Szórád György

# MATEMATIKA A VÁLLALATVEZETÉSBEN

## 1. A MATEMATIKA ÉS A KÖZGAZDASÁGTUDOMÁNY KAPCSOLATÁRÓL

Több mint egy évtizede nálunk sem vitatott tény a matematika alkalmazásának szükségessége a gazdasági életben. Ez a megállapítás már a felületes szemlélőben is megérhet, hisz évek óta közgazdasági szakirodalmunk mindinkább „matematizálódik". Ez a folyamat számos más tudomány — fizika, csillagászat stb. — művelői számára egyáltalán nem jelent újdonságot, mert már több száz éve alkalmazzák a matematikát problémáik megoldására. Különben a tudományos gondolat fejlődése is bizonyítja, hogy a matematika szerves beépítése a szaktudományokba emelte ezek hatékonyságát, de megtermékenyítően hatott vissza a matematika fejlődésére is. A közgazdaságtudományban viszont mindössze 2—3 évtizede alkalmazzák intenzívebben a matematikát. Ezt az örvendetes jelenséget nagyon hathatósan segíti a nagykapacitású elektronikus számológépek elterjedése is a gazdasági életben.

A leírt jelenség gyökereit abban kell keresnünk, hogy a technika mai színvonalán, a társadalmi munkamegosztás elmélyülésével és kiszélesedésével a vezetők szervezési feladatai egyre nőnek terjedelemben és igényességben egyaránt, s az egyre terebélyesedő feladatok hagyományos módszerekkel való megoldása mindinkább csődöt mond. Éppen ezért szükségessé vált olyan módszerek kialakítása, melyek biztosítják a vezető számára a bonyolult és összefüggő tevékenységek felett az „áttekintést", tervezésük, irányításuk, koordinálásuk „kézbentartását". Ez az igény hozta magával a matematika mind szélesebb körű alkalmazását a gazdasági élet terén. Különösen nagy fejlődés tapasztalható e területen egy új tudományág: a kibernetika megjelenésével.

A kibernetika, mint a komplex rendszerek (például a gazdasági rendszer) vezérlésének tudománya, két hatékony eszközzel rendelkezik: a nagyteljesítményű, programvezérléssel működő számológépekkel és az új műszaki alapokon nagy lendülettel kibontakozó, korszerű matematikai módszerekkel. Ezek segítségével már vállalkozhat olyan bonyolult vezérlési (vezetési) problémák megoldására, mint amilyenek a vezetők előtt állnak a gazdasági fejlődés mai fokán.

A modern számolóautomaták lehetővé tették a nagytömegű számolás gyors elvégzését, melyet az új matematikai módszerek alkalmazása magával hozott. Velük ezúttal azonban nem kívánunk bővebben foglalkozni, inkább a matematika alkalmazásának szükségességével, lehetőségeivel és problémáival. Tárgyalásunkat azonban leszűkítjük a vállalat problémakörére, a gazdasági rendszer alapvető és legfontosabb sejtjére.

## 2. MATEMATIKAI MÓDSZEREK A DÖNTÉSHOZATAL TERÜLETÉN

A vezetés egy szervezeten belül a legfontosabb erő, amely a részek tevékenységét egymással és a környezettel összehangolja. A vállalatvezetés is alapjában véve így jellemezhető, azaz mint olyan folyamat, amelynek keretében a szervezetlen erőforrások (ember, gép, pénz) rendszerré forrnak össze a kitűzött cél eléréséért.

Habár a vállalatvezetés folyamatát a legkülönbözőbb módon értelmezik a szerzők, abban azonban egy véleményen vannak, hogy négy alapvető funkciója van:

a) *Tervezés:* az integrált döntések kerete[1] (a szervezet céljainak és megvalósításához szükséges politikáknak, programoknak és módszereknek kialakítása).

b) *Szervezés:* az emberek és gépek rendszerré szervezése.

c) *Irányítás-ellenőrzés:* az alrendszerek egybehangolása a tervek szellemében.

d) *Kommunikáció:* közlés és adatátvitel a döntések központjai között.

A felsorolt funkciók nem független tevékenységek, úgy is mondhatnánk, hogy bizonyos szimbiózist alkotnak. A tervezésnek mégis egyfajta elsőbbséget adhatunk, mert a vezetői tevékenység bármely szakaszát tervezéssel kell kezdeni.

A tervezés viszont szorosan összefügg a döntés fogalmával: az alternatív lehetőségek közötti választással. Ez viszont nem is olyan egyszerű feladat. A nagyszámú lehetőség közül próbálgatással kiválasztani a legjobbat, mindig nagy kockázatot rejteget. Ezért szükségszerűen a próbálgatás helyére idővel a tudatos, a számításokon alapuló döntés kellett hogy lépjen. Ennek elérését tették lehetővé a matematikai módszerek; biztosították az összefüggések számszerű megfogalmazását, a döntések következményeinek kiszámítását, és a tudatos döntés alapján emelték a vezetés színvonalát.

A matematikai módszerek közül is elsősorban az ún. operációkutatás módszerei azok, amelyek alkalmazhatók, mint döntéshozatali eljárások. S habár az operációkutatás születését a második világháború hadvezetési problémáinak „köszönheti", nagyon jól bevált „civil"-életben is, mint pl. a döntéshozatal területén. Az operációkutatás különben ma már igen fejlett, több tudományszakos alkalmazott tudomány, amely felöleli a matematikai programozást (lineáris és nem-lineáris programozás), a készletezési elméletet, a sorbarendezési és sorbanállási elméletet, a hálós programozási módszereket, az információ-elméletet és még sok más eljárást, melyek a vezetés problémáinak megoldását kívánják elősegíteni tudományos alapon.

Az eddigi rövid fejtegetésből is világosan kitűnik, hogy a matematikai módszereknek a jövőben, felcserélve a hagyományos módszereket, mind fontosabb szerep jut a döntéshozatalban. Ennek a megállapításnak az alátámasztására szolgálnak a következő pontokban kifejtett gondolatok és illusztrációk is.

## 3. A KÖZGAZDASÁGI-MATEMATIKAI MODELLEK

A természettudományokban szokásos és széles körben alkalmazott módszer a kísérletezés. A kísérleteket úgy állíthatjuk be, hogy csak az a két jelenség változzon, melynek egymásközti viszonyát figyelemmel szeretnénk kísérni, míg a többi változatlan.

A gazdasági életben túl kockázatos volna ilyenfajta kísérletezés alapján megállapítani a jelenségek közötti mennyiségi összefüggéseket. Éppen ezért a közgazdaságtudományban más eszközökhöz kell folyamodni, ha mennyiségi ismérvekhez akarunk jutni. Ezt a hidat a minőségtől a mennyiségig a modell szolgáltatja.

A közgazdasági-matematikai modellek a valóság célszerűen leegyszerűsített képét nyújtják. Más szóval a modell csak azokat az összefüggéseket tartalmazza, amelyek létfontosságúak a cél szempontjából, és eltekint a kevésbé fontosaktól. Ez a feltételezés annál is inkább szükséges, mert a túl sok ismeretlen[2], amely a vizsgálat során felmerülhet, csak elködösítené az alapproblémát, s a modell számítástechnikai kezelése is kérdésessé válna.

A közgazdasági-matematikai modell összefüggéseinek és szerkezetének meghatározása, vagyis az adott probléma lefordítása a matematika nyelvére, az első feladat, ha egy közgazdasági problémát matematikai módszerekkel szeretnénk megoldani. Ez közelről sem egyszerű feladat, s éppen összetett mivolta végett a legjobb eredményt akkor érjük el, ha koordináltan tevékenykedő munkacsoportokra (teamekre) bízzuk ezt a feladatot.

Az említett modellek legfontosabb csoportját az ún. *programozási* (optimumszámítási) modellek alkotják. Ezeknél az a feladat, hogy a lehetséges gazdasági döntések (programok) halmazából ki kell választani a leghatékonyabbat, az ún. optimális döntést (optimális programot).

## 4. GAZDASÁGI DÖNTÉSEK MATEMATIKAI MEGFOGALMAZÁSÁRÓL

Tegyük fel, hogy egy vállalat keretén belül $n$ különböző tevékenység[3] létezik, melyeket meghatározott egységekben (mindegy, milyen) mérhetjük. A feltételezett tevékenységek szintjét a következő vektor[4] elemei jelzik:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

A tevékenységek ráfordításigényesek, s ezért definiáljuk az $\mathbf{a}_i$ vektort, amely az $i$-dik tevékenység ráfordítási együtthatóit (technikai koefficienseit) tartalmazza. Más szóval, ezek az adatok mutatják, milyen ráfordítások szükségesek a különböző erőforrásokból (gépi kapacitások, nyersanyag, munkaerő stb.) az egyes tevékenységek alkalmazásakor. A modellben $m$ különböző erőforrással számolhatunk, amelyek szintjét a

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

vektor elemei mutatják. Az adott erőforrások szintén kifejezhetők meghatározott egységekben, és általában korlátozott mennyiségben állnak rendelkezésre. Ez azt jelenti, hogy a tevékenységek összráfordításigénye nem lehet nagyobb az adott szintnél. Ha adott esetben $b_i$ jelenti $i$-dik erőforrás rendelkezésre álló mennyiségét, az $a_i(\boldsymbol{x})$ függvény pedig az $\boldsymbol{x}$ döntés erőforrás szükségletét, akkor ezt a feltételt a következőképpen írhatjuk le:

$$a_i(\boldsymbol{x}) \leqq b_i$$

Ez a feltételezés vonatkozik mind az $i = 1, 2, \ldots, m$ erőforrásra.

Amennyiben más feltételeket[5] nem kívánunk bevezetni, akkor a lehetséges döntések halmazát ($L$) így definiáljuk:

$$L = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0}; \quad a_i(\boldsymbol{x}) \leqq b_i; \quad i = 1, 2, \ldots, m\}$$

Ily módon matematikailag fogalmaztunk meg egy gazdasági döntést, a termékválaszték meghatározását. A megfogalmazásból az is kitűnik, hogy az $L$ halmaz csak olyan $\boldsymbol{x}$ döntéseket tartalmazhat, amelyek kielégítik az $m$ egyenlőtlenségből álló feltételi rendszert, és az úgynevezett nemnegativitási feltételt: $\boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0}$, vagyis csak pozitív és nulla értékek jönnek számításba.

## 5. AZ OPTIMÁLIS DÖNTÉS MEGHATÁROZÁSA

Miután megfogalmaztuk az $L$ halmazt, áttérünk annak vizsgálatára, létezik-e egyáltalán olyan döntés, amely egyidejűleg kielégíti az összes feltételeket. Amennyiben feltételi rendszerünk eleve nem inkonzisztens, akkor $L \neq 0$, és létezik egy vagy több lehetséges döntés. Egy lehetséges döntés esetén nem beszélhetünk programozásról, azaz optimumszámításról, mert ez az egyetlen megoldás egyben a legjobb is. Ellenkező esetben a több lehetséges döntés közül kell kiválasztani a leghatékonyabbat, az optimálisat.

Az optimális döntés ($\boldsymbol{x}_o$) meghatározásához szükségünk van bizonyos kritériumra, melynek alapján a hatékonysági vizsgálatot elvégezzük. Ha a hatékonyság mérhető, akkor minden döntéshez hozzárendelhető egy $f(\boldsymbol{x})$ hatékonysági függvény, az ún. célfüggvény. A célfüggvény közgazdasági tartalma esetenként változik[6], s meghatározása közgazdasági szempontból egyik legnehezebb problémának számít.

Összegezvén az elmondottakat, megállapíthatjuk, hogy a programozási modelleknél az alapfeladat azon $\boldsymbol{x}$ lehetséges döntések meghatározása, amelyek mellett a célfüggvény eléri maximumát, illetve minimumát. Amennyiben az adott célfüggvényt és az $L$ halmazt lineáris matematikai kifejezésekkel fogalmaztuk meg, úgy lineáris programozási modellről van szó. Ellenkező esetben viszont ún. nemlineáris modellel állunk szemben.

## 6. A PROGRAMOZÁSI MÓDSZEREK SZEREPE AZ OPTIMÁLIS VÁLLALATI DÖNTÉSEK ELŐKÉSZÍTÉSÉBEN

Miután megismerkedtünk a döntéshozatal matematikai alapokra való helyezésének általános elveivel, áttérünk a konkrétabb tárgyalásmódra.

### 6.1. LINEÁRIS PROGRAMOZÁSI PROBLÉMÁK

A programozási problémák sajátosságainak jobb megértése céljából egy elemi példát fogunk bemutatni, melynek segítségével megmutatjuk, hogyan építhetők fel a vállalati döntések egzakt megalapozására lineáris modellek.

Tegyük fel, hogy egy gyár meg szeretné állapítani az optimális termékválasztékot a következő műszaki-technológiai feltételek mellett:

| Gépek | Termék | | Kapacitás (gépórákban) |
|---|---|---|---|
| | $T_1$ | $T_2$ | |
| $G_1$ | 1 gépóra/db | 3 gépóra/db | 9 |
| $G_2$ | 2 gépóra/db | 1 gépóra/db | 8 |
| Tiszta jövedelem | 1 dinár/db | 1 dinár/db | |

Jelöljük a továbbiakban $x_1$ szimbólummal a $T_1$ termék előállítandó darabszámát, $x_2$-vel pedig a $T_2$ termékét. Ezek, a jelen pillanatban ismeretlen mennyiségek, nem vehetnek fel negatív értéket, vagyis

$$x_1, x_2 \geqq 0$$

Ha mindkét gépnél a ráfordítások arányosak a termelt mennyiséggel, akkor a következő két feltételt írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leqq 9 \\ 2x_1 + x_2 &\leqq 8 \end{aligned}$$

Ezekkel a lineáris matematikai kifejezésekkel sikerült megadni az $L$ halmazt, mert az ismeretlenek nem jelentkeznek egynél nagyobb hatványkitevővel.

Azokat az $(x_1, x_2)$ értékpárokat, amelyek kielégítik a fentebb megfogalmazott feltételeket, lehetséges döntéseknek nevezzük. Ezek közül kell kiválasztani az optimálisat, vagyis a legnagyobb tiszta jövedelmet biztosító döntést. A célfüggvény pedig az

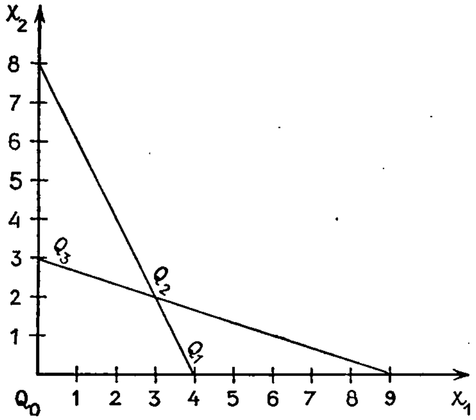
$$x_1 + x_2 = z \to \max$$

lineáris kifejezés.

A kapott modell lineáris mivolta teszi lehetővé, hogy mindjárt rámutassunk egy megoldási lehetőségre: az ún. grafikus megoldásra, melynek hatóköre korlátozott a kétismeretlenes problémákra.

A grafikus megoldáskor Descartes koordináta rendszerének csak az I. síknegyedét használjuk[7], és abból indulunk ki, hogy az $x_1 + 3x_2 \leq 9$ egyenlőtlenségnek a szokásos ábrázolásmód szerint a (9;3) koordináta pontokat összekötő szakasz felel meg. Ugyanez vonatkozik a második egyenlőtlenségre is, csak a koordináták változnak (4;8).

A lehetséges döntések halmazát a $Q_0(0;0)$; $Q_1(4;0)$; $Q_2(3;2)$; $Q_4(0;3)$ extremális pontokkal rendelkező négyszög reprezentálja:




1. ábra

Könnyű belátni, hogy az $L$ halmaz véges, sok megoldást — lehetséges döntést — tartalmaz[8], s ezek közül kell kiválasztani az optimálisat. Szerencsére nem kell az összes döntést összehasonlítani, elég, ha az extremális pontok képviselte döntéseket vizsgáljuk meg. Mivel a $Q_2$ képviselte döntés, azaz 3 db $T_1$ és 2 db $T_2$ termelése biztosítja a legnagyobb tiszta jövedelmet: az 5 dinárt, így ez a döntés az optimális.[9]

Amennyiben megváltoznak a célfüggvény paraméterei, általában változik a döntés is. Vegyük pl. azt az esetet, hogy egy darab $T_1$ az elkövetkező tervidőszakban nem 1 dinár, hanem 3 dinár tiszta jövedelmet hoz, míg egy darab $T_2$ : 1,5 dinárt. A megváltozott hatékonyság eredménye, hogy most két döntés optimális:

1. $Q_1\begin{pmatrix} x_1 = 4 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix} z_1 = 12$ dinár 2. $Q_2\begin{pmatrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{pmatrix} z_2 = 12$ dinár

Azt mondjuk, hogy most alternatív optimumaink vannak, mert az eltérő termékválaszték ugyanazt a maximális tiszta jövedelmet biztosítja. Sőt, lehetőség van egész sor újabb alternatív optimum kiszámítására is, mert pl. az a döntés-kombináció, amely 50%-a az 1. és 50%-a a 2. optimális döntésnek, szintén optimális döntés:

$$\begin{matrix} x_1 = 3{,}5 \\ x_2 = 1 \end{matrix} \quad z = 12 \text{ dinár}$$

## 6.2. A DUALITÁS LINEÁRIS MODELLBEN

Vegyük újból az előbbi pontban tárgyalt maximum-problémát, s rendeljük hozzá a duálisát, azaz egy minimum-problémát:[10]

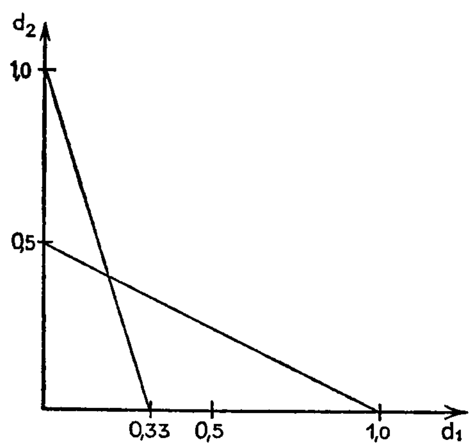
$$\begin{aligned} d_1, d_2 &\geqq 0 \\ d_1 + 2d_2 &\geqq 1 \\ 3d_1 + d_2 &\geqq 1 \\ 9d_1 + 8d_2 &= v \rightarrow \min \end{aligned}$$

A primális maximum probléma közgazdasági interpretációját nem volt nehéz megadni, míg a duálisnál ez már nem megy olyan egyszerűen. Kíséreljük meg azonban, s írjuk ki e célból az együtthatók mellé a megfelelő egységeket, melyekben őket kifejeztük:

1 gépóra $d_1$ + 2 gépóra $d_2 \geqq$ 1 dinár
3 gépóra $d_1$ + 1 gépóra $d_2 \geqq$ 1 dinár
9 gépóra $d_1$ + 8 gépóra $d_2 = v \rightarrow \min$

Ebből következik, hogy a $d_1$, illetve a $d_2$ dimenziója dinár/gépóra, vagyis a duális változók a gépórák „árát" jelentik. Ezért is szokásos a duális változók értékeit árnyékáraknak nevezni, mert itt nem a klasszikus értelemben vett árakról van szó.

Az árnyékárak az adott döntés esetében azt fejezik ki, hogy mennyivel nőne a tiszta összjövedelem, ha gépeinken 1 órával nagyobb kapacitást tudnánk biztosítani. Ennek bizonyítására oldjuk meg grafikusan a duális problémát is:




2. ábra

Az optimális megoldást az az extremális pont jelenti, melynek koordinátái (0,2; 0,4), tehát a $G_1$-es gép árnyékára 0,2 dinár, a $G_2$-é pedig 0,4. Más szóval az optimális tiszta jövedelmet (5 dinár) 0,2; illetve 0,4 dinárral lehet növelni, ha sikerül 1 gépórával emelni a kapacitások szintjét.

Közelítsük meg más oldalról is ezt a rendkívül érdekes és fontos mutatót, s ezért a primális feladat feltételrendszerét még egyszer vizsgáljuk meg. Azt már tudjuk, hogy a feltételi egyenlőtlenségek a 100%-os kapacitáskihasználás miatt egyenlőség alakjában valósulnak meg, s most kiegészítésképpen tegyük fel, hogy a $G_1$ kapacitása 9 helyett 10 gépóra. Így aztán írhatjuk, hogy

$$x_1 + 3x_2 = 10$$
$$2x_1 + x_2 = 8$$

Az egyenletrendszer megoldása — $x_1 = 2{,}8$; $x_2 = 2{,}4$ — alapján kiszámíthatjuk az új tiszta jövedelmet:

$$z = x_1 + x_2 = 5{,}2 \text{ dinár}$$

Összehasonlítva a 6.1. pontban nyert célfüggvény értékkel (5 dinár), egyszerű megállapítani a 0,2 dináros emelkedést, — vagyis beigazolódott, hogy a $G_1$ árnyékára 0,2, s ezzel az értékkel nő a célfüggvény értéke a kapacitások szintjének emelkedésével arányosan.[11]

Az árnyékárak alkalmazási lehetőségei a gyakorlatban még nem alakultak ki teljesen. Kézenfekvő azonban az adott probléma alapján ezeket a mutatókat alkalmazni a beruházási politikában (jobb $G_2$ gépet vásárolni, mint $G_1$-et, mert $d_2 > d_1$) vagy az ösztönző rendszerek kiépítésében (pl. a gépkarbantartó munkások jó munkájuk elismeréséért 2-szer nagyobb jutalmat kellene, hogy kapjanak, ha $G_2$ gép kapacitásánál nem volt kiesés, mint a $G_1$ gépnél). Különben az árnyékárak alkalmazása iránt érdeklődőket utaljuk Simon és Kondor könyvére.[12]

## 6.3. A SZIMPLEX MÓDSZER

A grafikus megoldás nagyon elegáns módszer, de nagy szépséghibája, hogy csak kétdimenziós döntéseknél alkalmazható. S mivel ez az eset a gyakorlatban nem tipikus, úgy sokkal hatékonyabb és szélesebb körben alkalmazható módszerek után kellett nézni. Már 1939-ben világot is látott egy ilyen módszer, az ún. megoldó együtthatók módszere, melyet Kantorovics szovjet matematikus-közgazdász publikált. Az igazán nagy fejlődést azonban Dantzig amerikai matematikus szimplex módszere jelentette, melyet a szerző 1947-ben fogalmazott meg, de a kutatások titkossága miatt csak 1951-ben publikálta.

A szimplex módszer matematikai alapjait a lineáris algebra, pontosabban a bázistranszformációk jelentik. Ez alkalommal azonban nem foglalkozunk a módszer matematikai hátterével,[13] hanem inkább arra szeretnénk rámutatni, mit nyújt a vállalatvezető számára ez a módszer.[14]

A szimplex módszer algoritmikus módszer, éppen ezért könnyen átvihető az elektronikus számológépekre. Ez pedig lehetővé teszi a számítások gyors elvégzését és a döntés különböző szempontokból optimális mivoltának megállapítását. Így pl. különböző szempontok lehetnek: minimális költség, maximális termelékenység, legkisebb szállítási távolság stb. Másrészt lehetővé válik egy bizonyos célból való eltérés, a döntés valamilyen variációjának megállapítása. Például a vezetőt érdekelheti a maximális jövedelemmel járó program különböző szállítási kötelezettségek mellett; különböző piaci és technológiai feltételek mellett vagy különböző kapacitásszintek mellett stb.

Az ilyen döntésvariációk nagyon értékesek a vezető és az önigazgató számára, mert a számokkal alátámasztott döntéslehetőségek (alternatívák) megkönnyítik, biztonságosabbá és elasztikusabbá teszik a vállalatvezetést. Ezek a lehetőségek akkor kapnak igazi hangsúlyt, ha tudjuk, hogy a gyakorlat sokszor kénytelen megelégedni egy-két alternatív döntés elkészítésével, mert képtelen a hagyományos módszerekkel felnőni feladatának magaslatára.

A döntési alternatívák nagyszámú generálásán kívül — amikor különben az alapvető számítási eljárás lényegében nem változik, csak a feltételi rendszer — a szimplex módszer választ adhat az adatok bizonytalanságának problémájára is. A parametrikus programozás segítségével ugyanis megállapíthatjuk, hogyan reagál a kapott optimum az adatok megváltozására. S tudvalevő, hogy a célfüggvény együtthatói nagyon érzékeny értékek, igazolt tehát a kérdésfeltevés: milyen intervallumban stabil a döntés? Természetesen nem csak a célfüggvény, hanem a technikai együtthatók vagy a kapacitáskorlátok is változhatnak, s külön-külön alávethetők parametrikus érzékenységi vizsgálatoknak.

A külön-külön változások azonban rendszerint nem vetnek fényt arra, hogy mi történik, ha az összes adatok együttesen változnak. Erre csak az ún. sztochasztikus programozás nyújthat feleletet, mely valószínűségi (aleatorikus) változókkal dolgozik. Ez a terület azonban még sok kutatást kíván.

## 6.4. A SZÁMÍTÓGÉPEK ALKALMAZÁSA

A szimplex módszerrel kapcsolatos számítások egyaránt kivitelezhetők kézileg és gépileg. Természetesen a gépi eszközök — s itt elsősorban a legkorszerűbb számítástechnika, az elektronikus számítógépekre gondolunk — teszik a szimplex módszert igazán hatékonnyá.

A „gyalogos technika" és a modern számítógépek közötti gyorsaság különbségre szeretnénk utalni a következő összehasonlítással:

Tegyük fel, hogy rendelkezünk egy kis házi számológéppel. Ez esetben ellenőrzéssel, javítással és felírással együtt átlag 1 percre van szükségünk 1-1 adat kiszámításához. Mivel az adatok száma egy $n \cdot m$ méretű szimplex táblázatnál iterációkként $n \cdot m$, úgy 1-1 iteráció $n \cdot m$ percet követel meg. Ha ehhez hozzáadjuk, hogy az iterációk száma átlagban 1,5 $n$, úgy együttvéve 1,5 $n^2m$ perc szükséges, hogy az optimális döntést megkapjuk. Ez egy 10 feltételt és 10 tevékenységet (ismeretlent) tartalmazó probléma esetén kb. 1500 perc, illetve 25 óra, de csak a kettőször nagyobb problémánál már nyolcszor nagyobb időráfordítás (200 óra) szükséges.

Az előbbi példa is mutatja, hogy a számítási idő igen gyorsan nő, és szükségszerűen előírja a számítógépek felhasználását. Itt jegyezzük meg, hogy a $10 \cdot 10$ nagyságrendű problémát a szabadkai Munka- és Ügyvitelszervezési Intézet Honeywell 1250 típusú, középnagyságú computere 4—5 perc alatt oldaná meg. S ennél vannak jóval gyorsabb, és főleg nagyobb, számítógépek. Míg az említett gép csak $35 \cdot 45$ nagyságú[15] problémákat oldhat meg, addig egyes IBM és ICL számítógépek több ezres, sőt milliós nagyságrendű feladatok megoldására is alkalmasak. S mindezt relatív rövid időn belül teszik, úgyhogy naprakész adatfeldolgozást feltételezve, szükség esetén a vezetés naponta számszerűsítheti döntési alternatíváit.

## 6.5. NEM-LINEÁRIS PROGRAMOZÁSI PROBLÉMÁK

Eddig csak lineáris programozási modellekről és problémákról volt szó. Ezek sokrétű alkalmazása azonban nem jelenti, hogy minden vállalati döntés lineáris modellként jelentkezik. Azok a feltételezések és absztrakciók, amelyek lehetővé teszik a lineáris modell matematikai felépítését, nem mindig állnak helyet a gyakorlatban. A gyakorlat ugyanis sokkal bonyolultabb, semhogy egyetlen lineáris modellbe bele lehetne építeni egészét. Éppen ezért folyik szerteágazó kutatás (matematikai és közgazdasági), hogy a gyakorlat olyan jellemzőit és összefüggéseit is fel lehessen ölelni, melyek a lineáris programozás feltételezéseinek ellentmondanak.

Így jutunk el a nem-lináris programozási modellekhez, melyben a célfüggvény, illetve az $L$ halmaz nem-lineáris matematikai kifejezésekkel van megadva. A nem-lineáris döntések legáltalánosabb matematikai megfogalmazása a következő:

Keressük azt az $n$ elemű $\boldsymbol{x}$ vektort, amely maximálissá (minimálissá) teszi a $z = f(\boldsymbol{x})$ célfüggvényt, valamint kielégíti az $\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$ és $k(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ feltételeket, ahol $k(\boldsymbol{x}) = < k_1(\boldsymbol{x}), k_2(\boldsymbol{x}), \ldots, k_m(\boldsymbol{x}) >$ egy gyakran rendkívül bonyolult feltételrendszert jelöl.

Az eddigi kutatási tapasztalatok a nem-lineáris programozási területen azt mutatják, hogy a legjobb eredmények akkor érhetők el, ha a $k(\boldsymbol{x})$ feltételrendszer lineáris, az $f(\boldsymbol{x})$ célfüggvény pedig konvex, konkáv vagy hiperbolikus. Konvex, illetve konkáv programozásról akkor beszélünk a gyakorlatban, ha a célfüggvény nem-lineáris függvénye a termelt mennyiségnek. Például, ha valamilyen erősen progresszív bérköltség miatt az egyes termékeken elérhető jövedelem maga is változik a termelt darabszámmal. Ilyenkor az összjövedelem nem lineáris, hanem konkáv függvénye a termelt darabszámnak. A problémát lineáris feltételrendszer mellett mégis viszonylag egyszerű visszavezetni lineáris modellre s a szimplex módszer alkalmazására, mert a konkáv célfüggvényt közelíthetjük tetszés szerinti pontossággal lineáris szakaszokkal.

Hiperbolikus programozásról akkor beszélünk, ha célfüggvényünk egy racionális törtfüggvény, mint pl. az esetben, ha a gazdaságosságot választjuk optimalizálási kritériumnak. Martos magyar matematikus megmutatta (1960-ban), hogy ilyen esetekben is alkalmazható a szimplex módszer.

Úgyszintén egzakt döntésekre számíthatunk akkor is, ha $k(\boldsymbol{x})$, illetve $f(\boldsymbol{x})$ lineáris, de a gyakorlatot az $\boldsymbol{x}$ vektor elemeinek csak egész számú értékei elégítik ki. Ilyen az eset pl. a hajógyártásnál,[16] vagy a beruházási alternatívák figyelembevételénél is.

# 7. ÖSSZEFOGLALÁS

Azt jelentik-e azonban a kifejtett gondolatok, hogy a jövőben a jó vállalati vezetőknek matematikusoknak kell lenniök? A válasz egyértelműen: nem. A vezetőnek épp úgy nem feladata a matematikai módszerek tanulmányozásába elmerülni, mint az asztalán álló telefon működését tanulmányozni. De ahogy magától értetődő számára a telefon használata, úgy kell tudnia, hogy milyen módszereket mikor, hol és milyen feltételek mellett célszerű alkalmazni, és tudnia kell a matematikusok, operációkutatók vagy a koordináltan tevékenykedő munkacsoportok által elért eredményeket kiértékelni. Talán különösnek fog hangzani, ha azt mondjuk, hogy a vezetőre háruló legnagyobb feladat itt nem az elvont és nehéz matematikai apparátus megszerzése, hanem az újszerű szemléletmód kialakítása, amelyben minden mindennel összefügg, minden hatás továbbgyűrűzik, minden vaslogikával érvényesül, és mindennek számszerűsítve kell lennie, ha érvényesíteni akarjuk hatását.

Persze a matematikai módszerek alkalmazása a vezetői döntések előkészítésében nem megy máról holnapra. Tény azonban, hogy a jobb vállalati vezetés érdekében fel kell használnunk a korszerű módszereket és számítógépeket. Mindez megköveteli egyrészt, hogy e téren megfelelő szakemberekkel rendelkezzünk (ilyenfajta oktatás egyetemeinken még csak 5—10 éves múltra tekint vissza), s másrészt, hogy vállalati vezetőink sokszor ne bánjanak oly mostohán e módszerekkel, és ne „féljenek" tőlük. A félelem különben is alaptalan, a matematika mindig csak eszköz marad a közgazdász kezében, amely megvizsgálja a lehetséges döntések feltételeit és következményeit, míg maga a döntés elsődlegesen mindig közgazdasági funkció marad.

## JEGYZETEK

[1] A tervezés rendszerelméletű felfogása értelmében a vállalat döntéseket hozó alrendszerek integrációja.

[2] Gyakran a véletlentől függőek.

[3] Tevékenységen értendő pl. a terméktermelésre irányuló akció.

[4] Feltételezzük, hogy minden lehetséges programot vektorként foghatunk fel.

[5] Például piaci és technológiai korlátokat, melyek nemcsak $\leqq$, hanem $\geqq$ vagy $=$ alakban is megjelenhetnek.

[6] Pl. a tiszta jövedelem maximalizálása; az önköltség minimalizálása stb.

[7] A nem negativitási feltétel miatt.

[8] A négyszög pontjai mind ilyenek.

[9] Egyszerű behelyettesítéssel megállapítható az is, hogy mind a $G_1$, mind a $G_2$ gép kapacitása 100%-osan ki van használva.

[10] A szabály az, hogy oszloponként olvassuk a primális feladat együtthatóit, s minden sorhoz hozzárendelünk egy duális ($d$) változót. Tehát alapjában véve egyfajta költségminimalizálási problémáról van szó!

[11] Ez persze csak az ún. szűk-keresztmetszetekre vonatkozik.

[12] Simon, Gy.—Kondor, Gy.: Gazdasági hatékonyság, árnyékárak, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1965.

[13] A szimplex módszer iránt érdeklődő olvasót utaljuk az idevágó gazdag irodalomra. A magyar nyelvű forrásmunkák között előkelő helyet foglal el: Krekó, B., Lineáris programozás, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1966.

[14] Azokon az információkon kívül, melyeket a grafikus megoldásnál már megismertünk

[15] 35 feltétel (sor) és 45 ismeretlen (oszlop).

[16] Mit jelent az, hogy 1,6 hajót kell gyártani?

---


## REZIME

### MATEMATIKA U UPRAVLJANJU PREDUZEĆEM

Već je prošla skoro jedna decenija otkada i kod nas ne postoji nikakva sumnja u potrebu primene matematike u ekonomiji. Naime, na današnjem stepenu tehničkog progresa, produbljivanjem društvene podele rada, broj organizacionih poslova raste u privredi kako po obimu, tako i po kompleksnosti tako brzo da klasičnim metodima postaje nemoguće pratiti privredne procese. Stoga je nužna bila pojava savremenih matematičkih metoda, koji omogu-

ćuju koordiniranje, planiranje, kontrolisanje i upravljanje kompleksnim sistemima, kao što je preduzeće.

Autor razmatra u svom članku ulogu matematičkih metoda, naročito metoda operacionog istraživanja, u upravljanju preduzećem. Ističe se efikasna uloga metoda programiranja — linearnog i nelinearnog — u pripremi optimalnih poslovnih odluka.

Predmet posebnog razmatranja predstavlja potreba i mogućnost primene elektronskih računara, koji omogućuju brzo obavljanje velikog broja numeričkih proračuna vezanih za savremene matematičke metode.

U zaključnom osvrtu se ukazuje na odnos rukovodilaca prema primeni matematičkih metoda u svakidašnjoj praksi. Prema autorovom mišljenju put ka egzaktnosti vodi preko ugrađivanja matematike u upravljanje preduzećem. Naravno matematika će uvek ostati samo sredstvo, koje pomaže u donošenju odluke.


## ZUSAMMENFASSUNG

### MATHEMATIK IN DER BETRIEBSFÜHRUNG

Wir blicken fast auf ein Jahrzehnt zurück, seitdem auch bei uns keine Zweifel mehr über die Notwendigkeit der Anwendung der Mathematik in der Wirtschaft besteht. Nämlich auf dem heutigen Stand des technischen Fortschrittes wächst mit der gesellschaftlichen Arbeitsteilung die Zahl der organizatorischen Aufgaben in der Wirtschaft, sowohl nach Umfang als auch der Komplexität nach so rasch, dass es unmöglich geworden ist, die Wirtschaftsprozesse mit klassischen Methoden zu verfolgen. Aus diesem Grunde war das Aufkommen der neueren mathematischen Methoden eine Notwendigkeit. Diese mathematischen Methoden ermöglichen das Koordinieren, Planen, die Kontrolle und Leitung komplexer Systeme wie das Betriebe sind.

Der Verfasser setzt sich in seinem Artikel mit der Rolle der mathematischen Methoden auseinander, insbesondere mit den Methoden der Unternehmensforschung als Methoden der Betriebsführung. Es wird die wirksame Rolle der Methoden des Programmierens — linear und nichtlinear — in der Vorbereitung von optimalen Betriebsentscheidungen hervorgehoben.

Gegenstand besonderer Erörterung stellt die Notwendigkeit und Möglichkeit dar, elektronische Rechenanlagen zu verwenden, die eine schnelle Durchführung einer grossen Zahl von numerischen Berechnungen ermöglichen, die die neueren mathematischen Methoden begleiten.

Im Rückblick wird auf die Haltung der Führungskräfte gegenüber der Anwendung mathematischer Methoden in der täglichen Praxis hingewiesen. Nach der Meinung des Verfassers führt der Weg zur Exaktheit über den Einbau der Mathematik in die Betriebsführung. Selbstverständlich bleibt die Mathematik auch weiterhin nur ein Mittel, das das Treffen von Entscheidungen erleichtert.