Molnár Verona

AZ ÁRNYÉKÁRAK GAZDASÁGI FELHASZNÁLÁSÁNAK LEHETŐSÉGEI

Az árnyékárak felhasználásával a közgazdaságban számtalan olyan problémát oldhatunk meg, amelyeknél csak meghatározott és korlátolt terjedelmű erőforrással rendelkezünk, vagy az előre meghatározott eredményt csak a megadott feltételeknek eleget téve érhetjük el. Matematikai módszerekkel meghatározhatjuk a termelés optimális terjedelmét vagy a kapacitáskihasználtságot, meghatározható a beruházások optimális terjedelme is stb. A matematikai módszerek, mint segédeszközök a tervvariánsok kiszámítását is megkönnyíthetik, s mindezek mellett lehetővé teszik az elektronikus számítógépeken való feldolgozást is, amely már mindennapi szükségletté vált.

1. A lineáris programozás modellje

A matematikai programozás azon esetét, ahol mind a célfüggvény, mind a korlátozó feltételek is lineárisak, lineáris programozásnak nevezzük. Az ilyen modellek megszerkesztésére két lehetőség van: maximum vagy minimum probléma alakjában. A lineáris programozás bármely problemáját felírhatjuk e két típus egyikeként, de minden modell a nemnegativitási feltételből, a feltételrendszerből és a célfüggvényből áll. Ha az általános maximum problémát így írjuk fel:

$$\underline{x} \geqslant \underline{0}$$
$$\underline{A}\underline{x} \leqslant \underline{b}$$
$$\underline{c}^{*}\underline{x} = z \longrightarrow max,$$

akkor a megfelelő minimum probléma a következő:

$$\underline{d}^{*} \geqslant \underline{0}^{*}$$
$$\underline{d}^{*}\underline{A} \geqslant \underline{c}^{*}$$
$$\underline{d}^{*}\underline{b} = v \longrightarrow min.$$

Mindkét probléma közös konstansai az $\underline{A}$, a technikai-technológiai koefficiensek mátrixa. A mátrix általános eleme a_{ij}, amely az „i" erőforrás, ill. termelési feltétel mennyiségét jelöli (termelőeszközök, nyersanyag, munkaerő stb.), amely a „j" termék egységnyi előállításához szükséges. Közös változó még a $\underline{b}$ is, amely a kapacitásvektor és a nyersanyag rendelkezésre álló mennyiségéről ad információt (más kapacitásokról is, pl. piaci korlátok), valamint a $\underline{c}^*$, a termelés egységnyi hozadékát jelentő vektor. A $\underline{d}^*$ változók a duális változók.

Mint ahogy láttuk is, minden maximum problémával egy megfelelő minimum problémát párosíthatunk. Azon strukturális koefficiensek, amelyek soronként szerepeltek most oszlopokba kerülnek. Ha egy feladat duálisának felírjuk a duálisát, újból a primáris problémát kapjuk, azért igaz az a feltevés, hogy a dualitás szimmetrikus fogalom. A modifikált maximum és minimum problémának is felírhatjuk a duálisát, vagyis azon problémáknak, melyek egyenlőséget mint korlátozó feltételeket tartalmaznak, mégpedig oly módon, hogy a meglevő egyenlőségeket előbb egyenlőtlenségekké változtatjuk, s az így kapott általános feladatnak, már egyszerű felírni a duálisát. Bármely feladat megoldásáról is van szó, minden esetben a duális változókra vonatkozóan is kapunk bizonyos információkat. Tehát minden feladat megoldása kettős eredményt biztosít: megtudhatjuk a primáris és duális változók értékeit.

A dualitás lényeges kérdése azonban mégis a kapott eredmény tolmácsolásában és értelmezésében rejlik, a lehetőségekben amelyet a duális ad. A duális olykor egyszerűbbé teszi a komplikált modellek hosszantartó megoldását, s így a számolási technika szempontjából kedvező lehetőségeket ad. Olyan esetben például, ahol a modell sokkal kevesebb változóból (oszlopok száma) mint korlátozó feltételből (sorok száma) áll, a megfelelő duális feladatban sokkal kevesebb sor lesz mint oszlop, ilymódon az eredményt is kevesebb iteráció után kapjuk meg. Olykor pedig éppen a duális eredmények, ill. árnyékárak érdekelnek bennünket.

Minden maximum probléma megoldható szimplex módszerrel, amelyet ez alkalommal nem ismertetünk a munka más jellege miatt. A továbbiakban azonban ismertetjük, hogy jutottunk egy feladat duálisához. Ha a maximum probléma általános alakjából indulunk ki és ha azt a szimplex táblázatba vesszük, akkor a következőket kapjuk:

	$\underline{x}^*$	
$\underline{d}$	$\underline{A}$	$\underline{b}$
	$\underline{c}^*$	

A feladat megoldását a $\underline{d}$ elemeinek az $\underline{x}^*$ elemeivel való felcserélés adja. Ha feltesszük, hogy a $\underline{d}$ első „k" elemét cseréljük fel az $\underline{x}^*$ első

„k” elemével, akkor a szimplex módszer segítségével az első bázistranszformációt elvégezve a következő táblázatot kapjuk:

	$\underline{d}_1^*$	$\underline{x}_2^*$	
$\underline{x}_1$	$\underline{A}_{11}^{-1}$	$\underline{A}_{11}^{-1}\underline{A}_{12}$	$\underline{A}_{11}^{-1}\underline{b}_1$
$\underline{d}_2$	$-\underline{A}_{21}\underline{A}_{11}^{-1}$	$\underline{A}_{22}-\underline{A}_{21}\underline{A}_{11}^{-1}\underline{A}_{12}$	$\underline{b}_2-\underline{A}_{21}\underline{A}_{11}^{-1}\underline{b}_1$
	$-\underline{c}_1^*\underline{A}_{11}^{-1}$	$\underline{c}_2^*\underline{c}_1^*\underline{A}_{11}^{-1}\underline{A}_{12}$	$-\underline{c}_1^*\underline{A}_{11}^{-1}\underline{b}_1$

Ha teljesülnek a következő feltételek:

$$\underline{A}_{11}^{-1}\underline{b}_1 \geq \underline{0};$$

$$\underline{b}_1-\underline{A}_{21}\underline{A}_{11}^{-1}\underline{b}_1 \geq \underline{0},$$

illetve:

$$\underline{c}_1^*\underline{A}_{11}^{-1} \geq \underline{0}^*;$$

$$\underline{c}_1^*\underline{A}_{11}^{-1}\underline{A}_{12} - \underline{c}_2^* \geq \underline{0}^*;$$

vagyis az utolsó oszlop megfelelő értékei mind nemnegatívak, míg az utolsó sor értékei nempozitívak, akkor a táblázat nemcsak a maximum probléma eredményét adja, hanem a megfelelő minimumprobléma eredményét is, vagyis:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11}^{-1}\underline{b}_1 \\ \underline{0} \end{bmatrix}; \qquad \underline{d}_0^* = \begin{bmatrix} \underline{c}_1^*\underline{A}_{11}^{-1}, & \underline{0}^* \end{bmatrix}$$

A célfüggvény értéke: $z_0 = \begin{bmatrix} \underline{c}_1^*\underline{A}_{11}^{-1}\underline{b}_1 \end{bmatrix}$

Ha a lineáris modell bármelyikének van lehetséges megoldása, akkor a primáris és duális feladatnak is van optimális megoldása, és ehhez a célfüggvény véges értéke tartozik. Az ilyen extimális érték mind a két (primáris és duális probléma) esetében egyforma: $v_0 = z_0$.

A primáris és duális változók gazdasági lényege azonban különbözik. A primáris változók mértékegysége a termelés terjedelmének mértéke, a munkások száma stb., tehát a mennyiség a változók terjedelmének mértéke, amely gazdasági mivolta végett nem lehet nullánál kisebb. A duális változó az érték és azon kapacitás közötti arányt fejezi ki, amely a termelt érték előállítására használódott. Itt is valójában az egyes energiaforrások értékeléséről van szó. Mivel fennáll a feltétel: $\underline{d}^* \underline{A} \geqq c^*$ (korlátozó feltételek), ez az egyenlőtlenség azt jelenti, hogy az össz ráfordítás (input) nem lehet kisebb a gazdasági eredménynél ($\underline{c}^*$), illetve az egy termékre eső jövedelemnél. Ez tulajdonképpen az „energiamegmaradás törvénye". Leszögezhetjük, hogy a lehetséges megoldás elérésének feltétele az, hogy eleget tegyünk a nemnegativitási feltételnek és az energiamegmaradás törvényének.

Mielőtt egy gyakorlati példa megoldására térnénk át, négy jelentős tételt említünk meg:

1. Gyenge dualitási tétel

A célfüggvény értéke egyetlen lehetséges megoldás esetén sem lehet nagyobb a duális probléma célfüggvényértékétől:

$$(\underline{c}^*\underline{x}) \leq (\underline{d}^*\underline{b})$$

Ugyanis a primáris probléma célfüggvényértéke a gazdasági eredményt mutatja, a megfelelő duálnál ugyanez az eredmény a ráfordítást jelöli.

2. Erős dualitási tétel

Ha az $\underline{x}_0$ a primáris program lehetséges megoldása, a $\underline{d}_0$ pedig a duálisé, s ha ugyanakkor fennáll: $\underline{c}^* \underline{x}_0 = \underline{d}_0^* \underline{b}$ egyenlőség, akkor és csakis akkor $\underline{x}_0$ optimális megoldása a primáris, a $\underline{d}_0$ pedig a duális feladatnak. Ha az egyik feladatnak van megoldása, akkor a másiknak is van. Optimális esetben a két célfüggvényérték, megegyezik egymással.

3. Az egzisztencia tétele

Ha a primáris és duális problémának van lehetséges megoldása, akkor mindkét feladatnak van optimális megoldása is, amelyek egyenlőek.

4. Komplementaritási tétel

Ha $\underline{x}_0$ a primáris, $\underline{d}_0$ pedig a duális feladat optimális megoldása,

akkor: $$\underline{d}_0^*(\underline{b}-\underline{A}\underline{x}_0) = (\underline{d}_0^*\underline{A}-\underline{c}^*)\underline{x}_0 = 0$$

Az egyenlőség első része azt jelenti, hogy az erőforrás fel nem használt része értéketlen számunkra, az árnyékár ebben az esetben nulla, ezért a szorzat is az. Az egyenlőség második része ($\underline{d}_0^* \underline{A} - \underline{c}^*$) azt mutatja, hogy a ráfordítás mennyivel volt nagyobb a gazdasági eredménynél, mennyi maradt kihasználatlan a gazdasági lehetőségekből.

Végül leszögezhetjük, hogy az árnyékárak megmutatják, hogy a kapacitás egységnyi növelésével mennyivel növekszik a célfüggvény értéke, illetve arra mutatnak rá, hogy mely kapacitásokat kell elsősorban bővíteni.

2. *Egy példa az árnyékárak gyakorlati alkalmazására*

Egy munkaszervezet két terméket állít elő: A-t és B-t. A termelés technikai-technológiai feltételei a következő táblázatban adottak:

	Termék A	Termék B	Kapacitás munkaórában
I.gép	4	6	240
II.gép	1	4	80
Egységnyi jövedelem	40	30	

Az A termékből az adott időszakban nem lehet 20-nál többet eladni. Olyan optimális termelési programot kell ajánlani, hogy az összjövedelem maximális legyen. Elemezni kell a kapacitáskihasználtságát, valamint az árnyékárakat.

Az adatok alapján a következő modellt írhatjuk fel, feltéve, hogy az A illetve B termék terjedelmét x_1, illetve x_2-vel jelöljük, s ha figyelembe vesszük a korlátozó feltételeket:

$$
\begin{aligned}
x_1, x_2 &\geq 0 \\
4x_1 + 6x_2 &\leq 240 \\
x_1 + 4x_2 &\leq 80 \\
x_1 &\leq 20 \\
40x_1 + 30x_2 &= z \longrightarrow \max.
\end{aligned}
$$

A modellt, szimplex módszerrel oldjuk meg:

	x_1	x_2	
d_1	4	6	240
d_2	1	4	80
d_3	1	0	20
	40	30	0
	d_3	x_2	
d_1	-4	6	160
d_2	-1	4	60
x_1	1	0	20
	-40	30	-800
	d_3	d_2	
d_1	-5/2	-3/2	70
x_2	-1/4	1/4	15
x_1	1	0	20
	-65/2	-15/2	-1250

Az optimalitás kritériumai szerint a kapott táblázat optimális. A megoldás szerint 20 db A terméket és 15 db B terméket kell termelni ahhoz, hogy a maximális jövedelem 1250 pénzegység legyen. A táblázatból kapjuk: $d_1 = 70$. Ez azt jelenti, hogy az I. gép kapacitásából 70 g. ó. a kihasználatlan. A II. gép kapacitáskihasználása 100%. A piaci korlátnak is eleget tettünk. A kihasználatlan kapacitás árnyékára nulla. Ez gazdaságilag is logikus, mert nincs értelme a kihasználatlan kapacitást növelni. Azonban, a 100%-os kihasznált kapacitás árnyékára, konkrét esetünkben a II. gép árnyékára 15/2, amely tulajdonképpen a duális változó érték, és az utolsó sorból olvashatjuk ki. Ez annyit jelent, hogy a II. gép kapacitásának egységnyi növelésével (1 gépóra) a célfüggvényérték (jövedelem) is növekszik, mégpedig éppen a kapott 15/2 pénzegységgel.

3. Az árnyékárak fajai

Bármely maximum vagy minimum probléma, amelyet szinplex módszerrel oldunk meg hármas eredményt ad,

1. Optimális programot (az $\underline{x}$ és $\underline{d}$ változók értékei, amelyek a célfüggvénynek maximális, illetve minimális értéket biztosítanak).

2. Árnyékárakat (amelyek a kapaciatás kihasználásának megítélésére szolgálnak az erőforrások fajlagos értékelései).

3. A koefficiensmátrix inverz mátrixát.

Az utolsó sorban (árnyékárak) azon értékeket találjuk, amelyek azt mutatják, mennyire változik a célfüggvény értéke, ha az „i" kapacitását egy egységgel növeljük. Az árnyékárak azt mutatják, hogy mennyit ér az „i" kapacitás. Azonban, csak a bázisban levő aktivitásoknak vannak árnyékárai, sőt csak az olyan aktivitásoknak, melyek kapacitáskihasználása 100%-os. Néhány szerző bázison kívüli aktivitások árnyékáról is beszél, jobban mondva bizonyos „relatív ráfordításokról" amelyek azt mutatják, hogy mennyivel csökkenne a célfüggvény értéke, ha a kérdéses tevékenységet bázisba vonnánk.

Kantorovics az árnyékárakat objektíve meghatározott értékeléseknek nevezte. Ha valamely optimális tevékenység terjedelmének növelése a ráfordítások növekedéséhez vezet, akkor ez egyenlő azzal az értékkel, amennyivel a célfüggvényérték csökken, éppen a kapacitás nagyobb méretű kihasználása miatt. Ennek megfelelően, amint a célfüggvényérték növekedése kisebb a kapacitás „fogyasztásánál", az adott termék termelése nem optimális, nem ajánlatos.

Látjuk, hogy az árnyékárak alapján felmért aktivitás bevezetése, illetve mellőzése szoros kapcsolatban áll a nacionális gazdálkodással. Az egységnyi jövedelem és egységnyi ráfordítás közötti viszony közelebbi vizsgálatával olyan döntéseket hozhatunk, amelyek két vagy több optimális tevékenységre vonatkoznak, annak az eldöntésére, hogy melyiket kell előnyben részesíteni, mely aktivitás végeredménye lesz kedvezőbb.

Azonban az árnyékárak mint gazdasági kategória csak adott modellban értelmezhetők, vagyis pontosabban meghatározott gazdasági körülmények között. Tehát, adott gazdasági feltételekből kiindulva, az árnyékárrendszert így értelmezhetjük:

a) mivel konkrét termékek programozásáról van szó, amelyek naturális egységekben szerepelnek, akkor az árnyékáraknak is konkrétan meghatározott dimenzióik vannak;

d) az árnyékárrendszer a jövőbe mutat, a ráfordításokra és jövedelemre vonatkozóan;

c) több tervvariáns esetén, a különböző árnyékárak az egyes tervvariánsoktól várt gazdasági eredményt mutatják;

d) az árnyékárak elsősorban a tervezés szempontjából értelmezhetők, a különböző induló feltevések és célok szempontjából.

A korlátozó feltételek típusaitól függően az árnyékárakat úgy tekinthetjük mint:

1. Termékek árnyékárai, melyeknek nagy szerepük van a termékek árainak kialakításában.

2. A munkaráfordítások árnyékárai (optimális hozadékai), amelyek

az élő munka értékelését adják meg, de ugyanakkor alapot nyújtanak a személyi jövedelem nívójának elszámolásához.

3. A termelés felső és alsó korlátjainak hozadékai. Ha ugyanis pl. felső korlátról van szó, akkor a megfelelő hozadék csak nulla vagy pozitív szám, mivel a termelés terjedelmének bővítésével a tervet csak javítani tudjuk.

4. A táblázat optimális devizaelszámolási kulcsokat is szolgáltat, bizonyos bel- és külföldi piaci forrásokra utal, mert a várt jövedelem nagysága döntő tényező.

5. Beruházási korlátok áryékárai, melyek a beruházás terjedelmétől függően különböző eredményt biztosítanak.

4. *Az árnyékárak felhasználásának tényleges lehetőségei*

Az előzőekben rámutattunk az árnyékárak fajaira, ezek alapján feltételezhetjük széles körű felhasználási lehetőségüket. Ezek a lehetőségek nemcsak mikro, illetve munkaszervezeti szinten adottak, hanem makro szinten is, így pl. egy egész népgazdaság terveinek konzisztenciavizsgálatánál választ kaphatunk arra a kérdésre, hogy elegendő-e az adott energiakeret a várt import részére, amely előzőleg tervértékként adott. Választ kaphatunk arra a kérdésre is, nem lenne-e gazdaságosabb az adott energiakeret másmilyen elrendezése a fogyasztók között. Ha viszont minden kapacitás vagy beruházási keret teljesen kihasznált, nem lenne-e szükséges egy olyan átcsoportosítása a forrásoknak, amely hatékonyabb eredményt biztosítana. Ilyen esetben az eszközök átcsoportosítása, a már kiszámított kettő, illetve több optimális terv között történne. Több gazdasági optium közös optimumáról lenne szó.

A nehézségek abban rejlenek, hogy az árnyékárak lényegében mégsem objektívak. Egy modell a munka és egyéb objektív feltételeken kívül (mint amilyenek: kapacitáskeret, a természet feltételei, technikai-technológiai feltételek) más szubjektív feltételektől is függ, így pl. a konkrét politikai vagy gazdasági céloktól. A célok megkonstruálásánál a modell igen gyakran leegyszerűsíti a feltételeket és korlátokat, nem vesz (nem is vehet) figyelembe minden jelenséget. Ezért a kapott árnyékárak többé nem objektívak. Másrészt igen jelentős a terv és a piac hatása. A tervezés hasznos eszköze a matematikai programozás, de a matematikai programozás csak egy „eszköz", amellyel megkönnyíthető a döntéshozatal. A piac ettől függetlenül hat, ezért a megfelelő célok, információk és adatok is érthetően különbözőek.

Egyes kapitalista országokban többszintű tervezés folyik. A szocialista országokban is vannak olyan törekvések, hogy a tervezési rendszer többszintű legyen. Az utóbbi időben olyan matematikai modelleket szerkesztettek, amelyek már a többszintű tervezésen alapszanak.

Az első akadály az ilyen modellek megoldásában azoknak nagy méretében van, mert a központi adatok mellett a számtalan decentralizált szektor (egység) adatait is figyelembe kell venni. Az ilyen nagy terjedelem még akkor is nehézségeket okoz, ha számítógépeket alkalmaznak. Ezért jelentkeztek a különböző dekompozíciós módszerek, mint pl. Dantzig—Wolf dekompozíciós módszer. Hasonló problémát old meg az a módszer is, amelyet Kornai—Lipták dolgozott ki. A lényeg azonban mindkét esetben abban rejlik, hogy a tervezés két szinten történik. A centrális szektor és a decentralizált egységek között szoros kapcsolat áll fenn, egymást kiegészítik és korrigálják. Itt ugyanis az ágazati programok és a központi program összehangolásáról van szó. A központ megadja a közös erőforrások és lehetőségek keretét, azon kapacitásokét, amelyek az ő hatáskörébe tartoznak, ugyanakkor meghatározza az outputra vonatkozó elvárásait is. Az egyes szektorok aztán saját körülményeiktől és lehetőségeiktől függően módosítják a kapott tervajánlatot. Az információk állandóan áramlanak, az elvégzett feladatokat árnyékárakkal értékelik. Ezek ugyanis, mint ahogy az előbbiekben már utaltunk rá, megbízhatóan jellemzik az elvégzett feladatok színvonalát és minőségét. Ha egy modellben pl. több energiaforrás van, akkor több különböző árnyékár létezik, annyi, ahány termelői egység. Legyenek ezek a különböző árnyékárak: $n^0_{1j}, \ldots, n^0_{ij}, \ldots, n^0_{tj}$. Abban az esetben, ha $n^0_{ij} + = 0$, de n^0_{tj} 0, akkor ez elegendő „feltétel" arra, hogy az „i" termelői egység kapacitáskeretét csökkentsük, illetve teljesen elvonjuk, mert biztosak vagyunk abban, hogy a „t" gazdasági egységben az árnyékárakkal mért gazdasági eredmény nagyobb. Abban az esetben, ha n^0_{ij} 0 és n^0_{tj} 0, de n^0_{ij} n^0_{tj}, érdemes az „i" gazdasági egység rovására növelni a „t" gazdasági egység forrásait, mert az „i"-ben előidézett értékcsökkenés kisebb mint a „t"-ben egyidejűleg előidézett haszon.

Minden olyan fázisban, melyekben az információáramlás megtörtént, van egy eredményünk, egy programeredmény, ez pedig a konkrét döntés. A tervek egybehangolása az állandó új, illetve korrigált döntések meghozatalával történik. A központ és szektor viszonyára az jellemző, hogy a központ nem dönt centralisztikusan minden egyes kérdésben, nem hoz semmilyen adminisztratív előírásokat, a döntéshozatalt a szektoroknak engedi át, igazgatásának eszközéül az árnyékárakat használja fel. Így a szektorok problémáit is, és a központi problémát is árnyékárakkal optimalizálják. A központnak biztosítania kell a szektorok részére egy bizonyos autonómiát a tervezésben. A szektorok termelési programjaikat teljesen önállóan állítják össze, saját lehetőségeik alapján, az árnyékárak segítségével a központ elvégzi az összehangolást, addig változtatja őket, míg egy szinten optimálisak nem lesznek.

A makro szinten megszerkesztett modellek nagyméretűek, ezért nehezen oldhatók meg. Ezen segítenek a különböző dekompozíciós módszerek. Különböző módszerek léteznek, a közös bennük az, hogy a feladatot részenként oldják meg. A megoldáshoz gyorsabban és kisebb erőfeszítés árán jutnak.

5. *Példa az árnyékárak népgazdasági alkalmazására*

Az árnyékárak főbb tulajdonságainak tárgyalása után a dekompozíciós módszer alapvető és lényegbevágó tulajdonságára szeretnénk rátérni. A feltételrendszert a következőképpen írhatjuk fel:

$$\begin{bmatrix} A_1 A_2 \ldots\ldots A_r \\ \hline B_1 0 \ldots\ldots 0 \\ 0 B_2 \ldots\ldots 0 \\ \vdots \\ 0 0 \ldots\ldots B_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^{/1/} \\ \hline x^{/2/} \\ x^{/3/} \\ \vdots \\ x^{/r/} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^{/0/} \\ \hline b^{/1/} \\ \vdots \\ b^{/n/} \end{bmatrix}$$

A vízszintes vonal fölött a központi korlátok vannak, illetve a központi koefficiensmátrix, valamint az energiaforrás vektora. A többi adatok a decentralizált rendszer adatai, a mátrix pedig diagonális szerkezetű. Az egész rendszer gazdasági célja a következőképpen fejezhető ki:

$$max\ z = \sum_{j=1}^{r} c^{/j/} x^{/j/} .$$

Az egész rendszer, a nemnegativitási feltételt is figyelembe véve így írható fel:

$$x^{/j/} \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^{r} A_j x^{/j/} = b^{/0/}$$ — központi korlát

$$B_j \cdot x^{/j/} = b^{/j/} \qquad j = 1,2,\ldots,r:$$ — az alrendszerek korlátai.

Az $x^{(j)} \geqq 0$ alrendszer minden lehetséges megoldása felírható a bázismegoldások konvex lineáris kombinációjaként. Ha az extremális pontokat x^{*}_{k}-val jelöljük és ha összesen $k=1,2,\ldots, t_j$ extremális pontunk van, akkor az alrendszer lehetséges megoldásának rendszerét így írhatjuk fel:

$$x^{/j/} = \sum_{k=1}^{t_j} \lambda_k^{/j/} \cdot x_k^{/j/*}$$

$$\sum_{k=1}^{t_j} \lambda_k^{/j/} = 1$$

$$\lambda_k^{/j/} \geqq 0 \qquad k=1,2,\ldots,t_j.$$

A közös erőforrásokra is felírhatjuk:

$$A_j x^{/j/} = \sum_{k=1}^{t_j} \lambda_k^{/j/} \cdot A_j x_k^{/j/*}$$

A célfüggvényérték az extrencális pontok konvex lineáris kombinációja:

$$c^{/j/} \cdot x^{/j/} = \sum_{k=1}^{t_j} \lambda_k^{/j/} \cdot c^{/j/} \cdot x_k^{/j/*}$$

Az egész lineáris programozási feladat felírható mint:

$$\lambda_k^{/j/} \geqq 0$$ — nemnegativitási feltétel

$$\sum_{k=1}^{t_j} \lambda_k^{/j/} = 1$$ — az alrendszerek megfelelő korlátai, feltételrendszere

$$\sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{t_j} \lambda_k^{/j/} A_j x_k^{/j/*} = b^{/0/}$$ — központi korlátozó feltétel.

A célfüggvény pedig: $$\max z = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{t_j} \lambda_k^{/j/} c^{/j/} x_k^{/j/*}$$

Ebben a modellben nincs többé $x^{(j)}$, hanem $\lambda_k^{(j)}$, illetve az $x^{(j)}$ extremalis pontok koefficiensei a konvex lineáris kombinációból. Az elsődleges parciális problémák optimális megoldásai:

$$\bar{x}^{/j/} = \sum_{k=1}^{t_j} \lambda_k^{/j/} \cdot x_k^{/j/*}$$

A probléma megoldásában nem szerepelnek a B_j és $b^{(j)}$ adatok. Minden alrendszer, ahelyett, hogy saját „zárt" optimumát számolná, a lineáris programozási feladat specifikus formáját oldja meg, a központi programba csak egy transzformált vektor került.

Ha az $A_j x_k^{(j)}$ helyett $d_k^{(j)}$-t írunk, a feltételrendszer a következő:

$$\left[\lambda_1^{/1/} d_1^{/1/} + \ldots + \lambda_{t_1}^{/1/} d_{t_1}^{/1/}\right] + \ldots + \left[\lambda_1^{/r/} d_1^{/r/} + \ldots + \lambda_{t_1}^{/r/} d_{t_1}^{/r/}\right] = b^{/0/}$$

$$\lambda_1^{/1/} + \ldots\ldots + \lambda_{t_1}^{/1/} = 1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_1^{/r/} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda_{t_1}^{/r/} = 1$$

A közös programba csak $\lambda_k^{(j)}$ értékek kerülnek, melyeket minden alrendszer kiszámol magának. A transzformáció után, a közös energiaforrás értékelése a $\pi^{(1)}$ árnyékának segítségével történik, amelyeket a lineáris programozási feladat eredményeként kapnak. A $\pi^{(2)}$ segítségével a $\sum_{k=1}^{t_j} \lambda_k^{(j)} = 1$ feltételrendszer értékelhető.

Az alrendszerekre vonatkozóan a következő modell konstruálható:

$$x^{/j/} \geq 0$$

$$B_j x^{/j/} = b^{/j/}$$

$$\max z^{/j/} = (c^{/j/} - \pi^{/1/} A_j) x^{/j/}$$

Minden alrendszer megoldja saját feladatát. A kikötés csupán a következő: $c^{(j)} - \pi^{(1)} A_j \geqq 0$, mert éppen ennyivel növekszik a célfüggvény értéke, ha valamely tevékenység a bázisba kerül. Ezeket az adatokat a központtól kapják, ugyanis a $\pi^{(1)}$ értékek állandóan változnak, minden bázistranszformáció után más-más értékűek. Ezért szükséges az információk állandó áramlása. A program javítása mindaddig történik, míg egy olyan álláshoz nem érünk, amely nem nyújt semmilyen lehetőséget a lehetséges megoldás javítására, összehasonlítva ezt a lehetőséget a központi eredménnyel.

Ha a célfüggvényérték egyenlő a $\pi^{(2)}$-vel, akkor a köponti feladatból megkapjuk a $\lambda_k^{(j)}$ értéket, a

$$\bar{x}^{/j/} = \sum_{k=1}^{t_j} \lambda_k^{/j/+} \cdot x_k^{/j/+k} \qquad j = 1, 2, \ldots, r.$$

képlet segítségével pedig az egész feladat optimális megoldásához jutunk, illetve megkapjuk az erőforrások elosztásának optimális programját, azt, amely a legnagyobb célfüggvényértéket biztosítja.

Felhasznált irodalom

1. Krekó Béla: Optimumszámítás, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1972,
2. Kornai János: A gazdasági szerkezet matematika tervezése, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1965,
3. Sekulić—Gjenero: Optimalna alokacija zajedničkih resursa u decentralizovanom ekonomskom sistemu, Ekonomski Institut, Zagreb, 1971,
4. Simon György, Kondor György: Gazdasági hatékonyság, árnyékárak, Közgazdasági és Jogi könyvkiadó, Budapest, 1965,
5. Mr Sorad Đorđe: Ekonomsko-matematički metodi i modeli i operaciona istraživanja, izdanje Ekonomskog fakulteta u Subotici, 1974,
6. Dr. Varga József: Gyakorlati programozás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.

Rezime

Mogućnost upotrebe marginalnih cena u privredi

U savremenoj ekonomiji je skoro nemoguće izostaviti primenu matematičkih metoda i modela. Linearno programiranje je jedno od najpristupačnijih „mogućnosti" za praktično korišćenje matematičkih metoda. Primenom linearnog programiranja dobija se optimalni program, koji zadovoljava postavljene ciljeve, kao i ograničavajuće uslove. Ali pored optimalnog programa model pruža i druge rezultate, kao što su dualne odn. marginalne cene. Pomoću dualnih cena može se odrediti stepen opravdanosti proširenja kapaciteta, jer dualne cene označavaju veličinu povećanja dohotka pri jediničnom proširenju određenog kapaciteta. Moguće je izabrati bolju varijantu ako postoji više. Vidimo da je pravilna ocena uvođenja aktivnosti na osnovu dualnih cena je u bliskoj vezi sa racionalnim ekonomisanjem. Dualne cene se primenjuju ne samo na nivou mikro ekonomije, nego i na makro nivou, na području np. analize konzistentnosti planova na nivou cele narodne privrede, u oceni opravdanosti modifikacije pojedinih planskih varijanata. Možemo naći odgovor na pitanje nije li ekonomičnije prestruktuiranje izvoza energije u odnosu pojedine korisnike. U slučaju višestepenog ekonomskog sistema tj. kada postoje razni nivoi planiranja, dualne cene služe za upoređenje postignutog rezultata pojedinih nivoa i daju takav kriterijum za raspodelu zajedničkih resursa koji obez-

beđuje najekonomičnije iskorišćenje i zajedničkih pojedinačnih resursa, pri postizanju najvišeg efekta i s obzirom na narodnu privredu i s obzirom na pojedine subjekte. Ovakav sistem ne ugrožava relativnu slobodu odn. autonomiju ekonomskih subjekata. Modele na makro nivou zbog velikih dimenzija teško je rešavati, zato se koriste razni metodi dekompozicije. Ovaj rad predstavlja kratak i sažet prikaz mogućnosti primene linearnog programiranja, karakteristike i značaj dualnih cena, kao i mogućnost njihove praktične primene.

Summary

The Possibility of Using Marginal Prices in Economy

In modern economy the omission of mathematical methods and models is almost impossible. Linear programmes represent the most eligible choice for practical applience of mathematical models. By using linear programmes one aquires an optimum programme which satisfies both the set targets and restrictive circumstances. Apart from optimum programmes the model offers other effects, such as dual and marginal prices. By dual prices it is possible to tell whether or not it is justified to increase the performance, as dual prices show the increase of income by a step by step increase of performance. This makes it possible to choose a better alternative if we have choice. It is obvios that proper evaluation of new procedures and their introduction is closely linked with rational economic management. Dual prices are used not only on the level of micro-economy but also on higher level and larger scale e.g. when analyzing the consistency of plans on the level of total national economy, or when deciding on readjustment of some of the alternative plans. We can find out whether or not it is more rewarding to make structural alterations of power sources in regard ot certain consumer cathegories. At multilevel economical systems i.e. where there are different levels of planning, dual prices help to compare performances at various levels and provide such a cryterium for the distribution of collective resources which maintains the most rational exploitation of collective and other resources to maximum effect with regard to the national economy and individual performance. Such a system does not threaten the relative freedom or autonomy of economical units. It is difficult to solve models on a higher level because of their extensive dimensions, thereforre varios methods of decomposition are used. This study represents a short and concise survey of possible aplications of linear programmes, the characteristics und significance of dual prices and the posibility of their practical application.

(J. J.)