik tmasz-ba. Ez egyszerű eset, de szemlélteti a dinamikus programozás lépésenkénti optimálását.



4. *A dinamikus programozás egyéb alkalmazási területei*

Vitathatatlan, hogy a dinamikus programozás nem olyan elterjedt, mint mondjuk a lineáris. Jelentőségén azonban ez mit sem csökkent. Sok helyütt egyre sikeresebben alkalmazzák. Így például a készletgazdálkodásban, a modern szabályozásban és technikában, a termelés tervezésekor, a szállítás dinamikus programozásakor stb.

A készletgazdálkodás dinamikus programozása az utóbbi időben egyre terjed. A cél lehet a készlet bizonyos korlátok között tartása, vagy az optimális készlet kialakítása. Alkalmazzák az újrabeszerzéskor is. Mivel számítása gyakran előfordul, bővebben nem is foglalkozunk vele. (Irodalom: 2, 6, 8 stb.).

Az optimális irányítás nagyon fontos vállalataink életében. Két körülménnyel kell számolnunk. A vállalatok anyagi-műszaki bázisának fejlődési üteme rendkívül meggyorsult. A társult munkaszervezetek újraelrendeződési folyamata, a mind bonyolultabb technikai és gazdasági összefüggések feltárása, új követelményeket támaszt az irányítással szemben. Eddig már sok tudományos üzemszervezési módszert dolgoztak ki, a többi között a dinamikus programozást is.

A termelés tervezését analizálva két esetet említenék a dinamikus programozás alkalmazására. Az egyik az optimális technológiai variánsok megválasztása, a másik a vállalat termelésének optimális politikája.

A lépcsőzetes felépítés, az adatok nagy száma, a sztochasztikus kibővíthetőség lehetősége, a célfüggvény és a mellékfeltételek nem linearitása miatt sikeresen alkalmazható a dinamikus programozás módszere.

Jól alkalmazható még a szállítási feladatoknál, a berendezések pótlásakor, valamint egyéb esetekben is.

5. UTÓSZÓ

Megismerkedtünk a dinamikus programozás néhány lényeges kérdésével. Az alkalmazási lehetőségeket kutatva és tanulmányozva arra a megállapításra juthatunk, hogy a beruházás dinamikus programozása, valamint az anyagi eszközök elosztása valójában külön elbírálást érdemel. Ezért ez a rész a legterjedelmesebb.

A példával illusztrálni kívántuk a dinamikus programozás algoritmusát. A munkaszervezetben a kutatásnak és az elemzésnek az adatgyűjtés meg a probléma modellezése a nehezebbik része. Összehasonlítva a példa eredményét a valóságban feltételezettével, megállapíthatjuk, hogy az eredmény reális és kedvező.

Az utolsó rész felöleli a dinamikus programozás egyéb alkalmazási területeit. Természetesen csak a legfontosabbakat.

Irodalomjegyzék

1. Ventcel E. Sz. A dinamikus programozás elemei, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1969.
2. Kaufmann A. Az operációkutatás módszerei és modelljei, Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1968.
3. George L. Nemhauser Einführunkg in die Praxis der dinamischen Programming, R. Oldenburg Verlag, München, 1969.
4. Dr. ing. Jovan Petrić, Matematičke metode planiranja i upravljanja, Informator, Zagreb, 1968.
5. Operációkutatás, Számítástechnikai oktató központ, Budapest, 1972.
6. Dr. Lj. Martić, Operativno istraživanje, Informator, Zagreb, 1968.
7. Operációkutatás a gyakorlatban 72' — konferencia, Pécs, 1972.
8. Slobodan Despotović: Savremene metode u rešavanju problema elektroenergetskih sistema, ZJE Beograd, 1968.
9. Mr. Djordje Sorad: Matematički metodi za planere i analitičare, Zavod za ekonomske ekspertize, Bgd.
10. Dr. Fazekas Ferenc: Operációkutatás II, Jegyzetek, Budapest, év nélkül.

Folyóiratok:

11. Közgazdasági Szemle, 73/11.
12. Mérés és automatika, 73/12.

Rezime

Mogućnosti primene dinamičnog programiranja

Ovaj rad ukazuje na neke mogućnosti primene dinamičkog programiranja u razradi ekonomskih problema.

Dinamičko programiranje je jedna od novijih metoda operacionog istraživanja. Ovu metodu je izradio američki matematičar Richard Bellman. Metoda se bazira na optimalizaciju korak po korak i to rekurzivno.

Pri rešavanju ekonomskih problema u današnjim uslovima sve se više koriste metode operacionog istraživanja. Jedna od veoma važnih pitanja u privredi je investiranje. Isto možemo posmatrati sa više aspekta. Po oblastima, po granama ili iz aspekta organizacije udruženog rada. Kako sredstva raspodeliti, to je najinteresantnije pitanje. Pored ostalih kriterijuma svakako treba primeniti metode operacionog istraživanja, a od tih metoda jedna je dinamičko programiranje.

Tako u ovom radu obuhvaćena je raspodela sredstava među regionima. Nadalje kako raspodeliti sredstva između dva OOUR-a za razvoj u određenom periodu, da bi se postiglo maksimalni efekat. Pored determinističkog slučaja naveden je i stohastički primer. Naime u praksi je mnogo češći taj slučaj. Naravno navedeni oblici primene ove metode samo su jedan deo mogućih.

Radi konkretizacije teoretskih postavki izrađen je i jedan primer raspodele sredstava, metodom dinamičkog programiranja.

Dinamičko programiranje nije tako poznato kao što linearno programiranje, međutim značaj ove metode to ništa ne smanjuje. Na mnogim mestima sve se više primenjuje sa uspehom. Tako napr. u oblasti pitanja zaliha, planiranja proizvodnje, transportnih problema i sl.

Problem dinamičkog programiranja osvetljen je sa strane mogućnosti primene. I kao takav daje jedan mali doprinos upoznavanju ove metode operacionog istraživanja.

Zusammenfassung

Anwendungsmöglichkeiten der dynamischen Programmierung

Diese Arbeit verweist auf einige Anwendungsmöglichkeiten der dynamischen Programmierung in der Erarbeitung ökonomischer Probleme.

Die dynamische Programmierung ist eine der neueren Methoden der Unternehmensforschung (Operations Research). Sie wurde vod dem amerikanischen Mathematiker Richard Bellman erarbeitet. Die Methode gründet auf der Optimalisation Schritt für Schritt und zwar rekursiv.

Bei der Lösung ökonomischer Probleme unter den gegenwärtigen Bedingungen werden immer mehr die Methoden der Unternehmensforschung verwendet. Eine sehr wichtige Frage in der Wirtschaft ist die Frage der Investition, die unter verschiedenen Aspekten betrachtet werden kann. Und zwar nach Gebie-

ten, nach Wirtschaftszweigen oder unter dem Aspekt der Organisation der vereinigten Arbeit. Wie sollten die Mittel verteilt werden — dies ist die interessanteste Frage. Neben anderen Kriterien sollten jedenfalls auch die Methoden der Unternehmensforschung Verwendung finden, von denen eine die Methode der dynamischen Programmierung ist.

So wurde in dieser Arbeit die Verteilung der Mittel unter den Regionen behandelt. Darüber hinaus die Frage, wie Mittel unter zwei Grundorganisationen der vereinigten Arbeit für die Entwicklung in einer bestimmten Periode verteilt werden sollten, um ein optimales Ergenis zu erreichen. Ausser dem deterministischen Fall wurde auch ein stochastischer angeführt. Nämlich, in der Praxis ist dieser letztere viel häufiger. Selbstverständlich bilden die angeführten Anwendungsformen dieser Methode nur einen Teil der möglichen.

Zwecks Konkretisierung der theoretischen Ansätze gibt der Verfasser auch ein ausarbeitetes Verteilungsbeispiel mittels der Methode der dynamischen Programmierung.

Die dynamische Programmierung ist weniger bekannt als die lineare, was jedoch ihre Bedeutung nicht mindert. Sie wird aber in vielen Fällen immer mehr mit Erfolg praktiziert. So Z. B. auf dem Gebiet der Vorräte, der Produktionsplanung, bei der Lösung von Transportproblemen u.a.m.

Das Problem der dynamischen Programmierung wurde vom Verfasser von der Anwendungsseite erörtert und erläutert. Somit kann diese Arbeit als kleiner Beitrag zur Popularisierung dieser Methode der Unternehmensforschung betrachtet werden.