Molnár Verona

A MATEMATIKA FILOZÓFIAI PROBLÉMÁIRÓL

Stefan Barker: Filozofija matematike; Kiadó: Nolit, Beograd 1973. 209 old.

Tartalom:
Predgovor; 1. Uvod: Filozofski problemi matematike; Apriorno i empirijsko znanje; Analitičko i sintetičko znanje; Otvorena struktura jezika, 2. Euklidska geometrija: Egipćani i Grci; Euklidov postupak; Euklidovi postulati; Euklidove aksiome i definicije; Euklidove teoreme; Moderno shvatanje deduktivnih sistema; Motiv aksiomatizacije; Geometrija kao apriorno znanje; Geometrija kao sintetičko znanje, 3. Neeuklidska geometrija: Euklidov peti postulat; Sakjeri; Geometrija Lobačevskog; Geometrija Rimana; Problemi neprotivurečnosti; Logičke praznine u Euklidovim „Elementima"; Deduktivni sistemi posmatrani apstraktno; Neinterpretirana geometrija i njene interpretacije; Protivrečnost; Interpretirana geometrija kao empirijska; Interpretirana geometrija kao apriorna; Značenje apriorne interpretacije; 4, Brojevi i doslovne filozofije broja: Prirodni brojevi; Definisanje viših vrsta brojeva; Transfinitni brojevi; Treba li interpretirati teoriju brojeva? Nominalizam; Konceptualizam i intuicionisti? Realizam i logistička teza, 5 Prelaz ka nedoslovnom shvatanju broja: Paradoksi; Teorija tipova; Drugi putevi izbegavanja paradoksa; Formalizovani deduktivni sistemi; Nemogućnost upotpunjavanja; Formalizam; Zakoni broja kao analitički. Aleksandar Kron: Pogovor. Za dalje čitanje.

Stefan Barker angolról fordított könyve a Sazvezda-sorozat 37. könyveként jelent meg. Témája az író vallomása szerint is a matematika filozófiája, a filozófiának egy összetett ágazata, amely ellentétes felfogásokkal van tele. A tudomány gyors fejlődése során az egymás után jelentkező új technikai eredmények megdöntötték a régi felfogásokat. Abban azonban nem lehetünk biztosak, hogy az új felfogások filozófiai lényege is elfogadható módon értelmezhető. A könyv célja, hogy egy nem formális értekezést adjon a matematikában és a matematikai logikában elért eredményekről, ugyanakkor arra törekszik, hogy néhány filozófiai felfogást is bemutasson. (11.)

A geometriáról és a számokról szóló fejezetek külön állnak, nem azért, mert ekképpen osztják fel a modern matematikát – ez lényegében nincs így – hanem azért, mert a matematika folozófiai problémái így csoportosultak.

Az első fejezet a matematikához való legáltalánosabb hozzáállás problémáit és az alapvető matematikai gondolkodásmódot tárgyalja. A filozófia kezdetén, az ókori görögöknél is a matematika a filozófiai problémák egyik nagy forrása. A görögök számára a matematika elsősorban geometria. Euklidesz geometriáját például a fizikai világ leírásának tartották. Ha figyelembe vesszük Euklidesz pontdefinícióját, amely szerint „a pont az, amelynek nincsenek részei", akkor nehéz elhinni, hogy a világot csupán pontokból fel lehet építeni. Ez maga után von néhány kérdést: a pontok vajon csak eszmék a mi szellemünkben? Csak fikciók, amelyekkel ámítjuk magunkat? Ezek reális dolgok-e, vagy csak olyanok, amelyeket nem tudunk észlelni? Ezek a kérdések felvetik a téma alapvető problémáit: milyen jelentőségük van a használt kifejezéseknek, igazak-e a geometria alapelvei, hogyan teszünk szert tudásra a geometriában, miért alkalmazhatjuk geometriát a valóságra?

A nem euklideszi geometria megjelenése újabb kérdéseket hozott felszínre. Hogyan történhetett meg, hogy ha az egyik törvény ellentétes a másikkal, ugyanakkor mind a kettő igaz legyen? Vajon a matematikusok többé nem kutatják az igazságot? Az aritmetikában miért alkalmazhatjuk a számok törvényét a valóságra? A geometriában hipotetikus alapelvek jelentkeznek, sok olyan törvénnyel találkozunk, amelyek mintha valaminek a létezését feltételeznék. Milyen létezésről van itt szó, szó szerinti, konkrét vagy figuratív létezésről? Mindezek filozófiai problémák, mert nagyon általános, alapvető kérdésekkel foglalkoznak: a jelentéssel, az igazsággal, a valósággal és a tudással. (15.)

Az a priori és a posteriori (empirikus) ismeret közötti alapvető különbség igen lényeges kérdés a filozófiában. A racionalisták szerint az a priori (tapasztalatot megelőző) ismeret a lényegbevágó, az empirikusok szerint viszont az a posteriori (tapasztalaton alapuló). Hogyan kell tulajdonképpen értelmezni ezeket az ismereteket? Mi is az az empirikus ismeret? Ahhoz, hogy tudjam, hogy a varjú fekete, nem elég értenem, hogy mit jelent a szó, hanem a varjakat látnom is kellett. Igaz, ezt egyszerűen el is hihetem. „De ha nincs semmilyen megfigyelésen alapuló bizonyítékom a varjakról, akkor biztosan hazugság, ha azt mondom, tudom, hogy azok feketék." (19.)

Tehát az empirikus ismeretet úgy is definiálhatjuk, mint azt az ismeretet, amelyet a tapasztalat igazol. Azonban léteznek az ismereteknek más példái is, amelyek nem ilyen módon függnek a tapasztalattól. Ezekben az esetekben csak a szavak megértése szükséges, amelyekkel az ismereteket

kifejezzük. Semmilyen érzéki tapasztalatra nincs szükség, hogy igazoljuk állításunkat. Röviden tehát, az a priori ismereteket úgy definiálhatjuk, mint olyan ismereteket, amelyeknél nem szükséges a gyakorlat bizonyítéka. Nem szükséges közvetlen, vagy közvetett módon szemlélni a varjakat ahhoz, hogy valakinek joga lenne mondani: tudja, hogy minden varjú fekete. Ismerünk tipikus apriori és empirikus tudományokat, mint például a logika és a fizika. Feltehetjük a kérdést, hogy hol a matematika helye ebből a szempontból? Hogyan szerezzük az a priori ismereteket? Vajon a valóságba való belátással? Tudatunkba való belátással? Vagy egyszerűen a nyelv megértésével? Ha a matematika a priori ismeret, olyan, amelyet a valóság nem igazolt, akkor valójában mire alapszik?

Az a priori és empirikus ismeret közötti különbség a dedukció és indukció mint megítélési módok között levő különbségekkel van összefüggésben. A dedukció olyan megítélés, amelybn a priori (tehát a tapasztalatot megelőzően) tudhatjuk, hogy a következtetés igaz lesz, ha nem vétettünk valamilyen logikai hibát és ha a premisszák valódiak, igazak. Íme egy példa: minden páros szám kettővel osztható; egy egyszerű szám sem osztható 2-vel; tehát, egyetlenegy egyszerű szám se páros. Ebben a példában nincs logikai hiba és mi a priori tudhatjuk, hogy a következtetésnek igaznak kell lennie. Mégis, nem mondhatjuk, hogy jelen van egy filozófiai magyarázat, ami igazolná, a megítélés helyességét. Ezzel nem mondtuk meg, hogy honnan kaptuk azt az a priori tudást, amely szerint, ha a premisszák igazak, akkor a következtetés is igaz lesz.

Az indukció, a dedukcióval szemben olyan megítélés, amellyel az ítélkezés egy olyan empirikus állítást fejez ki, amely már a tények keretén kívül van. Emiatt nem tudhatjuk előre, hogy ha az adatok igazak, akkor a következtetés is igaz lesz-e. Például, ha sok varjút szemlélek, és ha azok mind feketék, akkor induktív megítéléssel következtethetek arra, hogy valószínűleg minden varjú fekete. Az adatok igaz volta még nem biztosít a priori kezességet, hogy a következtetés amely szerint minden varjú fekete mindenképpen igaz. Ha egy a priori kijelentést bizonyítunk, akkor nincs semmi akadálya annak, hogy deduktív bizonyítást alkalmazzunk. Ha viszont egy empirikus következtetést állapítunk meg, megítélésünk legalább egy lépésének szükségszerűen induktívnak kell lennie.

Az a priori és az empirikus ismeret közötti különbséghez nagyon hasonló az analitikus és szintetikus tudás közötti különbség is. Ezt a különbséget Imanuel Kant vezette be, ő az ítélet fogalmát használta. Kant magyarázata szerint, az ítélet akkor analitikus, ha az ítéletekkel mint fogalmakkal való gondolkodáson kívül és azok kapcsolatának módja mellett semmi más nem szükséges ahhoz, hogy valaki tud az ítéletről, hogy igaz vagy sem. Másrészt, az ítélet szintetikus, amikor csupán a fogalmak és az ítélet kapcsolatának módja nem elég, még másra is támaszkodnunk kell. Kant

szerint az analitikus tudás megszerzésére a lélek képes, ez a tudás természetesen a priori. A szintetikus ismereteknél viszont nem elegendő a fogalmak összekötése egy szintetikus ítéletbe. Itt szükséges egy „harmadik dolog", amely lehetővé teszi a különválasztott fogalmak összekötését egy szintetikus ítéletbe. Ez az elkülönített harmadik dolog, Kant szerint az empíria, az érzéki tapasztalat. Kant szerint létezik szintetikus (nemcsak fogalmak belső kapcsolataival igazolt) és egyben a priori (érzéki tapasztalattal nem bizonyított) ismeret. „Kant úgy gondolta, hogy a matematika a legtisztább példája az ilyen szintetikus a priori tudásnak." (29. old.)

A második fejezet tárgya az euklideszi geometria. Minden a Nílusnál kezdődött a földméréssel, amely bizonyos tapasztalatokat adott és igazságokat fedeztetett fel az egyenesekkel, szögekkel és alakzatokkal kapcsolatban. Ezekhez az alapelvekhez az egyiptomiak szemlélés és kísérlet útján jutottak, induktív megítéléssel. A görögök átvették ezeket az ismereteket és a geometriát nemcsak azért értékelték, mert gyakorlati hasznuk volt belőle, hanem elméleti érdekességéért is. „Ők a geometriát maga a geometria miatt akarták megérteni." (38. old.) Szigorú deduktív bizonyításokat igyekeztek találni a tér általános törvényeire, amelyek a geometria mindenfajta gyakorlati alkalmazásának alapja. Egyes görög filozófusok, különösen Pitagorasz és Platon véleménye az volt, hogy a geometriának igen nagy intellektuális jelentősége van, mert elvontsága és tisztasága révén hasonlított a metafizikához és a valláshoz.

I. e. 300 évvel írta meg Euklidesz *Elemek* c. művét, amelyben szisztematikusan mutatta be az elődök összes geometriai felfedezését. Ez a könyv az ókor, a középkor majd egész a XIX. század idejéig nemcsak a geometria tankönyvét jelentette, hanem azt is, milyennek kell lennie a helyes tudományos gondolkodásnak.

Mi jellemezte Euklidesz eljárását? Elsősorban az, hogy az egyenesnek, alakzatnak mindig olyan tulajdonságaival foglalkozott, amellyel minden egyenes és alakzat rendelkezik. Ezek a törvények mindig szigorúak és abszolút törvények, sohasem approximativek (megközelítőek). Másik jellemző tulajdonsága Euklidesz eljárásainak, hogy a törvényeket bizonyítja is. Ezek a bizonyítások deduktívak, szigorú logikai szükségszerűségek, semmiképpen sem induktívak. Éppen ezért, ha egyes törvényeket be akarunk bizonyítani, akkor azoknak, amelyekkel bizonyítunk, bizonyíthatatlanoknak kell maradniuk. Így a törvényeknek egy kis csoportját nem bizonyítja, csupán azért, hogy lehetővé tegye a deduktív megítélést. Ezeket a törvényeket posztulátumoknak nevezte, azokat, amelyeket szigorúan bizonyított, teorémáknak. Az axiómák Euklidesz szerint nem mondanak semmi meghatározottat a geometriáról, mint a posztulátumok, hanem általánosabbak, a nagyságok egyenlőségéről szólnak, olyan fogalmakról, amelyeket számtalan vitában használhatunk a geometrián

kívül. Euklidesz arra törekedett, hogy minden egyes geometriai teorémája szigorú és logikus konkluzív módszerrel legyen bizonyított. Ugyanakkor szisztematizálta a kifejezéseket, jelentésüket meghatározta, definiálta őket, mindezt azért, hogy megelőzze az esetleges logikai hibákat a következtetésekkor. Bizonyításainak kiindulópontja: a posztulátumok, az axiómák és a definíciók.

Modern felfogás alapján létezik egy alternatív szabadság a fogalmak, definíciók és axiómák szempontjából, amelyek ugyanannak a tárgynak a megmagyarázására szolgálnak. Újabb felfogások szerint a fogalmak és axiómák helyes kiválasztása elegánsabb kompozíciót ad, ahol kevesebb alapvető fogalom és axióma szerepel, alapjában véve azonban egy és ugyanazt az euklideszi teorémát bizonyítják.

Mi az axiomatizáció motívuma!? A szigorúbb és biztosabb bizonyítás mellett, az axiomatizáció elegánsan és könnyen rámutat az érdekes logikus kapcsolatokra a geometriai törvények között. Az axiómák összessége akkor előnyös, ha minél kevesebb van belőlük, tehát alkalamazásukkor egyszerűbb alapvető fogalmakkal van dolgunk. Másrészt, ezeknek az axiómáknak a száma nem lehet tetszés szerint kevés, mert ezáltal nem tudunk annyi teorémát levezetni, amennyi érdekessé tenné a rendszert. Modern felfogás szerint egy definíció egyedüli állandó követelménye, hogy megőrizze az igazságot a geometriai igazságot tartalmazó mondatokban, s megőrizze a hazugságot a hamis mondatokban.

Arra a kérdésre, hogy vajon a posztulátumok olyan igazságok-e amelyekről tudjuk, hogy igazságok, vagy hogy Euklidesz nem adott rá választ. Ha ez így van, vajon ezek az igazságok empirikusak-e vagy a priori igazságok? A XX. századig vagy igazságot, vagy hazugságot lehetett mondani Euklidesz axiómáit használva, harmadik választás nem létezett. A gondolkodók többsége egyetértett azzal, hogy a geometria a priori és nem empirikus ismeret. Platon is így gondolkodott. Az ő megítélése mellőzi azt a lehetőséget, hogy a pontokról, egyenesekről, alakzatokról léteznek empirikus kimutatások. Kant szerint Euklidesz posztulátumai és teorémái univerzálisak és egyben szükségesek, mert ehhez egyetlenegy empirikus generalizáció sem juthat el. Kant szerint a geometriai ismeret és minden alapvető geometriai törvény is szintetikus. Ha ez így van, akkor felvetődik a kérdés, hogyan képes tudatunk ilyen geometriaia ismeretekkel rendelkezni? A szintetikus ismeret egy harmadik, külső dologtól függ, nem a szavak puszta értelmezésétől. Logikus akkor, ha ismeretünk szintetikus és a priori, akkor szükséges egy különös, mentális belátás. Platon szerint a lélek geometriai ismerete mellett egy nagyon fontos racionális belátás jut kifejezésre. Az ő teóriáját úgy is jellemezhetjük, mint realisztikus teóriát, mert állítása szerint a geometriai tárygaknak létezik egy reális képe tudatunkon kívül, noha érzékszerveinknek elérhetetle-

nek. Kant teóriája viszont konceptualisztikus, mert a geometriai ismeret szerinte valódi, de csak a tudat keretén belül.

A harmadik fejezet a nem euklideszi geometriával foglalkozik. Azokkal a teóriákkal, amelyek az euklideszi geometria után keletkeztek, s bizonyításaik az euklideszi geometria eredményeivel ellentétesek. Sok helyen, Euklidesz bizonyításai és következtetései a kimondott premisszákból nem a formális logika alapján következnek és mégis az olvasó úgy találja, hogy a következtetés igen meggyőző. Mindez azért van, mert Euklidesz könyve olyan geometriai helyzetet ír le, amelyről éppen szó van, olyan képet, amely lehetővé teszi az olvasónak, hogy megérezze, belássa azt, hogy Euklidesz következtetései helyesek. Ezért, modern felfogás szerint egy deduktív rendszert úgy kell felállítani, hogy azt teljesen objektív és absztrakt szempontból lehessen szemlélni, s így elkerülhetővé váljon Euklidesz hibája. Nem az az elsődleges, hogy az axiómák és teorémák igazak-e, hanem a köztük levő deduktív és kölcsönös kapcsolat.

A negyedik fejezet a számokról és azok szó szerinti filozófiájáról szól. Euklidesz axiomatikus rendszere megmaradt a modern matematikusok másfajta hozzállása mellett is. Viszont a számok matematikájában, az aritmetika, algebra, a differenciál- és integrálszámítás rendszerint úgy jelentkezik, mint a számolás törvényeinek összessége, és nem mint a törvények axiomatikus rendszere. A XX. század matematikájának fő jellegzetessége viszont az, hogy mind sűrűbben találkozunk axiomatikus hozzáállással a matematika tanulmányozásában. A legfontosabb „felfedezés" az a kapcsolat kimutatása volt, amely szerint az alapvető számcsoportokból fel lehet építeni a többi levezetett, felsőbb típusú számcsoportokat. Tehát a matematikának az a része, amely az „analízishez" tartozik, egyes fogalmakkal való kibővítés esetén az elementáris matematikára vezethető vissza. Az alaptörvényekből dedukció által eljutunk a felsőbb típusú számok törvényéig. Ennek a redukciónak filozófiai jelentősége van, nemcsak azért, mert ez egy példája a matematikai gondolkodásnak, hanem azért, mert minden filozófiai rejtély a természetes számok köré csoportosulhat.

A természetes számok rendszere nem interpretált rendszer és absztrakt logikus módszerekkel tanulmányozható. Ez az állítás azonban, nem tilthatja meg azt a gondolkodást, amely a számok természetére és létezésére vonatkozik. A négyszögletes forma, a piros szín vagy másmilyen univerzális tulajdonságok, absztrakt jellegzetességek összessége, valójában olyan dolgok, amelyek sem időben, sem térben nem helyezhetőek el. Háromféle filozófiai felelet létezik erre a kérdésre. A nominalisták szerint nem létezik absztrakt tulajdonságok összessége, amit a számokkal identifikálhatnánk. Arra a kérdésre, hogy mik a számok, így feleltek: azok ideák szellemünkben, ideák, amelyeket úgy értelmezünk, mint men-

tális képeket az egyes gondolkodó szellemében, amely egy meghatározott pillanatban jelentkezik, létezik egy ideig, majd megszűnik. Fő hiányossága ennek a filozófiai magyarázatnak az, hogy ha a számok valóban ideák lennének szellemünkben, akkor annyi különféle szám létezne, ahány ember. Ez az interpretáció nem hozott megfelelő eredményt, mert ilyen magyarázattal nem tudott minden axiómát és teorémát igaznak kimutatni. A nominalisták másik csoportja a számok fizikai jellegzetességeire támaszkodik. Szerintük a számok nem mások, mint numerák. Így számtalan numera létezik az aránylag kis számoknál, és egyáltalán nincs a végtelen nagy számoknál. A konceptualisták szerint a szellem olyan tulajdonságokkal rendelkezik, amellyel bármilyen számot alkothat saját akarata szerint, teljesen szabadon. Kant volt az egyik legkiemelkedőbb konceptualista a számok matematikájában. Szerinte számok csakis akkor léteznek, ha számlálással el tudjuk őket érni, a számlálás pedig a szellem intuitív adottsága. A realizmus mint harmadik filozófiai hozzáállás a számok megmagyarázásában, azt állítja, hogy a szám absztrakt jellegének összessége szellemünktől függetlenül létezik és azokat nem szellemünk alkotta.

A matematikusnak nem kell kigondolnia az ogjektumokat, amelyekről beszél, mert azok már léteznek, és arra várnak, hogy felfedezzék őket. Ennek alapján a mi tudomásunk racionális belátásunktól függ, a logikai törvények szigorú alkalmazásától.

Az ötödik fejezet a nem konkrét számfelfogásról beszél, a különböző módszerekről, próbálkozásokról az ellentmondások kiküszöbölésére, újabb filozófiai problémákról a matematika keretén belül, újabb sikeres és sikertelen magyarázatokról.

A fordító és az utószó írója Alexandar Kron. A könyvről adott általános véleményét kibővíti saját felfogásával és véleményével az egyes témákkal kapcsolatban.

Stefan Barker könyve igen érdekes és egyedülálló kérdéssel foglalkozik. A téma érdekessége mellett a matematika filozófiája igen összekuszált és bonyolult kérdéseire egyszerűen és kimerítően ad választ. Logikus magyarázatai a matematikusokon és filozófusokon kívül mások számára is érdekesek lehetnek.